

现代物理基础丛书

2

物理学家用 微分几何

(第二版)

侯伯元 侯伯宇 著



科学出版社
www.sciencep.com

0186.1
154:2

现代物理基础丛书 2

物理学家用

微分几何

(第二版)

侯伯元 侯伯宇 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是为物理学家写的一本微分几何,是在 1990 年版的基础上,进行修订补充,将原版 14 章扩充到了 23 章。全书分为三部分:第一部分介绍流形微分几何,是理论物理研究生教学的基本内容,介绍了流形、流形上张量场、仿射联络与曲率以及流形上度规、辛、复、自旋等重要几何结构。第二部分介绍纤维丛几何,介绍了示性类与 A-S 指标定理,深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质、各级拓扑障碍、瞬子、单极、分数荷与超对称等现代物理前沿问题。第三部分介绍非交换几何及其在量子物理中的应用、量子群与 q 规范理论。

本书适合物理专业研究生以及从事理论物理的科学工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

物理学家用微分几何/侯伯元,侯伯宇著. —2 版, —北京:科学出版社, 2004

(现代物理基础丛书;2)

ISBN 978-7-03-013432-5

I. 物… II. ①侯…②侯… III. 微分几何 IV. 0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 047883 号

责任编辑:胡 凯 张邦固/责任校对:刘小梅

责任印制:赵德静/封面设计:黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1990 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 8 月第 二 版 印张:49 1/2

2008 年 1 月第五次印刷 字数:923 000

印数:6 701—7 700

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈长虹〉)

《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

邹振隆 宋菲君 张元仲 张守著

张海澜 张焕乔 张维岩 侯建国

侯晓远 夏建白 黄 涛 解思深

前 言

《物理学家用微分几何》出版已过了十多年,这次“新版”是原书的修订补充,将原书 14 章扩充到目前 23 章.全书分三部分:流形微分几何、纤维丛几何、非交换几何.第一部分,流形微分几何,是理论物理研究生教材的基本内容.其中前三章着重介绍流形局域拓扑结构与仿射结构;介绍流形上三种重要的微分算子:外微分、李导数、协变导数,结合各种例子熟悉它们的特性与应用;介绍了关于流形,流形上张量场、微分形式、流形的变换及其可积性,仿射联络与曲率、挠率等基本概念.这三章暂未对流形引入度规.采用摆脱度量限制的可任意进行坐标变换的坐标系,使读者对流形的局域拓扑与仿射结构的实质有更清晰的认识.

第四,五,六三章着重介绍黎曼流形.度规是黎曼流形的基本几何结构.在第四章对流形引入度规,介绍保度规结构的黎曼联络与曲率、及其相关的各种曲率张量、测地线、Jacobi 场与 Jacobi 方程,并初步介绍 Einstein 引力场方程及相关问题.第五章介绍黎曼流形的子流形,用活动标架法对流形曲率张量进行计算与分析.第六章介绍黎曼对称空间,它在理论物理及可积体系中得到广泛的应用.

第七,八,九三章着重介绍对流形的整体拓扑分析:同伦、同调、特别是 de Rham 上同调及调和形式.第九章介绍 Moise 理论、CW 复形与拓扑障碍分析.这章内容常需更多代数拓扑与现代几何基础,读者在第一次读时可暂略去.

第十,十一,十二三章介绍流形上三种重要的几何结构:辛、复、自旋结构.它们的存在受流形拓扑性质约束.它们在现代理论物理中有重要应用,现仍在发展中.

本书第二部分介绍纤维丛几何,规范场论.其中第十三,十四,十五章介绍纤维丛的拓扑结构,丛上联络与曲率,及显示丛整体拓扑非平庸的示性类.在这三章的分析中,底流形是一般微分流形,可暂未引入度规.在第十六,十七章底流形为具有度规结构的时空流形,这时可对纤维丛引入作用量,可分析场方程、守恒流等动力学体系问题.在这两章中分析讨论了瞬子、单极、超对称单极等经典规范场论中一些基本问题.

第十八至二十一章介绍 Atiyah-Singer 指标定理、族指标定理、带边流形及开无限流形的指标定理,并以量子场论反常拓扑分析为例,深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质及各级拓扑障碍的递降继承,分析背景场拓扑性质,分数费米荷及超对称等现代理论物理前沿课题.

本书第三部分:非交换几何导引.非交换几何在量子物理、经典及量子统计、量子引力及弦论等方面得到广泛应用.第二十二章介绍非交换几何在量子物理中应用,重点介绍在量子 Hall 效应的应用.第二十三章介绍量子群与 q 规范理论,它们在量子可积体系中得到广泛应用.这是一个正在发展的领域,这里仅是一初步介绍.

为了便于阅读,在书末为第一部分列有 9 个附录,简单介绍关于拓扑、代数等方面必须掌握的基础知识.书中有部分章节是通常研究生教材未涉及领域,读者在初读时常可略去,仅作为以后科研工作中参考.书末还为第二部分列有四个附录介绍 Clifford 代数,经典李群及 Spin 群的表示,也作为以后深入学习时参考.

关于微分几何的书籍已有很多,例如,书末所列一般参考书目,按作者姓氏编排,以便查询引用.一方面,阅读这些书籍常需较宽的数学基础,对物理学家来说,要想一下掌握似较困难.另一方面,目前所见到有关微分几何书籍最多讲到 A-S 指标定理,对于 A-S 指标定理的推广及其在现代量子场论方面的应用,均很少介绍,有关资料散布在各杂志文献中.本书目的是向物理学工作者介绍现代微分几何的基本概念、方法和结果,以及它们在物理理论中的应用.关于数学术语定义,仅涉及必须的,而未追求全面而包罗万象,并且尽量采用物理学家比较容易接受的直观而又不影响严格性的说法.有些定理的繁琐抽象的证明常代以举例说明,需要深入了解的读者可参阅所引文献及书籍.本书所采用符号尽量与通常的一致,以便参阅其他书籍与文献.希望本书能够向理论物理工作者介绍现代微分几何,使之能应用拓扑与几何方法解决物理学中一些问题.本书对散布在各杂志文献中的资料作了系统整理、分析与介绍.由于作者水平有限,错误与不妥之处难免,欢迎批评指正.

作者

目 录

第一部分 流形微分几何

第一章 流形 微分流形与微分形式	3
§ 1.1 流形 流形的拓扑结构	3
§ 1.2 微分流形 流形的微分结构	8
§ 1.3 切空间与切向量场	15
§ 1.4 余切向量场	20
§ 1.5 张量积与流形上高阶张量场	24
§ 1.6 Cartan 外积与外微分 微分形式	30
§ 1.7 流形的定向 流形上积分与 Stokes 公式	39
习题一	45
第二章 流形的变换及其可积性 李变换群及李群流形	47
§ 2.1 流形间映射及其诱导映射 正则子流形	47
§ 2.2 局域单参数李变换群 李导数	52
§ 2.3 积分子流形 Frobenius 定理	60
§ 2.4 用微分形式表达的 Frobenius 定理 微分方程的可积条件	62
§ 2.5 李群流形	70
§ 2.6 李变换群 齐性 G 流形	72
§ 2.7 不变向量场 李代数 指数映射	76
习题二	82
第三章 仿射联络流形	84
§ 3.1 活动标架法 流形切丛与标架丛	84
§ 3.2 仿射联络与协变微分	87
§ 3.3 曲率形式与曲率张量场	93
§ 3.4 测地线方程 切丛联络的挠率张量	95
§ 3.5 协变外微分算子	99
§ 3.6 联络的和乐群	102
习题三	103

第四章 黎曼流形	105
§ 4.1 黎曼度规与黎曼联络	105
§ 4.2 黎曼流形上微分形式	109
§ 4.3 黎曼曲率张量 Ricci 张量与标曲率	122
§ 4.4 等长变换与共形变换 曲率张量按转动群表示的分解	126
§ 4.5 截面曲率 等曲率空间	131
§ 4.6 爱因斯坦引力场方程	133
§ 4.7 正交标架场与自旋联络 时空规范理论初步	137
§ 4.8 测地线 Jacobi 场与 Jacobi 方程	143
习题四.....	146
第五章 欧空间的黎曼子流形 正交活动标架法	148
§ 5.1 黎曼流形的子流形 诱导度规与诱导联络	148
§ 5.2 n 维欧空间 E^n 的子流形 正交活动标架法	151
§ 5.3 三维欧空间 E^3 中曲线与曲面	154
§ 5.4 用 Cartan 活动标架法计算黎曼曲率	160
§ 5.5 伪球面与 Bäcklund 变换	162
§ 5.6 测地线与局域法坐标系	167
习题五.....	171
第六章 齐性黎曼流形 对称空间	172
§ 6.1 李群的黎曼几何结构	172
§ 6.2 齐性黎曼流形	174
§ 6.3 对称空间与局域对称空间	178
§ 6.4 对称空间的代数结构 (G, H, σ) 三元组 非线性实现	181
§ 6.5 非线性 σ 模型 对偶对称与孤子解	186
§ 6.6 非局域守恒流 隐藏对称性的 Noether 分析	196
习题六.....	198
第七章 流形的同伦群与同调群	199
§ 7.1 同伦映射及具有相同伦型的流形	199
§ 7.2 流形的基本群 多连通空间的覆盖空间	202
§ 7.3 流形的各阶同伦群 $\pi_k(M) (k \in \mathbb{N})$	210
§ 7.4 相对同伦群与群同态正合系列 纤维映射正合系列	215
§ 7.5 同调群 $H_k(M, Z)$	220
§ 7.6 一般同调群 $H_k(M, G)$	227
§ 7.7 同伦群与同调群关系 n 维球面 S^n 的各阶同伦群	231
习题七.....	234

第八章 上同调论 de Rham 上同调论及其他相关伦型不变量	235
§ 8.1 上同调论 对偶同态与对偶链群	235
§ 8.2 链复形与链映射 同调正合系列	239
§ 8.3 相对(上)同调群 切除定理与 Mayer-Vietoris(上)同调序列	242
§ 8.4 若干群流形各阶同调群 Poincaré 多项式	246
§ 8.5 de Rham 上同调论	249
§ 8.6 谐和形式 $\text{Harm}^k(M, R)$	255
§ 8.7 李群流形上双不变形式 对称空间上不变形式	257
习题八	258
第九章 Morse 理论 CW 复形与拓扑障碍分析	259
§ 9.1 CW 复形	259
§ 9.2 Morse 函数与 Morse 不等式	262
§ 9.3 路径空间 $\Omega(M)$ 的伦型 Morse 理论基本定理	266
§ 9.4 若干齐性空间的稳定同伦群 U 群的 Bott 周期	271
§ 9.5 正交群与辛群的 Bott 周期	276
§ 9.6 拓扑障碍与示性类 Stiefel-Whitney 类	281
§ 9.7 Čech(上)同调 拓扑性质对几何结构的影响	286
习题九	292
第十章 辛流形 切触流形	293
§ 10.1 辛流形 (M, ω)	293
§ 10.2 辛向量场与哈密顿向量场 泊松括弧	297
§ 10.3 泊松流形与辛叶 Schouten 括弧	301
§ 10.4 辛流形的子流形	306
§ 10.5 齐性辛流形与约化相空间 动量映射	308
§ 10.6 切触流形 (M, η)	312
习题十	316
第十一章 复流形	318
§ 11.1 复流形及其复结构 近复结构与近复流形 (M, J)	318
§ 11.2 近复结构可积条件 Nijenhuis 张量	324
§ 11.3 近辛流形上近复结构 近厄米流形 (M, ω, J)	329
§ 11.4 厄米流形 (M, H)	332
§ 11.5 厄米流形上仿射联络	338
§ 11.6 Kähler 流形	340
§ 11.7 Kähler-Einstein 特殊 Kähler 流形及紧 Kähler 流形的 Hodge 分解定理	346

习题十一.....	350
第十二章 旋量 自旋流形	352
§ 12.1 旋量.....	352
§ 12.2 时空的 Lorentz 变换与自旋变换 旋量张量代数	355
§ 12.3 Dirac 旋量 Weyl 旋量 纯旋量 各维旋量的矩阵表示结构	361
§ 12.4 各维旋量的表示结构 Majorana 表象	368
§ 12.5 旋量场, 自旋结构与自旋流形 Spin^c 结构.....	371
§ 12.6 自旋结构的联络 Dirac 算子 Weitzenböck 公式	375
习题十二.....	379
第二部分 纤维丛几何、规范场论	
第十三章 纤维丛的拓扑结构	383
§ 13.1 向量丛 $E(M, F, \pi, G)$	383
§ 13.2 与矢丛 E 相关的各种纤维丛 标架丛 $L(E)$	389
§ 13.3 主丛 $P(M, G)$ 与其伴矢丛 $E = P \times_G V$	391
§ 13.4 丛射 诱导丛 主丛的约化.....	395
§ 13.5 纤维丛的同伦分类 普适丛与分类空间.....	400
* § 13.6 矢丛的分类及 K 理论	403
习题十三.....	407
第十四章 纤维丛上联络与曲率	408
§ 14.1 主丛 $P(M, G)$ 上联络与曲率	408
§ 14.2 伴矢丛 $P \times_G V$ 上联络与曲率物质场与规范场相互耦合	415
§ 14.3 k 秩向量丛截面上协变微分算子 ∇ 与联络算子 D	418
§ 14.4 对偶矢丛 直积丛上联络与曲率切丛联络的挠率问题.....	423
§ 14.5 平行输运与联络的和乐群 G 结构 具特殊和乐群的联络	427
习题十四.....	430
第十五章 示性类	431
§ 15.1 陈-Weil 同态	433
§ 15.2 复矢丛与陈示性类(chern class)	437
§ 15.3 实矢丛与 Pontrjagin 类	443
§ 15.4 实偶维定向矢丛与欧拉类.....	446
§ 15.5 Stiefel-Whitney 类	448
§ 15.6 普适丛与普适示性类 $H^*(BG, K)$ 各种示性类间关系	450
§ 15.7 次级示性类: 陈-Simons 形式.....	452
习题十五.....	456

第十六章 杨-Mills 规范理论 时空流形上纤维丛几何	457
§ 16.1 杨-Mills 场的作用量与运动方程	458
§ 16.2 'tHooft 单极 静球对称无奇异单极解析求解	460
§ 16.3 非 Abel 规范场的规范不变守恒流	463
§ 16.4 E^4 空间(反)自对偶瞬子解	470
§ 16.5 规范场与玻色场耦合体系	476
§ 16.6 Seiberg-Witten 单极方程	482
习题十六	485
第十七章 规范理论与复几何	486
§ 17.1 物理时空的复化及共形紧致化	486
§ 17.2 Plucker 映射与 Klein 二次型 紧致复化时空 M 上光锥结构	493
§ 17.3 复流形上全纯丛 结构层与层上同调	496
§ 17.4 Radon-Penrose 变换	500
§ 17.5 多瞬子(instantons)的 ADHM 组成	503
§ 17.6 多单极解 Nahm 方程与 ADHMN 组成	509
§ 17.7 单极周围零能费米子解 Twistor 方程及自对偶超对称单极	511
习题十七	514
第十八章 Atiyah-Singer 指标定理	515
§ 18.1 引言 欧拉数及其有关定理	515
§ 18.2 椭圆微分算子及其解析指数	518
§ 18.3 紧支上同调与矢丛上同调, Thom 同构与欧拉示性类	523
§ 18.4 矢丛 K 理论简介 椭圆微分算子的拓扑指数与 Atiyah-Singer 指标定理	528
§ 18.5 经典椭圆复形及其相应指标定理	536
§ 18.6 A-S 指数定理证明的简单介绍 热方程证明	546
§ 18.7 利用超对称场论模型证明 A-S 指数定理	551
§ 18.8 A-S 指数定理在物理中应用举例	554
习题十八	556
第十九章 量子反常拓扑障碍的递降继承	557
§ 19.1 单态反常与 Atiyah-Singer 指标定理	558
§ 19.2 联络空间同调论与上同调论 推广的陈-Simons 形式系列	564
§ 19.3 规范群 $\mathcal{G}$ 的各级拓扑障碍 Čech-de Rham 双复形	573
§ 19.4 规范群上闭链密度(Ω 系列)与规范代数上闭链密度(ω 系列) 简并上边缘算子 $\bar{\Delta}$	581
§ 19.5 非 Abel 手征反常和反常自洽条件 Wess-Zumino-Witten 有效	

作用量 4 维规范群 $\mathcal{G}^4$ 的 1 上闭链	586
§ 19.6 非 Abel 反常的拓扑根源 协变反常	592
§ 19.7 哈密顿形式 3 维规范群 $\mathcal{G}^3$ 的 2 上闭链 流代数反常 Schwinger-Jackiw-Johnson 项	595
§ 19.8 杂化口袋模型的边界效应 $\mathcal{G}^2$ 的 3 上闭链	600
习题十九	603
第二十章 规范轨道空间上同调与族指标定理 量子场论中大范围拓扑分析	605
§ 20.1 Dirac 算子族指标定理	605
§ 20.2 轨道空间上同调及其提升 规范群上同调	609
§ 20.3 量子规范理论的拓扑效应 θ 真空 4 维杨-Mills 理论	615
§ 20.4 三维时空规范理论与拓扑质量项	619
§ 20.5 群上同调与群表示结构特点 投射表示与 Manderstan 波函数	622
§ 20.6 平移群 3 上闭链的具体实现 可除表示与带膜波函数	626
习题二十	632
第二十一章 带边流形与开无限流形指标定理 APS-η 不变量与分数荷问题	633
§ 21.1 引言	633
§ 21.2 带边 de Rham 复形指标定理	635
§ 21.3 Atiyah-Patodi-Singer 指标定理	636
§ 21.4 自旋复形的 APS 指标定理 非局域边界条件	639
§ 21.5 开无限流形上的指标定理	643
§ 21.6 APS- η 不变量在物理中应用 分数费米荷问题	650
§ 21.7 Dirac 算子的弱局域边界条件	658
习题二十一	663
第三部分 非交换几何导引	
第二十二章 非交换几何及其在量子物理中应用	667
§ 22.1 引言	667
§ 22.2 量子相空间 Weyl 变换及 Wigner 分布函数 Moyal * 积	670
§ 22.3 一维谐振子 量子相空间 $\mathbb{R}_\theta^2$ 的相干态表述 Fock-Bargmann 表象	672
§ 22.4 群的陪集表示与推广的相干态 模糊球 S_θ^2 的矩阵表示	680
§ 22.5 磁场中电子气体 磁平移 磁 Brillouin 区 T_θ^2 IQHE 的拓扑理论	

.....	688
§ 22.6 FQHE 与 Laughlin 波函数 量子 Hall 流体与非交换陈 Simons 理论.....	694
第二十三章 量子群 q 规范理论 q 陈类	704
§ 23.1 量子超面上线性变换 量子群 $GL_q(2)$ 与 $SU_q(2)$	704
§ 23.2 量子群 $SU_q(2)$ 上双协变微分计算	708
§ 23.3 q -BRST 代数 q 规范理论	713
§ 23.4 q 陈类 q 陈-Simons	715
附录	719
A 集合论若干概念简单介绍	719
B 拓扑学若干基本概念介绍	722
C 若干代数体系简单介绍	729
D 群同态正合系列 子群直积与半直积	734
E 交换群(Abelian group)的若干基本性质	736
F 向量空间间同态映射 张量代数	739
G 可除代数 四元数 $\mathbb{H}$ 与八元数 $\mathbb{O}$	744
H Hopf 映射不变量 Hopf 丛	748
I 推广的 Kronecker δ 符号	750
J 具附加结构的向量空间及其自同构变换群 经典李群及其表示	752
K Clifford 代数及其表示	758
L Spin 群及其表示(Spin 模) 李代数 $\mathfrak{spin}_N$	767
M $SO(3)$ 群及其普适覆盖 $SU(2)$	770
一般参考书目	774
参考文献	774

第一部分 流形微分几何

本部分共 12 章,属于理论物理研究生的基本教材.按其特性可分为四单元

A. 流形局域微分拓扑结构与仿射结构

第一章 流形 微分流形与微分形式

第二章 流形的变换及其可积性 李变换群及李群流形

第三章 仿射联络流形

这三章的特点是暂未引入度规结构,采用不受度规约束的,可任意进行局域仿射坐标变换的活动标架,研究流形的不变性质.这三章分别介绍了流形上三种最重要的微分算子:外微分算子 d ,李导数 L_X ,协变微分算子 D .

B. 流形的基本几何结构(一) 黎曼流形与对称空间

第四章 黎曼流形

第五章 欧空间的黎曼子流形 正交活动标架法

第六章 齐性黎曼流形 对称空间

本单元对流形引入度规,使流形具有更丰富的几何结构.利用正交活动标架法分析流形的各种不变量.并于第六章着重分析具有对称变换群的齐性流形与对称空间,它们在理论物理中有广泛应用.

C. 流形整体拓扑结构 同伦、同调、拓扑障碍分析

第七章 流形的同伦群与同调群

第八章 上同调论 de Rham 上同调论 及其他相关伦型不变量

第九章 Morse 理论 CW 复形与拓扑障碍分析

本单元着重介绍通常代数拓扑学内容,介绍它们在微分几何中的应用.前两章从相互对偶的观点分析流形的同伦群及(上)同调群.第九章利用流形上光滑临界点特性分析流形的伦型,分析流形的定向与自旋等结构整体存在的拓扑障碍.这章内容初学者较难掌握,在初次阅读本书时,可暂略过.

D. 流形的基本几何结构(二) 辛结构 复结构 自旋结构

第十章 辛流形 切触流形

第十一章 复流形

第十二章 旋量 自旋流形

流形的度规结构,辛结构,复结构密切相关,常可由其中任两种决定第三种结构.旋量是与它们相关的重要几何结构,并在理论物理中得到广泛应用.

第一章 流形 微分流形与微分形式

在欧氏几何学中,认为两图形相等,是因为可通过欧氏运动(不改变两点间欧氏距离的运动)使两图形完全相重,欧氏运动的集合形成群,欧氏几何学正是研究在欧氏运动下空间图形的不变性质.注意到此点,19世纪末(1871年)Klein对几何学及其分类作如下定义:存在一个集合(称为空间) E 及作用在此集合 E 上的变换群 G ,几何是研究在变换群 G 作用下,空间 E 的不变性质.微分几何是研究微分流形在微分同胚变换下的不变性质.微分流形及其上张量场是微分几何的主要研究对象.

§ 1.1 流形 流形的拓扑结构

物理学中许多问题都要研究连续空间,如运动学和动力学中的普通时空,广义相对论中的弯曲时空,统计物理学中的相空间,规范理论中的内部空间与相应的底空间(普通时空)等,它们的共同特点都是具有确定维数的连续空间,为研究它们,提出流形概念.流形是我们熟悉的点、线、面以及各种高维连续空间概念的推广.可如下定义流形(manifold):

“ n 维流形局域像 $\mathbb{R}^n$ ”,更确切的说,“流形是这样一个 Hausdorff 空间,它的每点有一个含有该点的开集与 $\mathbb{R}^n$ 的开集同胚”.

上面这句话中有几个数学名词($\mathbb{R}^n$,开集,同胚,Hausdorff空间)要简单解释一下:

1) 实 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ 是实数域上 n 维线性空间,它的元素 x 叫做向量或点,可用 n 个实数表示

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

实数 $x^i (i=1, 2, \dots, n)$ 称为向量 x (或称为点 x)的坐标.

在 $\mathbb{R}^n$ 中两任意向量 x, y 间可定义加法,向量相加仍为向量, $x + y = z \in \mathbb{R}^n$,其坐标为对应坐标相加

$$z^i = x^i + y^i$$

这样定义的加法满足 Abel 群的规则,即有零元,有逆元,可结合,可交换.

在实数 $a \in \mathbb{R}$ 与向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 间可定义乘法

$$ax = (ax^1, ax^2, \dots, ax^n) \in \mathbb{R}^n$$

这样定义的乘法满足结合律:

$$a(bx) = (ab)x$$

并在乘法与加法间满足分配律

$$a(x + y) = ax + ay$$

这样就在 $\mathbb{R}^n$ 中定义了向量加法和向量对实数乘法运算,使 $\mathbb{R}^n$ 成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间.类似可定义复数域上的 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$.总之可如下定义 $\mathbb{R}^n$:

定义 1.1 实数域上 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$ 是这样一个空间,其每个元素可用 n 个一定秩序的实数表示,在其元素间定义有加法(满足 Abel 群运算规则),并定义有元素与实数的乘法(满足结合律与分配律).

2) 开集(open set)与连续映射(continuous mapping)

为了分析空间及其映射的连续性,一般常利用距离函数(度规)来定义.但是我们知道,连续性仅与邻近性有关,改变距离函数的定义(改变空间的度规)不会改变连续性,不会改变无穷点列的极限点等问题,故我们常需摆脱距离函数而研究比度规空间更抽象的拓扑空间,只注意点的邻近性而不注意其距离,可引进开集概念.开集是描述空间拓扑性质的基本概念,其严格表述可参看附录 B,这里我们给开集一个较直观的通常拓扑(usual topology)定义,它是在微分几何中所适用的定义.

定义 1.2 开集 A 是空间 S 的子集合, A 中每点的“邻域”完全在 A 中.

这里“邻域”可用任意距离函数来定义,而上述开集定义应与所选距离函数无关.

例如,实数轴 $\mathbb{R}^1$ (一维线性空间 $\mathbb{R}^1$) 上不含端点的开区间 (a, b) 是开集,但是含有端点的闭区间 $[a, b]$ 不是开集,因为其端点 a, b 的“邻域”并未完全属于此区间 $[a, b]$.

在定义 1.2 中的某点“邻域”是指距该点距离小于某给定实数的点的集合,在定义“邻域”时,需借助距离函数,但是我们强调此“邻域”可用任意距离函数来定义,与所选距离函数无关.例如,对 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点 x 和 y ,可采用下列两种距离函数:

$$d_1(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x, y) = \max |x^i - y^i|$$

利用 d_1 定义的“邻域”为圆盘,利用 d_2 定义的“邻域”为正方体,不同距离函数定义的“邻域”形状不同.但是由于任意圆盘内有正方体,任意正方体内有圆盘,故若利用距离函数 d_1 得到 A 为开集,则相对于距离函数 d_2 , A 仍为开集.这样定义的开集与“邻域”形状无关,与所选距离函数无关.