全国及各省市初中数学竞赛试题解

颜秉海　主编

黑龙江教育出版社

全国及各省市初中数学竞赛试题解

颜秉海　主编

黑 尤 江 教 育 出 版 社

1987年 · 哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：杨守本

全国及各省市初中数学竞赛试题解

颜秉海　主编

黑 龙 江 教 育 出 版 社 （哈尔滨市道里森林街42号）	出 版
黑 龙 江 新 华 二 厂	印 刷
黑 龙 江 省 新 华 书 店	发 行

开本787×1092毫米 1/32·印张16

字数350,000

1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷

印数 1—20,767

统一书号：7357·343　　定价：2.80元

ISBN　7—5316—0018—8/G·18

前　言

在中学生中开展数学竞赛是一项很有意义的课外活动。它能激发中学生学习数学的兴趣和积极性，推动数学第二课堂的广泛开展；它能配合和补充正课学习，有利于中学数学教学质量的提高；并且通过各地和全国的竞赛选拔和培训，有助于及早发现和培养数学人才。初中是打基础的重要阶段，必须从初中抓起，在初中开展数学竞赛活动意义尤为重大。因此，在国际和国内，初中数学竞赛活动日益受到普遍的重视。

在中国数学会普及工作委员会的组织领导下，我国的数学竞赛活动，近年来以改革的精神，灵活多样的形式，蓬勃地发展起来。从1981年起，每年举办全国省市自治区联合高中数学竞赛，从1985年起每年举办全国初中数学竞赛，从1986年起我国又派出代表队正式参加国际数学奥林匹克，这必将把我国的数学竞赛活动推进到一个新的阶段。为了在国际数学奥林匹克中争取优异成绩，必须使我国的数学竞赛具有广泛的群众性，并在普及的基础上不断提高。

为了配合初中数学竞赛活动的开展，解决数学竞赛活动资料缺乏的困难，给各地初中数学竞赛培训班、广大初中学生及初中数学教师提供较完整的资料，黑龙江省数学会普及工作委员会编辑了这本书。本书共选编了自1980年至1986年间我国主要省市举办的初中数学竞赛试题及解答五十套。这些试题均系各地数学工作者精心设计拟定的，试题的解答思路明确，方法简捷，论证严谨，因此对于中学数学的教学和

学习很有启发性，对中学生加强基础，开发智力，培养数学能力，开阔数学眼界，很有益处。

为了更好地起到学习辅导作用，本书编辑时注意了以下几点：对于选择题和填空题不仅给出答案，而且都指出思路，做了解答；对原题解法做了必要的加工或给出另外解法，以开拓思路；在有些题解后面，根据需要做了注解，以说明解题的思路和关键，或指出本题的进一步推广，这对于进一步学习和探讨具有一定的启发性。

参加本书编写工作的有黑龙江大学颜秉海、哈尔滨师范大学吕庆祝、黑龙江省教育学院韩殿发、哈尔滨市教育学院王万祥和黑龙江省财贸管理干部学院颜建设。全书由颜秉海和吕庆祝负责审阅，由颜秉海主编。

本书在编辑过程中，得到各地数学会和省市教育学院的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，本书难免有缺点和错误，欢迎广大读者指正。

黑龙江省数学会普及工作委员会主任
黑龙江大学数学系副教授　　颜秉海
1986年9月于哈尔滨

目录

一、1985年省市自治区联合初中数学竞赛试题解

试　　题

（一）选择题（满分30分）

本题共有6个小题，每一小题都给出了以（A）、（B）、（C）、（D）为代号的四个答案，其中只有一个答案是正确的。请将正确的答案用代号填在各小题的方括号内、答对的每小题得5分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 设$ABCD$为圆内接四边形，现在给出四个关系式

（1）$\sin A=\sin C$，　（2）$\sin A+\sin C=0$，

（3）$\cos B+\cos D=0$，　（4）$\cos B=\cos D$.其中总能成立的关系式的个数是

（A）一个，（B）两个，（C）三个，（D）四个.

答（　）（江西提供）

2. 若n是大于1的整数，则

$$P=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$的值

（A）一定是偶数，（B）一定是奇数，

（C）是偶数但不是2，（D）可以是偶数也可以是奇数.

答（　）（湖北提供）

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，P 为 BC 的中点，过 P 作 BD 的平行线交 CD 于 Q，连 PA，PD、QA，QB，则图1—1中与△ABP面积相等的三角形，除△ABP外还有

（A）三个，（B）四个，（C）五六，（D）六个，

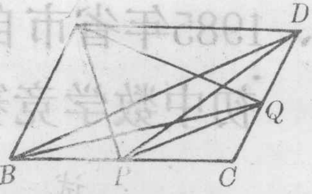

图 1—1

答（　）（湖北提供）

4. 函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象大致形状是（图1－2）

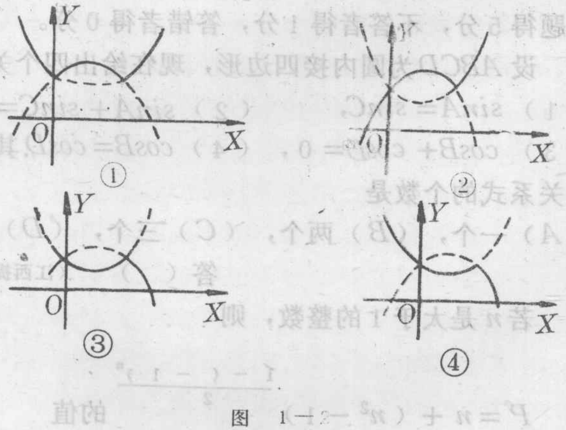

图 1—2

（A）图（1）中的实线部分，（B）图（2）中的实线部分，（C）图（3）中的实线部分，

（D）图（4）中的实线部分。

答（　）（湖北提供）

5. $[x]$ 表示取数 x 的整数部分，例如 $[\frac{15}{4}]=3$，若

$$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right),$$

且当 $x=1, 8, 11, 14$ 时 $y=1$；

$x=2, 5, 12, 15$ 时 $y=2$；

$x=3, 6, 9, 16$ 时 $y=3$；

$x=4, 7, 10, 13$ 时 $y=0$。

则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4}$，(B) $\frac{x+1}{4}$，(C) $\frac{x}{4}$，(D) $\frac{x-1}{4}$。

答（ ）（北京提供）

6. 如图 1－3，在等腰△ ABC 中，CD 是底边 AB 上的高，E 是腰 BC 的中点，AE 交 CD 于 F，现在给出三条路线：

(a) $A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$，

(b) $A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$，

(c) $A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$。

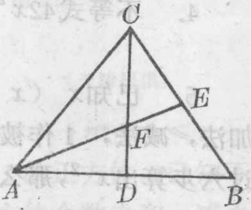

图 1－3

设它们的长度分别是 $L(a)$，$L(b)$，$L(c)$，那么下列三种关系式：

$L(a)<L(b)$，$L(a)<L(c)$，$L(b)<L(c)$ 中，一定能够成立的个数是：

(A) 0个，(B) 1个，(C) 2个，(D) 3个。

答（ ）（河南提供）

（二）填空题（满分30分）

请将正确的结果填入“______”格内，每填对一小题得5分。

1. 设$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为______.

（云南提供）

2. 设方程$x^2-402x+\kappa=0$的一根加3，即为另一根的80倍，那么$\kappa=$______.

（广东提供）

3. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元，若购甲4件，乙10件，丙1件共需4.20元，现在购甲、乙、丙各1件共需———元.

（湖北提供）

4. 不等式$42x^2+ax<a^2$的解为————.

（辽宁提供）

5. 已知x（$x\neq0$，±1）和1两个数，如果只许用加法，减法，1作被除数的除法三种运算（可以使用括号）经过六步算出x^2，那么计算的表达式是————.

（安徽提供）

6. 在正实数集上定义一个运算$*$，其规则为：当$a\geqslant b$时，$a*b=b^a$；当$a<b$时，$a*b=b^2$根据这个规则，方程

$3*x=27$的解是————.

（湖北提供）

（三）（本题满分10分）

如图1－4，O为凸五边形$ABCDE$内一点，且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$，$\angle 7 = \angle 8$，

求证：$\angle 9$与$\angle 10$相等或互补.

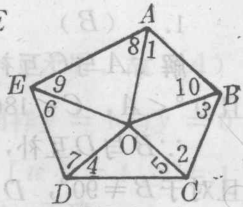

图 1—4

（安徽提供）

（四）（本题满分15分）

如图1－5，$\odot O_1$，$\odot O_2$外切于A，半径分别为r_1和r_2；PB、PC分别为两圆的切线，B，C为切点，$PB : PC = r_1 : r_2$、PA交$\odot O_2$于E点，求证：$\triangle PAB \backsim \triangle PEC$.

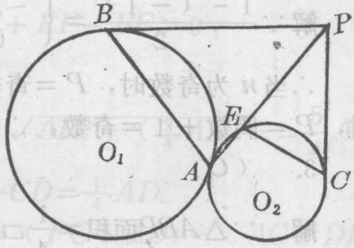

图 1—5

（天津提供）

（五）（本题满分15分）

有一长、宽、高分别为正整数m、n、r（$m \leqslant n \leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体，已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和，减去一面带红色的正方体个数得1985. 求m，n，r的值.

（黑龙江提供）

解　　答

（一）选择题

1. （B）

解∵A与C互补，∴$sinA = sinC$，

且$0° < A$，$C < 180°$，∴$sinA + sinC \neq 0$.

∵B与D互补，∴ $cosB + cosD = 0$.

且对于$B \neq 90°$，$D \neq 90°$，$cosB \neq cosD$.

∴总能成立的关系式只有两个.

2. （B）

解∵$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & n\text{ 为奇数} \\ 0 & n\text{ 为偶数，} \end{cases}$

∴当n为奇数时，P＝奇数＋偶数＝奇数；当n为偶数时，P＝偶数＋1＝奇数，∴P一定是奇数.

3. （C）

解 ∵$\triangle ABP$面积$=\frac{1}{4}\square ABCD$面积.此外还有$\triangle PCD$，$\triangle PBD$，$\triangle QBD$，$\triangle QAD$，$\triangle QBC$五个三角形的面积均等于$\frac{1}{4}\square ABCD$的面积.

4. （C）

解1 当$x-x^2 \geqslant 0$ 即$0 \leqslant x \leqslant 1$时，

$y = 1 - |x-x^2| = 1-(x-x^2) = x^2 - x + 1$

抛物线开口向上；当$x-x^2 < 0$即$x < 0$或$x > 1$时，

$y = 1-|x-x^2| = -x^2 + x + 1$，抛物线开口向下，故图象如图（3）中实线部分.

解2 ∵对任意x，均有$y = 1 - |x-x^2| \leqslant 1$

∴图象应在$y = 1$下方.

因此图（1）、图（2）、图（4）均不正确.

5. （D）

解 当$x = 4$时，如果$u = \frac{x+2}{4}$则$[u] = [\frac{6}{4}] = 1$，

$y=4\left(\frac{4+1}{4}-\left[\frac{4+1}{4}\right]\right)=1$ 与 $y=0$ 矛盾，故（A）不正确. 如果 $u=\frac{x+1}{4}$，则 $[u]=1$，同样 $y=1$ 与 $y=0$ 矛盾，故（B）不正确，同理如 $u=\frac{x}{4}$，$[u]=1$，$y=1$ 与 $y=0$ 矛盾，故（C）不正确. $\therefore$（D）正确.

6. （B）

解 $L(c)-L(a)=(AC+EF)-(EC+FA)=BC-EC+EF-FB=BE+EF-BF>0$，

$\therefore L(c)>L(a)$.

当 $CD=\frac{3}{4}AD$ 时，$AC=\sqrt{AD^2+\left(\frac{3}{4}AD\right)^2}=\frac{5}{4}AD$，$CF=\frac{2}{3}CD=\frac{1}{2}AD$，$DF=\frac{1}{3}CD=\frac{1}{4}AD$.

这时 $L(a)-L(b)=(FC+AD)-(AC+DF)=\left(\frac{1}{2}AD+AD\right)-\left(\frac{5}{4}AD+\frac{1}{4}AD\right)=0$，$\therefore L(a)=L(b)$

说明 $L(a)<L(b)$ 不总成立.

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，则 $AF=CF$，$EF=DF$，$CE=AD$.

这时 $L(b)-L(c)=(CE+DF+FA)-(AD+EF+FC)=0$，$\therefore L(b)=L(c)$.

说明 $L(b)<L(c)$ 不总成立.

$\therefore$ 只有 $L(a)<L(c)$ 一定成立.

（二）填空题

1. $\underline{15}$

解 $\because a-c=(a-b)+(b-c)=4$，

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+4^2\}=15$.

2. $\underline{1985}$

解 设方程的两根为α，β.

$\because \alpha+3=80\beta$，$\alpha+\beta=402$，

$\therefore 81\beta=405$，$\therefore \beta=5$，$\alpha=397$.

$\therefore \kappa=\alpha\beta=397\times 5=1985$.

3. $\underline{1.05}$

解 设甲1件x元，乙1件y元，丙1件z元. 依题意得方程组

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15,\\4x+10y+z=4.20.\end{cases}$$

相减得 $x+3y=1.05$，

代入得 $3.15-9y+7y+z=3.15$.

$\therefore z=2y$，$\therefore x+y+z=x+3y=1.05$.

4. $\underline{-\frac{a}{6}<x<\frac{a}{7}(当a>0)；\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{6}(当a<0)；}$
$\underline{无解(当a=0)}$

解 $42x^2+ax-a^2<0$，

即 $(6x+a)(7x-a)<0$，

$\therefore \left(x+\frac{a}{6}\right)\left(x-\frac{a}{7}\right)<0$.

当$a>0$时 $-\frac{a}{6}<\frac{a}{6}$，不等式的解为

$$-\frac{a}{6}<x<\frac{a}{7}.$$

当$a<0$时，$\frac{a}{7}<-\frac{a}{6}$，不等式的解为

$$\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{6}.$$

当 $a=0$ 时，原不等式化为 $42x^2<0$，

此时无解.

5. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}-x$ 或 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}+x$

解 $x^2=x^2+x-x=x(x+1)-x$

$$=\frac{x(x+1)}{(x+1)-x}-x=\frac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}-x.$$

同理得 $x^2=x^2-x+x=x(x-1)+x$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}+x.$$

6. $3\sqrt{3}$，3

解 根据规则，当 $x\leqslant 3$ 时，原方程化为 $x^3=27$，

$\therefore x=3$.

当 $x>3$ 时，原方程化为 $x^2=27$.

$\therefore x=3\sqrt{3}$.

（三） 证1 由正弦定理及已知条件得

$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}=\frac{OC}{\sin\angle 3}=\frac{OC}{\sin\angle 4}$$

$$=\frac{OD}{\sin\angle 5}=\frac{OD}{\sin\angle 6}=\frac{OE}{\sin\angle 7}=\frac{OE}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9},$$

$\therefore \sin\angle 10=\sin\angle 9$.

故 $\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

证2 由于对定线段的张角为定角的点的轨迹是以定线段为弦的张角等于定角的两个相等的弓形弧，所以由