經濟數學導引(Ⅱ)(線性代數)

經濟數學導引(II)

(線性代數)

一九七九年五月十一日

經濟數學導引(II)

(線性代數)

目　錄

1-7-60

1.線性空間

1.1 羣

定義 1：A爲一集合，$*$爲A之運算，把元素$\boldsymbol{a}\in A$及$\boldsymbol{b}\in A$ 對應至$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}\in A$；若下列公理成立，則此附有運算$*$之集$A$稱爲群：

1. $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})$　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in A$（結合律）。
2. 有一中性元素$\boldsymbol{n}\in A$，對所有$\boldsymbol{a}\in A$滿足$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$。
3. 對任$\boldsymbol{a}\in A$有一逆元素$\overline{\boldsymbol{a}}\in A$，使得$\boldsymbol{a}*\overline{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}*\overline{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{n}$。

若尙對所有$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in A$，

4. $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}$（交換律），

則稱此群爲交換群。

我們可證明，一個群只有一個單位元素且對每個元素只有一個逆元素存在。

定義 2：若一交換群A之運算稱爲“加法”且以十符號記之，則A稱爲加法群。此時以0表示單位元素，以$-\boldsymbol{a}$表$\boldsymbol{a}$之逆元素，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$稱爲$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$之和，$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$稱爲$\boldsymbol{b}$與$\boldsymbol{a}$之差，且可寫成$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

1.2 向量空間

設R表所有實數集。

定義 1：向量空間（線性空間）爲一加法群A，除加法外還有一“數積”運算，把任兩元素$\lambda\in R$及$\boldsymbol{a}\in A$對應至$\lambda\boldsymbol{a}\in A$，且下公理成立：

5. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$　$\lambda,\mu\in R$及$\boldsymbol{a}\in A$（結合律）。

6a. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　$\lambda,\mu\in R$及$\boldsymbol{a}\in A$。

6b. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　$\lambda\in R$及$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A$（分配律）。

7. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$　$\boldsymbol{a}\in A$。

A之元素稱爲向量，R之元素稱爲數，A之單位元素稱爲零向量。向量在下面是以粗體小寫拉丁字母表示。

定理 1：$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$之充要條件爲$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

證：由第一分配律，公理 6a，以$\mu=0$得

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}\text{。}$$

加上向量$-\lambda\boldsymbol{a}$，得

$$(1)\qquad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\text{。}$$

由第二分配律 6b，以$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$得

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{0}\text{。}$$

且同樣由加上$-\lambda\boldsymbol{a}$得

$$(2)\qquad \boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}\text{。}$$

由(1)及(2)等式得，若$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$則$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

其並由公理 5. 及 7. 得之：

$$\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)\boldsymbol{a}=\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{a})=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\text{ ，}\lambda\neq0\text{。}$$

定理 2：$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-\lambda\boldsymbol{a}$及$\lambda(-\boldsymbol{a})=-\lambda\boldsymbol{a}$。

證：以$\mu=-\lambda$代入第一分配律，得

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\text{,}$$

於是

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-\lambda\boldsymbol{a}\text{,}$$

此爲第一部分。第二命題類似可證，以$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$代入第二分配律 6b. 即得$\lambda(-\boldsymbol{a})=-\lambda\boldsymbol{a}$。 □

此兩分配律對有限多個項亦成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{a}$$

及

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda \boldsymbol{a}_i ,$$

此可由歸納法得證。

例：設R^2為所有有序實數對所成之集合，

$$R^2 = \{ \boldsymbol{a} / \boldsymbol{a} = (a_1, a_2), a_1 \in R \text{及} a_2 \in R \} .$$

對加法

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

及數值

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda (a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2),$$

$\boldsymbol{R}^2$顯然構成一向量空間。（0,0）為零向量且$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$之逆元素為$-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2)$。

此向量空間可如下次幾何方法表示，我們設想在平面上有一起點x（圖1）。

平面上其他每一點a可對應到從x到a之有向線段，且記之為關於x之位置向量$\boldsymbol{a}$。設$\boldsymbol{b}$為另一位置向量，於是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$由平行四邊形法定義，且同時可知（圖1），此求和為可換的。

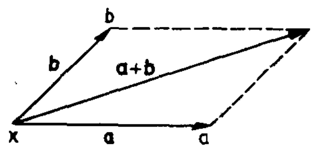

圖1.

若重覆加向量$\boldsymbol{a}$ λ次，就得到此向量的λ倍，且$\lambda \boldsymbol{a}$。對$\lambda > 0$，$\lambda \boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{a}$同向，對$\lambda < 0$，則與$\boldsymbol{a}$反向，對$\lambda = 0$則向量$0\boldsymbol{a}$即表示在起點上退化至一點的位置向量。

同樣的，所有有序三元實數組所構成的向量空間R^3，可用三度空間表示。

1.3 子空間，線性組合，線性無關

定義1：向量空間V之一非空部分集U，$U \subseteq V$，若滿足下列條件，則稱為V之一子空間。

(1) 若$\boldsymbol{a} \in U$且$\boldsymbol{b} \in U$則$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U$，

(2) 若$\lambda \in R$且$\boldsymbol{a} \in U$則$\lambda \boldsymbol{a} \in U$。

向量空間的子空間本身必為一向量空間，因此必須也包含零向量。

在圖2設三維空間R^3之向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$及$\boldsymbol{a}_3$所展開，於是由$\boldsymbol{a}_1$及$\boldsymbol{a}_2$所

展開的平面爲三維空間的一個二維子空間。

注意：向量空間V之任意多個子空間的交集可證明也是V的子空間。

定義 2：設向量空間V有有限多個向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，……$\boldsymbol{a}_n$。可表成$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$之向量稱爲向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，……，$\boldsymbol{a}_n$的線性組合，其中$\lambda_i$，$i=1$，……，$n$爲實數。

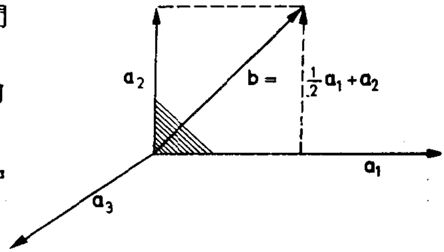

圖 2.

在向量的線性組合中，若$\lambda_i>0$ 則稱爲正線性組合。此包含了凸線性組合，即尚滿足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 者。

現考慮向量空間的一任部分集合T。以S表示所有子空間$U\subseteq V$，滿足$T\subseteq U$者之集合。因$V\in S$，故S非空。由注意知，S之子空間U的交集D亦爲子空間且包含T；D即爲由T所展開之子空間。V之部分集T爲一子空間與$T=D$互爲充要。

定義 3：若向量爲非空部分集$T\subset V$之有限多個向量的線性組合，則稱其爲T之線性組合。

於是有

定理 1：子空間$D\subset V$恰由T之所有線性組合所構成。

證：T之所有線性組合集以T^*表之。兩線性組合相加及線性組合與數λ相乘仍然得到線性組合，於是T^*爲V之一子空間。每一向量$\boldsymbol{a}\in T$爲T之一線性組合，此乃因$\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}$，於是$T\subseteq T^*$，故$D\subseteq T^*$。反之$D$必須包含$T$之每一線性組合，故$T^*\subseteq D$，於是得$D=T^*$。□

向量空間V之有限多個向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$展開成V之一子空間$V^*=D$，且由定理 1 知，V^*之每一向量可表成$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$之線性組合。

定義 4：若關係

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$$

只在$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$下成立，則稱向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$線性無關，反之若有一非零$\lambda_i$且上關係成立則謂之線性相關。

以 0 爲起點，R^3 三向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$若均在同一平面上（圖 3），則其爲線性相關，因二向量，如$\boldsymbol{a}_1$及$\boldsymbol{a}_2$即可展開一平面。於是向量$\boldsymbol{a}_3$可表成

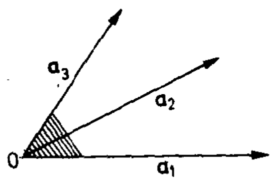

圖 3.

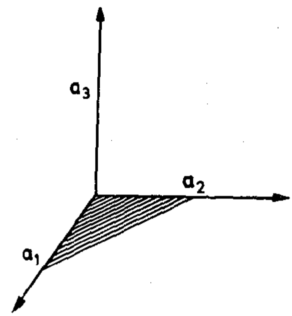

圖 4.

$\boldsymbol{a}_1$ 及 $\boldsymbol{a}_2$ 的線性組合。

R^3 三向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 若不在同一平面上（圖 4），則爲線性無關，且展開 R^3。

定理 2：零向量決不會出現在線性無關向量中。

證：設給予向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，其中 $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$。

線性組合

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

對 $\lambda_n \neq 0$ 成立，即其不只有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 之顯然解，是故有零向量者必爲線性相關。 □

定理 3：從 n 個線性無關向量中移去一個或更多的向量，則所剩的向量仍爲線性無關。

證：例如若從 n 個線性無關向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中移去 $\boldsymbol{a}_1$，則對應方程式

$$\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

若對 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 有非顯然解，則原方程式

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

亦有非顯然解，此與 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 爲線性無關之假設相矛盾。 □

定理 4：若向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 線性相關，則其中至少有一向量爲其他向量的線性組合。

證：設

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \quad 且 \quad \lambda_1\neq 0。$$

以 λ_1 除上等式求 $\boldsymbol{a}_1$，則得

$$\boldsymbol{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_3-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_n\,;$$

是故 $\boldsymbol{a}_1$ 爲其餘向量之一線性組合。 □

定理 5：若向量 $\boldsymbol{b}$ 爲向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 之一線性組合，則向量

$$\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$$

爲線性相關。

證：若 $\boldsymbol{b}$ 爲 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 之一線性組合，則

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n。$$

由是得

$$1\cdot\boldsymbol{b}-\lambda_1\boldsymbol{a}_1-\lambda_2\boldsymbol{a}_2-\cdots-\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}。$$

因第一項係數非 0，向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 爲線性相關。 □

線性無關的觀念可推廣至非有限向量集上。

定義 5：若一向量集 $T\subseteq V$ 之每個有限部分集皆爲線性無關，則稱此向量集爲線性無關，否則稱 T 爲線性相關。

定理 6：設 T 爲至少有兩向量的一集合。至少有一向量 $\boldsymbol{b}\in T$ 可表成互不相同向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in T$ 之線性組合，其中 $\boldsymbol{a}_i\neq\boldsymbol{b}$, $i=1,\cdots,n$，這是 T 爲線性相關的一充要條件。

由定理 4 及 5 卽得證明。

1.4 向量系秩

一向量系是指一線性空間內，向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 所組成的有限集。

定義 1：向量系 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 中線性無關向量之最大個數稱爲此系之秩（Rang）。一向量系之秩爲 r，卽表示，此系中個數超過 r 之向量組必爲線性相關。

圖 5a 上，向量 $\boldsymbol{a}_1$ 及 $\boldsymbol{a}_2$ 之秩爲 1。圖 5b 上，向量 $\boldsymbol{b}_1$ 及 $\boldsymbol{b}_2$ 之秩爲 2。在圖 5c 中，$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4$ 在 R^3 內構成一向量系，且假設 $\boldsymbol{c}_4$ 在由

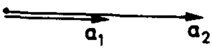

圖 5 a

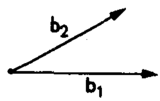

圖 5 b

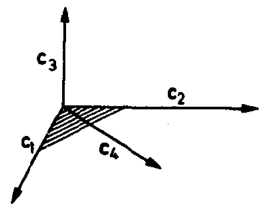

圖 5 c

向量 $\boldsymbol{c}_1$ 及 $\boldsymbol{c}_2$ 所展開之平面上，此時秩為 3。

下面敍述有關向量系秩之重要定理。

定理 1：若向量系 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 之秩為 $r < n$，則其中每個向量皆可唯一表成其中 r 個線性無關向量之線性組合。

證：向量系 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 之秩設為 r。我們不妨假設，前面 r 個向量為線性無關。於是前面 $r+1$ 個向量

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$$

為線性相關。因此對 λ_i，$i = 1, \cdots, r+1$ 有非顯然解，使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r + \lambda_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} = \boldsymbol{0} 。$$

因我們可假設 $\lambda_{r+1} \neq 0$，故

$$\boldsymbol{a}_{r+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} \boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{r+1}} \boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} \boldsymbol{a}_r 。$$

第一部分由是得證。要證明唯一性，假設 $\boldsymbol{a}_{r+1}$ 有兩種表法，即

$$\boldsymbol{a}_{r+1} = h_1 \boldsymbol{a}_1 + h_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + h_r \boldsymbol{a}_r$$

及

$$\boldsymbol{a}_{r+1} = k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r 。$$

兩式相減，得

$$0 = (h_1 - k_1) \boldsymbol{a}_1 + (h_2 - k_2) \boldsymbol{a}_2 + \cdots + (h_r - k_r) \boldsymbol{a}_r 。$$

但向量$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$爲線性無關，上等式只有在係數爲零時才成立，因之 $h_1=k_1, h_2=k_2,\cdots,h_r=k_r$。 []

由圖 5c 知道，在一向量系中，若把可由其他向量之線性組合表示的向量移去，其秩不變。若把向量$\boldsymbol{c}_4$從此向量系中移去，其秩仍保持爲3。 反之，若移去$\boldsymbol{c}_3$，則其秩減爲2。

若向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$可由向量系$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$之線性組合表示，其中$m<n$，則向量系$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$之秩至多爲$m$。

1.5 基，維，坐標

定義 1：向量空間V之一部分集T，若爲線性無關且可展成整個空間V，則爲V的一基。

定理 1：設$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$爲$V$之一基，且$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$爲$V$之一向量，若$\lambda_i\neq 0$，則向量$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n$仍爲$V$之一基。

證：必須證明，向量$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n$爲線性無關。即對線性組合

$$\xi_1\boldsymbol{a}_1+\xi_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\xi_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1}+\xi_i\boldsymbol{b}_i+\xi_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1}+\cdots+\xi_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

有$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$之關係。以$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$代$\boldsymbol{b}$，則有

$$\begin{aligned}\xi_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\xi_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1}+\xi_i\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\xi_i\lambda_n\boldsymbol{a}_n+\xi_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1}\\+\cdots+\xi_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}(\xi_1+\xi_i\lambda_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(\xi_{i-1}+\xi_i\lambda_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1}+\xi_i\lambda_i\boldsymbol{a}_i\\+(\xi_{i+1}+\xi_i\lambda_{i+1})\boldsymbol{a}_{i+1}+\cdots+(\xi_n+\xi_i\lambda_n)\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

及

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\xi_j+\xi_i\lambda_j)\boldsymbol{a}_j+\xi_i\lambda_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}\text{。}$$

因向量$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$由假設爲線性無關，得

(1) $\quad \xi_j+\xi_i\lambda_j=0 \qquad j\neq i$

且同時有

(2) $\xi_i\lambda_i=0$。

但因 $\lambda_i\neq 0$，由(2)即得 $\xi_i=0$，且由(1)又得 $\xi_j=0$，$j=1,\cdots,i-1$，$i+1,\cdots,n$。由是向量

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n$$

之線性無關性得以證明。□

定理 1 可推廣成所謂的 Steinz 互換定理：

定理 2：設 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 為 V 之線性無關向量，且（$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$）為 V 之基，（$k\leq n$），則基（$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$）內有 k 個向量可與向量 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 互換。

證：向量 $\boldsymbol{b}_1$ 可表成基向量之線性組合：

$$\boldsymbol{b}_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{a}_i \text{ 。}$$

因至少有一 $\lambda_i\neq 0$，不妨假設，$\lambda_1\neq 0$，由定理 1，向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 構成 V 之一基。現向量 $\boldsymbol{b}_2$ 可由新的基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 表示：

$$\boldsymbol{b}_2=\eta_1\boldsymbol{b}_1+\sum_{i=2}^{n}\eta_i\boldsymbol{a}_i \text{ 。}$$

同樣不妨再假設 $\eta_2\neq 0$，因此向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 由定理 1 構成 V 之一基。

此過程，應用 k 次，即得包含所有 $\boldsymbol{b}_i$，$i=1,\cdots,k$，之基。

向量

$$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{a}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n$$

因之成為 V 之一基。□

由定理 2 得

系：設（$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$）及（$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k$）為向量空間 V 之兩基。於是 $k\leq n$，且同樣的 $n\leq k$；因此 $k=n$。

一向量空間若有一有限基，則所有基之向量個數相同，因之其秩也相同。一向量空間有一無限基，則其他所有基亦無限。

定義 2：設向量空間 V 有一有限基。其所有基之向量個數相同。此個數

稱為V的維，以 $\dim V$ 表示。

定義 3：設向量空間V無有限基。於是稱其為無限維空間；$\dim V=\infty$。零空間之維為零。

設V為有限維向量空間，且 $\dim V=n$，$0<n<\infty$，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$為$V$之一基，又$\boldsymbol{a}\in V$。於是$\boldsymbol{a}$可表成基向量之線性組合：

$$\boldsymbol{a}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n \text{。} \tag{3}$$

定義 4：在(3)式中出現的係數$\xi_1,\cdots,\xi_n$，稱為向量$\boldsymbol{a}$關於基$\boldsymbol{x}$之坐標，此由$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{x}$唯一決定。

若$\boldsymbol{b}$亦表為同一基向量$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$之線性組合，如

$$\boldsymbol{b}=\eta_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\eta_n\boldsymbol{x}_n \text{。}$$

則$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$之和向量及差向量分別為

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\xi_1+\eta_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\xi_n+\eta_n)\boldsymbol{x}_n$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\xi_1-\eta_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\xi_n-\eta_n)\boldsymbol{x}_n \text{。}$$

向量$\boldsymbol{a}$與實數λ之乘積為

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda\xi_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\lambda\xi_n)\boldsymbol{x}_n \text{。}$$

於是在兩向量之加法（減法）中，我們必須把對應的係數相加（相減）；在一向量與實數λ之乘法中，以λ乘每一坐標。

若把向量$\boldsymbol{a}$關於基$\boldsymbol{x}$之坐標$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，及$\boldsymbol{b}$關於基$\boldsymbol{x}$之坐標$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$組合成$n$元組：

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

及

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),$$

則可計算向量$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{b}$，此時只要計算其對應之n元組。n元組的計算於是被引入。

1.6 n 維實數空間

定義 1：所有有序n元實數組集R^n，

$$R^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in R,\ i = 1, \cdots, n\},$$

稱爲R之n次笛卡兒乘積。

以

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

爲加法，及以

$$\lambda (a_1, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n)$$

爲數積，R^n 構成一 n 維線性空間，稱爲“ n 維實數空間 ”。$(0, \cdots, 0)$爲零向量，$(a_1, \cdots, a_n)$之逆元素爲$(-a_1, \cdots, -a_n)$。R^n 之向量亦稱爲“實 n 向量 ”。特例R^2 及 R^3 已於1，2節介紹了。

爲方便起見，把實 n 向量 $\boldsymbol{a} \in R^n$ 寫成列向量，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}。$$

$\boldsymbol{a}'$ 或 $\boldsymbol{a}^T$ 表示行向量，

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}^T = (a_1, \cdots, a_n).$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 稱爲 n 向量 $\boldsymbol{a}$ 之分量。

定義 2：一向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，

若$a_i > 0$，$i = 1, \cdots, n$，稱爲正：$\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$，
若至少有一$a_i > 0$，且其餘 $a_i = 0$，稱爲半正：$\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}$，
若$\boldsymbol{a} \geq 0$或$\boldsymbol{a} = 0$，稱爲非負：$\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}$。
對兩個 n 向量有下列關係：

若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，則$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；
若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>\boldsymbol{0}$，則$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$；
若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\geq\boldsymbol{0}$，則$\boldsymbol{a}\geq\boldsymbol{b}$；
若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\geqq\boldsymbol{0}$，則$\boldsymbol{a}\geqq\boldsymbol{b}$。

定義3：兩向量

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\text{ 及 }\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

之內積乃指

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

因此內積是一個實數。爲方便起見，內積以行向量$\boldsymbol{a}'$及列向量$\boldsymbol{b}$之乘積如下表示：

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}。$$

例：

$$\boldsymbol{a}'=(2,1,0,3),\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\\5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=2\cdot1+1\cdot(-2)+0\cdot6+3\cdot5=15.$$

由內積定義即得下列關係：

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a}\qquad\text{交換律}$$

$$\begin{aligned} a'(b+c) &= a'b+a'c \\ (a'+b')c &= a'c+b'c \end{aligned} \quad \text{分配律}$$

利用內積，可引入一度量，可視爲長短之度量。

定義 4：向量 $a\in R^n$ 之絕對值，範數或長度乃指

$$\|a\|=\sqrt{a'a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\text{。}$$

範數有下列性質：

(1) $\|a\|\geq 0$。

$\|a\|=0$ 之充要條件爲 $a=0$。

(2) $\|\lambda a\|=|\lambda|\cdot\|a\|$，

(3) $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$。

前兩個性質，直接由內積定義得之。性質(3)，即所謂三角不等式，要利用到下助定理：

助定理：對任意向量 a 及 $b\in R^n$ 有：

(4) $|a'b|\leq\|a\|\cdot\|b\|$。

等式成立的充要條件是 $a=\lambda b$ 對某一實數 λ 成立。

證：若 $a=0$ 或 $b=0$，則 $|a'b|=\|a\|\cdot\|b\|=0$。若 $b\neq 0$，則對每一實數 λ，有

$$0\leq\|a+\lambda b\|^2=\|a\|^2+2\lambda a'b+\lambda^2\|b\|^2$$

(5) $$=\left(\frac{a'b}{\|b\|}+\lambda\|b\|\right)^2+\|a\|^2-\frac{(a'b)^2}{\|b\|^2}\text{。}$$

取一 $\lambda=\lambda_0$，使得

$$\frac{a'b'}{\|b\|}+\lambda_0\|b\|=0，$$

於是

$$(a'b)^2\leq\|a\|^2\cdot\|b\|^2$$

及