现代物理基础丛书 2

物理学家用微分几何

（第二版）

侯伯元 侯伯宇 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代物理基础丛书　2

物理学家用

微分几何

（第二版）

侯伯元　侯伯宇　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为物理学家写的一本微分几何，是在1990年版的基础上，进行修订补充，将原版14章扩充到了23章。全书分为三部分：第一部分介绍流形微分几何，是理论物理研究生教学的基本内容，介绍了流形、流形上张量场、仿射联络与曲率以及流形上度规、辛、复、自旋等重要几何结构。第二部分介绍纤维丛几何，介绍了示性类与A-S指标定理，深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质、各级拓扑障碍、瞬子、单极、分数荷与超对称等现代物理前沿问题。第三部分介绍非交换几何及其在量子物理中的应用、量子群与 q 规范理论。

本书适合物理学专业研究生以及从事理论物理的科学工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

物理学家用微分几何/侯伯元，侯伯宇著. —2版，—北京：科学出版社，2004

（现代物理基础丛书；2）

ISBN 978-7-03-013432-5

Ⅰ. 物… Ⅱ. ①侯…②侯… Ⅲ. 微分几何 Ⅳ. 0186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第047883号

责任编辑：胡 凯 张邦固/责任校对：刘小梅

责任印制：赵德静/封面设计：黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1990年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年8月第 二 版 印张：49 1/2

2008年1月第五次印刷 字数：923 000

印数：6 701—7 700

定价：98.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉）

《现代物理基础丛书》编委会

前　言

《物理学家用微分几何》出版已过了十多年，这次“新版”是原书的修订补充，将原书 14 章扩充到目前 23 章．全书分三部分：流形微分几何、纤维丛几何、非交换几何．第一部分，流形微分几何，是理论物理研究生教材的基本内容．其中前三章着重介绍流形局域拓扑结构与仿射结构；介绍流形上三种重要的微分算子：外微分、李导数、协变导数，结合各种例子熟悉它们的特性与应用；介绍了关于流形，流形上张量场、微分形式、流形的变换及其可积性，仿射联络与曲率、挠率等基本概念．这三章暂未对流形引入度规．采用摆脱度量限制的可任意进行坐标变换的坐标系，使读者对流形的局域拓扑与仿射结构的实质有更清晰的认识．

第四，五，六三章着重介绍黎曼流形．度规是黎曼流形的基本几何结构．在第四章对流形引入度规，介绍保度规结构的黎曼联络与曲率、及其相关的各种曲率张量、测地线、Jacobi 场与 Jacobi 方程，并初步介绍 Einstein 引力场方程及相关问题．第五章介绍黎曼流形的子流形，用活动标架法对流形曲率张量进行计算与分析．第六章介绍黎曼对称空间，它在理论物理及可积体系中得到广泛的应用．

第七，八，九三章着重介绍对流形的整体拓扑分析：同伦、同调、特别是 de Rham 上同调及谐和形式．第九章介绍 Moise 理论、CW 复形与拓扑障碍分析．这章内容常需更多代数拓扑与现代几何基础，读者在第一次读时可暂略去．

第十，十一，十二三章介绍流形上三种重要的几何结构：辛、复、自旋结构．它们的存在受流形拓扑性质约束．它们在现代理论物理中有重要应用，现仍在发展中．

本书第二部分介绍纤维丛几何，规范场论．其中第十三，十四，十五章介绍纤维丛的拓扑结构，丛上联络与曲率，及显示丛整体拓扑非平庸的示性类．在这三章的分析中，底流形是一般微分流形，可暂未引入度规．在第十六，十七章底流形为具有度规结构的时空流形，这时可对纤维丛引入作用量，可分析场方程、守恒流等动力学体系问题．在这两章中分析讨论了瞬子、单极、超对称单极等经典规范场论中一些基本问题．

第十八至二十一章介绍 Atiyah-Singer 指标定理、族指标定理、带边流形及开无限流形的指标定理，并以量子场论反常拓扑分析为例，深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质及各级拓扑障碍的递降继承，分析背景场拓扑性质，分数费米荷及超对称等现代理论物理前沿课题．

本书第三部分:非交换几何导引.非交换几何在量子物理、经典及量子统计、量子引力及弦论等方面得到广泛应用.第二十二章介绍非交换几何在量子物理中应用,重点介绍在量子 Hall 效应的应用.第二十三章介绍量子群与 q 规范理论,它们在量子可积体系中得到广泛应用.这是一个正在发展的领域,这里仅是一初步介绍.

为了便于阅读,在书末为第一部分列有 9 个附录,简单介绍关于拓扑、代数等方面必须掌握的基础知识.书中有部分章节是通常研究生教材未涉及领域,读者在初读时常可略去,仅作为以后科研工作中参考.书末还为第二部分列有四个附录介绍 Clifford 代数,经典李群及 Spin 群的表示,也作为以后深入学习时参考.

关于微分几何的书籍已有很多,例如,书末所列一般参考书目,按作者姓氏编排,以便查询引用.一方面,阅读这些书籍常需较宽的数学基础,对物理学家来说,要想一下掌握似较困难.另一方面,目前所见到有关微分几何书籍最多讲到 A-S 指标定理,对于 A-S 指标定理的推广及其在现代量子场论方面的应用,均很少介绍,有关资料散布在各杂志文献中.本书目的是向物理学工作者介绍现代微分几何的基本概念、方法和结果,以及它们在物理理论中的应用.关于数学术语定义,仅涉及必须的,而未追求全面而包罗万象,并且尽量采用物理学家比较容易接受的直观而又不影响严格性的说法.有些定理的繁琐抽象的证明常代以举例说明,需要深入了解的读者可参阅所引文献及书籍.本书所采用符号尽量与通常的一致,以便参阅其他书籍与文献.希望本书能够向理论物理工作者介绍现代微分几何,使之能应用拓扑与几何方法解决物理学中一些问题.本书对散布在各杂志文献中的资料作了系统整理、分析与介绍.由于作者水平有限,错误与不妥之处难免,欢迎批评指正.

作者

目　录

第一部分　流形微分几何

第二部分　纤维丛几何、规范场论

第一部分　流形微分几何

本部分共 12 章,属于理论物理研究生的基本教材.按其特性可分为四单元

A. 流形局域微分拓扑结构与仿射结构

第一章　流形　微分流形与微分形式

第二章　流形的变换及其可积性　李变换群及李群流形

第三章　仿射联络流形

这三章的特点是暂未引入度规结构,采用不受度规约束的,可任意进行局域仿射坐标变换的活动标架,研究流形的不变性质.这三章分别介绍了流形上三种最重要的微分算子:外微分算子 d,李导数 L_X,协变微分算子 D.

B. 流形的基本几何结构(一)　黎曼流形与对称空间

第四章　黎曼流形

第五章　欧空间的黎曼子流形　正交活动标架法

第六章　齐性黎曼流形　对称空间

本单元对流形引入度规,使流形具有更丰富的几何结构.利用正交活动标架法分析流形的各种不变量.并于第六章着重分析具有对称变换群的齐性流形与对称空间,它们在理论物理中有广泛应用.

C. 流形整体拓扑结构　同伦、同调、拓扑障碍分析

第七章　流形的同伦群与同调群

第八章　上同调论　de Rham 上同调论　及其他相关伦型不变量

第九章　Morse 理论　CW 复形与拓扑障碍分析

本单元着重介绍通常代数拓扑学内容,介绍它们在微分几何中的应用.前两章从相互对偶的观点分析流形的同伦群及(上)同调群.第九章利用流形上光滑临界点特性分析流形的伦型,分析流形的定向与自旋等结构整体存在的拓扑障碍.这章内容初学者较难掌握,在初次阅读本书时,可暂略过.

D. 流形的基本几何结构(二)　辛结构　复结构　自旋结构

第十章　辛流形　切触流形

第十一章　复流形

第十二章　旋量　自旋流形

流形的度规结构,辛结构,复结构密切相关,常可由其中任两种决定第三种结构.旋量是与它们相关的重要几何结构,并在理论物理中得到广泛应用.

第一章　流形　微分流形与微分形式

在欧氏几何学中,认为两图形相等,是因为可通过欧氏运动(不改变两点间欧氏距离的运动)使两图形完全相重,欧氏运动的集合形成群,欧氏几何学正是研究在欧氏运动下空间图形的不变性质.注意到此点,19 世纪末(1871 年)Klein 对几何学及其分类作如下定义:存在一个集合(称为空间)E 及作用在此集合 E 上的变换群 G,几何是研究在变换群 G 作用下,空间 E 的不变性质.微分几何是研究微分流形在微分同胚变换下的不变性质.微分流形及其上张量场是微分几何的主要研究对象.

§1.1　流形　流形的拓扑结构

物理学中许多问题都要研究连续空间,如运动学和动力学中的普通时空,广义相对论中的弯曲时空,统计物理学中的相空间,规范理论中的内部空间与相应的底空间(普通时空)等,它们的共同特点都是具有确定维数的连续空间,为研究它们,提出流形概念.流形是我们熟悉的点、线、面以及各种高维连续空间概念的推广.可如下定义流形(manifold):

"n 维流形局域像$\mathbb{R}^n$",更确切的说,"流形是这样一个 Hausdorff 空间,它的每点有一个含有该点的开集与$\mathbb{R}^n$ 的开集同胚".

上面这句话中有几个数学名词($\mathbb{R}^n$,开集,同胚,Hausdorff 空间)要简单解释一下:

1) 实 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ 是实数域上 n 维线性空间,它的元素 x 叫做向量或点,可用 n 个实数表示

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

实数 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$称为向量 x(或称为点 x)的坐标.

在$\mathbb{R}^n$ 中两任意向量 x,y 间可定义加法,向量相加仍为向量,$x+y=z\in\mathbb{R}^n$,其坐标为对应坐标相加

$$z^i = x^i + y^i$$

这样定义的加法满足 Abel 群的规则,即有零元,有逆元,可结合,可交换.

在实数 $a\in\mathbb{R}$ 与向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 间可定义乘法

$$ax = (ax^1, ax^2, \cdots, ax^n) \in \mathbb{R}^n$$

这样定义的乘法满足结合律：

$$a(bx) = (ab)x$$

并在乘法与加法间满足分配律

$$a(x+y) = ax + ay$$

这样就在$\mathbb{R}^n$ 中定义了向量加法和向量对实数乘法运算，使$\mathbb{R}^n$ 成为实数域$\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间.类似可定义复数域上的 n 维向量空间$\mathbb{C}^n$.总之可如下定义$\mathbb{R}^n$：

定义 1.1　实数域上 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$ 是这样一个空间，其每个元素可用 n 个一定秩序的实数表示，在其元素间定义有加法(满足 Abel 群运算规则)，并定义有元素与实数的乘法(满足结合律与分配律).

2) 开集(open set)与连续映射(continuous mapping)

为了分析空间及其映射的连续性，一般常利用距离函数(度规)来定义.但是我们知道，连续性仅与邻近性有关，改变距离函数的定义(改变空间的度规)不会改变连续性，不会改变无穷点列的极限点等问题，故我们常需摆脱距离函数而研究比度规空间更抽象的拓扑空间，只注意点的邻近性而不注意其距离，可引进开集概念.开集是描述空间拓扑性质的基本概念，其严格表述可参看附录 B，这里我们给开集一个较直观的通常拓扑(usual topology)定义，它是在微分几何中所适用的定义.

定义 1.2　开集 A 是空间 S 的子集合，A 中每点的"邻域"完全在 A 中.

这里"邻域"可用任意距离函数来定义，而上述开集定义应与所选距离函数无关.

例如，实数轴$\mathbb{R}^1$(一维线性空间$\mathbb{R}^1$)上不含端点的开区间(a,b)是开集，但是含有端点的闭区间$[a,b]$不是开集，因为其端点 a,b 的"邻域"并未完全属于此区间$[a,b]$.

在定义 1.2 中的某点"邻域"是指距该点距离小于某给定实数的点的集合，在定义"邻域"时，需借助距离函数，但是我们强调此"邻域"可用任意距离函数来定义，与所选距离函数无关.例如，对$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 x 和 y，可采用下列两种距离函数：

$$d_1(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y) = \max|x^i - y^i|$$

利用 d_1 定义的"邻域"为圆盘，利用 d_2 定义的"邻域"为正方体，不同距离函数定义的"邻域"形状不同.但是由于任意圆盘内有正方体，任意正方体内有圆盘，故若利用距离函数 d_1 得到 A 为开集，则相对于距离函数 d_2，A 仍为开集.这样定义的开集与"邻域"形状无关，与所选距离函数无关.