XIANXING DAISHU

线性代数

（工程数学）

龙幼娟 李茂生 编

@

0011010100110011101010100100

*.com

北京邮电大学出版社

线性代数

（工程数学）

龙幼娟　李茂生　编

北京邮电大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/龙幼娟,李茂生编 .—北京:北京邮电大学出版社,2000.7

ISBN 7-5635-0201-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①龙…②李… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34792 号

书　　名:线性代数
作　　者:龙幼娟　李茂生
责任编辑:马相平
出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)邮编:100876
　　　　　电话:(010)62282185　62283578(传真)
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京通州皇家印刷厂
开　　本:850 mm×1 168 mm
印　　张:9.25
字　　数:216 千字
印　　数:20031–23030 册
版　　次:2000 年 7 月第 1 版　2006 年 2 月第 7 次印刷

ISBN 7-5635-0201-7/O·10　　定价:14.00 元

前　言

本书是根据邮电高等函授《工程数学》教学大纲对《线性代数》的要求，结合函授教学实践编写的适合学生自学的《线性代数》教学用书，也可作为电大、函大、夜大工科学生的《线性代数》教材或参考用书。

为了突出便于自学的特点，我们在编写中力求做到：

1. 文字简洁流畅，重点突出，对难点分层次讲深讲透。对某些较难的定理证明或例题(用 * 号表示)可作为选学内容。

2. 对典型例题，都在解题前作了思路分析，以利读者举一反三。

3. 每节后都配有一定数量的思考题和习题，要求读者认真、独立完成，以加强对基本概念的理解和进行必要的基本训练。

4. 每章后都有较详尽的内容小结，并配有一定数量的复习题，以帮助读者对本章所学内容总结、提高并融会贯通。

5. 本书中有“*”号的章节和习题，专科生可选学，有“* *”号的第六章本科生可选学。

本书由北京轻工业学院闵泰山教授主审，由北京邮电大学函授学院龙幼娟副教授主编并编写了第一、二、三、六章，李茂生副教授编写了第四、五章。在编写过程中，北京邮电大学函授学院的陈启浩教授和彭绍明副教授审阅了全部和部分书稿，并提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

本书此次是在使用近 10 年后修改出版，欢迎使用本书的教师

和学生提出宝贵意见,不胜感谢。

编 者

2000.3

目　　录

第一章　n 阶行列式

§1　n 阶行列式的定义 …… 1

§2　行列式的性质与计算 …… 7

§3　行列式按一行(列)展开 …… 17

§4　克莱姆法则 …… 30

§5　数域简介 …… 35

小　结 …… 36

复习题一 …… 37

第二章　矩　阵

§1　矩阵的定义和运算 …… 41

§2　逆矩阵及其求法 …… 53

§3　分块矩阵 …… 61

§4　矩阵的初等变换 …… 66

§5　矩阵的秩 …… 78

§6　对称矩阵和正交矩阵 …… 85

小　结 …… 90

复习题二 …… 92

第三章　线性方程组

* §1　n 维向量和向量组的线性相关性 …… 95

* §2　向量组的秩 …… 108

§3　线性方程组解的判定 …… 120

* §4　线性方程组解的结构 …… 132

小 结 …………………………………………………… 143
复习题三…………………………………………………… 146
* 第四章 化 n 阶矩阵为相似对角形矩阵
§1 相似矩阵 …………………………………………… 149
§2 特征值与特征向量 …………………………………… 154
§3 n 阶矩阵化为对角形矩阵的条件 ………………… 163
§4 化实对称矩阵为对角形矩阵 ……………………… 176
小 结 …………………………………………………… 189
复习题四…………………………………………………… 191
* 第五章 二次型
§1 二次型及其矩阵表示 ………………………………… 195
§2 化二次型为标准形 …………………………………… 200
§3 二次型的规范型 ……………………………………… 210
§4 实二次型的分类 ……………………………………… 218
小 结 …………………………………………………… 228
复习题五…………………………………………………… 230
** 第六章 线性空间与线性变换
§1 线性空间的定义和性质 ……………………………… 233
§2 基变换与坐标变换 …………………………………… 240
§3 线性变换及其矩阵表示式 …………………………… 250
小 结 …………………………………………………… 264
习题答案…………………………………………………… 267

第一章 n 阶行列式

在初等数学中，我们曾经讨论过二、三阶行列式以及利用二、三阶行列式解线性方程组。但是，由许多实际问题建立的方程组，未知数的个数常常超过 3 个，因此有必要在二、三阶行列式的基础上建立 n 阶行列式的概念。它不仅是解线性方程组的重要工具，而且在线性代数的矩阵理论、二次型的讨论等方面都有较多地应用。本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及利用 n 阶行列式解线性方程组。

§1 n 阶行列式的定义

我们已经知道，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

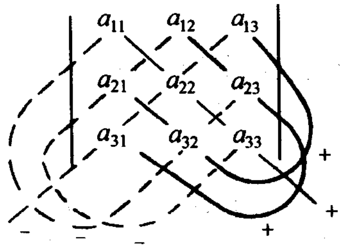
当它的系数构成的三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}。$$

其中 D_1,D_2,D_3 分别表示 D 中第 1,2,3 列元素用相应的常数项代替后的行列式。三阶行列式 D 可用如下对角线法则得到：

$D=$ 

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。$$

如果把 D 中位于第 i 行，第 j 列的元素记作 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$，则上式可简记为

$$D=\sum(\pm 1)a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中称 $a_{ip_i}(i=1,2,3)$ 的第一个下标为行标，第二个下标为列标，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的行标排列为 123，列标排列为 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的某种排列。由于 D 中六项的列标排列正好是 1,2,3 的所有不同排列，所以，上式右边的 $\sum$ 表示对以 $p_1p_2p_3$ 的所有不同排列为列标的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 求代数和，显然，这个代数和共 $3!=6$ 项。

用以上记法也可表示二阶行列式。仿此，可对任意正整数 $n(\geqslant 2)$，定义 n 阶行列式。

【定义 1.1】 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列如下：

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

今在每一行中选出一个数，且要求选出的这 n 个数都位于不同的

列，然后作这 n 个数的乘积，并按一定的规则乘以 ±1，对所有这样得到的乘积求代数和，这个代数和称为按上述次序排成 n 行 n 列的 n^2 个数对应的行列式，称为 n 阶行列式，并记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(\pm 1)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

n 阶行列式中位于第 i 行第 j 列的数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为它的元素，其右边的一项(不含符号) $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是由第 1 行第 p_1 列的元素 a_{1p_1}，第二行第 p_2 列的元素 a_{2p_2}，……第 n 行第 p_n 列的元素 a_{np_n} 所得到的乘积，由于要求这 n 个元素在每一列中也恰有一个，这样，$p_1p_2\cdots p_n$ 就是 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有不同排列为列标的项求和，即等式右边的代数和共有 $n!$ 项。

现在来确定每一项前的正负号。

首先介绍排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数的意义。在排列中，一个数 p 的左边比 p 大的数的个数称为 p 的逆序数，排列中所有数的逆序数的和称为该排列的逆序数。例如，5 元排列 32514，3，5 的逆序数分别为 0(3，5 的左边都没有比它们大的数)，2，4 的逆序数分别为 1(2，4 的左边分别有比它大的数 3，5)，1 的逆序数为 3(1 的左边有数 3，2，5)，故排列 32514 的逆序数可记作

$$t=1+1+3=5$$

现在规定，在定义 1.1 中，若项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为偶数，则此项前取正号，若排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为奇数，则此项前取负号。若设 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 t，则 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 前的符号可记作 $(-1)^t$，n 阶行列式可记为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

当 $n=1$ 时,记 $|a_{11}|=a_{11}$,不要与绝对值符号混淆。

用以上定义的二、三阶行列式,与用对角线法则定义的显然是一致的。但是,其对角线法则不适用于三阶以上的行列式。如四阶行列式按定义 1.1 应由 $4!=24$ 项的代数和组成,而用对角线法则仅能得到其中 8 项。显然,用定义直接计算较高阶的行列式是十分困难的。我们将继续探讨新的计算方法。现利用定义来计算一些特殊的 n 阶行列式。

例 1 计算下列 n 阶行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$

其中 D_1,D_2 中未写出的元素都为零,并称以上行列式为对角行列式。

解 (1) 由行列式定义知,D_1 应等于 $n!$ 项的代数和,但由于 D_1 中除主对角线(左上角至右下角的对角线)外,其余元素都为零,故只需找出 $n!$ 项中不为零的项求代数和。D_1 中不为零的元素恰为 n 个,且它们都在不同行,不同列,故 D_1 中不为零的项仅一项,即

$$D_1=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，显然，其列标排列 $12\cdots n$（称其为自然排列）的逆序数 $t=0$，所以

$$D_1=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) D_2 与 D_1 类似，即

$$D_2=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，其列标排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数 $t=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 2 计算行列式：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 D_3,D_4 中未写出的元素全为零。

解 由于 $D_3=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 D_3 对一切 $p_i<i(i=1,2,\cdots,n)$ 有 $a_{ip_i}=0$，故 D_3 中不为零的项只能是满足 $p_i\geqslant i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $p_1\geqslant 1,p_2\geqslant 2,\cdots,p_n\geqslant n$ 的那些元素的乘积，而 $p_1p_2\cdots p_n$ 的各种可能排列中，同时满足上述关系的只有 $p_1=1,p_2=2,\cdots,p_n=n$，因此

$$\begin{aligned} D_3&=(-1)^0a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\\ &=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\end{aligned}$$

同理可推出

$$D_4 = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

分别称 D_3, D_4 为上、下三角行列式。

思考题

1. 什么叫一个排列的逆序数？

2. n 阶行列式表示一个什么样的代数和？其中每一项所带的符号如何确定？

习题 1.1

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4132　　(2) 53142

(3) 542613　　(4) 135792468

2. 试判定五阶行列式中下列各项所带的正负号：

(1) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$　　(2) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$

(3) $a_{11}a_{25}a_{34}a_{42}a_{53}$　　(4) $a_{41}a_{32}a_{53}a_{14}a_{25}$

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}$$

§2 行列式的性质与计算

本节将介绍行列式的性质,它不仅可以简化计算,而且对深入研究行列式也有重要作用。为了证明这些性质,先介绍两个定理。

*【**定理 2.1**】 一个排列中任意两个数对换,它的逆序数改变奇偶性。

* **证明** (i) 先证相邻两数对换的情形

设排列为 $PabQ$,其中 P 表示 a 前的 p 个数,Q 表示 b 后的 q 个数,将相邻两数 a,b 对换,则排列成 $PbaQ$。显然,P,Q 中各数位置不变,对换后,a,b 与 P,Q 间的逆序数不变,但排列 ab,若 $a<b$,对换后逆序数增加 1,若 $a>b$,对换后逆序数减少 1,所以,对换 a,b 要改变排列 $PabQ$ 的逆序数的奇偶性。

(ii) 再证一般情形

设排列为 $PaQbR$,其中 P 的意义同上,Q 表示 a,b 间的 q 个数,R 表示 b 后的 r 个数,若把 $PaQbR$ 对换成 $PQabR$,则要将 a 向右作 q 次相邻对换,若再把 $PQabR$ 对换成 $PbQaR$,则要将 b 向左作 $q+1$ 次相邻对换,前后共作了 $2q+1$ 次对换,故对换 a,b 改变了排列逆序数的奇偶性。

*【**定理 2.2**】 n 阶行列式的项也可写成

$$(-1)^{S+T}a_{q_1q_1'}\ a_{q_2q_2'}\ \cdots a_{q_nq_n'}$$

其中 S 是行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数,T 是列标排列 $q_1'q_2'\cdots q_n'$

的逆序数。

证明 设 n 阶行列式中项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的任意两元素对换，则其行标与列标排列同时改变，记

$$12\cdots n \to q_1 q_2 \cdots q_n$$

$$p_1 p_2 \cdots p_n \to q'_1 q'_2 \cdots q'_n$$

显然，行标排列的逆序数 S 由偶变为奇（因为排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0），列标排列的逆序数 T 或由偶变为奇，或由奇变为偶，但逆序数 $S+T$ 与 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 t 的奇偶性相同，由

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{q_1q'_1}\ a_{q_2q'_2}\ \cdots a_{q_nq'_n}$$

知
$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{S+T} a_{q_1q'_1}a_{q_2q'_2}\ \cdots a_{q_nq'_n}$$

例如，五阶行列式中项

$$(-1)^7 a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$$

将其第 2,4 两个元素对换后，此项又可表示为

$$(-1)^{3+4} a_{13}a_{41}a_{34}a_{25}a_{52}$$

其中 $S=3, T=4$ 分别表示 $a_{13}a_{41}a_{34}a_{25}a_{52}$ 的行、列标排列的逆序数。

如果将 n 阶行列式中项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 经过适当的数次对换，将其列标排列对换成 $12\cdots n$，其相应的行标排列设为 $p'_1p'_2\cdots p'_n$，并记它的逆序数为 s，则 n 阶行列式又可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^s a_{p'_1 1}a_{p'_2 2}\cdots a_{p'_n n}$$

其中 $\sum$ 仍对 $1,2,\cdots,n$ 的所有不同排列为行标的项求和。

下面讨论 n 阶行列式的性质。

设 n 阶行阶式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若将 D 的行、列依次互换，可得另一个行列式。记作

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D' 为 D 的转置行列式。

【性质 1】 行列式 D 与它的转置行列式 D' 相等。

* **证明** 设

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}, i, j=1,2,\cdots,n$。

由定义 1.1 可知

$$\begin{aligned} D' &= \sum(-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \end{aligned}$$

（t 为 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数）

又由定理 2.2 知

$$\sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D$$

所以 $$D = D'$$

性质 1 说明，行列式中行与列具有同等的地位。即行列式凡是对行成立的性质对列也同样成立，反之亦然。

【性质 2】 互换行列式的两行(或列),行列式变号。即

$$D_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array} = -D$$

互换行列式的第 i,j 行(列)可记成 $r_i \rightleftharpoons r_j$(或 $c_i \rightleftharpoons c_j$),所以性质 2 可简记为 $D_1 \xlongequal[\text{或 } c_i \rightleftharpoons c_j]{r_i \rightleftharpoons r_j} -D$。

* **证明** 设 D 中的一项为

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 t 为 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数,D_1 中与 D 中此项列标相同的相应项应为

$$(-1)^{S+t} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 S 是 $1 \cdots j \cdots i \cdots n$ 的逆序数,t 仍为 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数。显然,排列 $1 \cdots j \cdots i \cdots n$ 是由 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 对换 i,j 而成,由定理 2.1 可知,它的逆序数 S 应为奇数,也就是 $(-1)^{S+t} = -(-1)^t$,所以,D_1 中与 D 中的相应项绝对值相等、符号相反,即