

黄儒经 吴晓兰 编著

中华青少年智慧
百科读物丛书

◎培养兴趣◎开拓视野◎增加知识◎提高素质◎

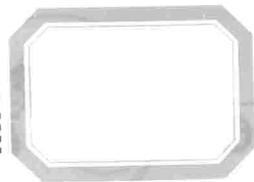
数学也趣味



东方出版社

青少年

· 五



数学也 趣味

黄儒经 吴晓兰 编著

東方出版社

责任编辑:杨子曦
版式设计:胡永和
责任校对:韦 茜

图书在版编目(CIP)数据

数学也趣味/黄儒经 吴晓兰编著.

-北京:东方出版社,2008.1

ISBN 978-7-5060-2996-4

I. 数… II. ①黄… ②吴… III. 数学-青少年读物
IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 184308 号

数学也趣味

SHUXUE YE QUWEI

黄儒经 吴晓兰 编著

东方出版社 出版发行

(100706 北京朝阳门内大街 166 号)

北京世纪雨田印刷有限公司印刷 新华书店经销

2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月北京第 1 次印刷

开本:880 毫米×1168 毫米 1/32

字数:83 千字 印张:4.875

ISBN 978-7-5060-2996-4 定价:12.00 元

邮购地址 100706 北京朝阳门内大街 166 号

人民东方图书销售中心 电话 (010)65250042 65289539



目 录

一、奇妙的数	(1)
数字的神趣	(1)
亲和的友好数	(7)
稀少而完美的完全数	(9)
自守数	(12)
完全平方数	(13)
勾股弦数	(14)
史密斯数	(16)
奇妙的圣经数	(17)
有趣的缺 8 数	(18)
回文数猜想	(24)
有趣的素数问题	(26)
凶数 666	(32)
奇妙的单位分数	(33)
π 的趣史	(35)
别具一格的数字诗	(40)
二、神奇的数字美	(47)

杨辉三角形	(47)
完美而奇妙的等式	(49)
兔子繁殖与斐波纳奇数列	(55)
黄金分割比与黄金数	(58)
神奇的幻方	(67)
三、奇趣的数字游戏	(76)
有趣的数字黑洞	(76)
$3x + 1$ 猜想	(79)
抽牌游戏	(82)
火柴游戏	(83)
四、数学桂冠上的明珠——数学猜想	(85)
费马猜想	(85)
四色猜想	(89)
哥德巴赫猜想	(94)
五、优美而有趣的图形	(98)
完美正方形	(98)
神奇的等宽曲线	(101)
奇妙的分形	(106)
六、玄幻的几何图形	(113)
欺骗眼睛的几何问题	(113)
容易出现错觉的几何图形	(116)
不可能出现的图形	(121)
七、古今趣题集锦	(123)
普乔柯趣题	(123)



鸡兔同笼	(124)
牛顿问题	(125)
百鸡问题	(126)
巧分遗产问题	(128)
棋盘上的麦粒问题	(129)
点兵场上的神算术	(130)
快速求数字的根	(135)
女生散步问题	(136)
难题:七桥问题	(138)
最高的与最矮的	(141)
八、数学家轶闻趣事	(143)
传奇式的数学家彭色列	(143)
诺伊曼与苍蝇飞行	(144)
小欧拉智改羊圈	(146)
泊松分酒	(147)
总统巧证勾股定理	(148)



一、奇妙的数

数字的神趣

人类对数的意识起源于人类对于一一对应关系的直觉,当一个原始人发现有两只狼同时逼近时,他在惊呼的同时可能会不自觉地伸出两个手指将这一坏消息传达给他的同伴。这样,利用一只手的手指,就可表达从1到5这5个数,因此两只手就可表达10个数。这也许就是数的最初的来源了。为了将重要的数目保存下来,人类摸索出多种记数方法,有的用在石子上刻画杠杠的方式,有的则用打绳结的办法记数。这就是勒石记数和结绳记数。

人类社会,数是一种独特、但又最富于神秘性的特殊的语言。人类生活的任何方面,无不与数有关。数字除了帮助人们记忆、统计外,还往往具有象征性的意义。

远古时代,人们就已对“数”产生了某种神秘,在古希腊毕达哥拉斯学派眼中,“数”包含着异常神奇的

内容。在中国传统文化中,某些数目字,常常具有某种理想、信念的象征。而有些民族根据数的算术属性,对自然界和人类社会的现象给出神秘的解释,尽管其中不无荒诞和牵强。所有这些,都告诉我们这样一个事实:自古以来人们对“数”就有着特殊的感情。

数字本来是没有特别的意思的,但在长期的使用中,人们赋予了它们一些特别的意味,就使得它们具有一些特别的神趣。

1 被看做万物的开端,由它派生了整个世界。

2 则意味着爱情。

3 这个数字有一定的宗教神味。这主要源于其原始的生成。

在古代,“3”往往是泛指“多”,并不一定是确数,《论语》里有“吾日三省吾身”,“三思而后行”,这些“三”并不是专指确数。不仅中国是这样,世界上不少民族的语言里也有这样的情况。

据说,远古人类祖先开始计数时,左手抓一件采集到的果实或狩猎的猎物为“1”,右手再抓一件为“2”,两手以外无法再抓,就都是“3”了。从而在以后形成以“3”指“多”的习惯。

“3”由于有了“多”的含义,因而就逐渐演化为高、广、大等意义上属于近属的含义,逐渐具有神秘而又神圣的象征意义。中国古代将“三”视为神秘和神圣。东汉的字书《说文解字》解释说:“三,天、地、人之道



也。”《老子》说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”所以，道教里尊奉“三一”，有“三神”（意神、志神、念神）、“三光”（虚赤光、元黄光、空白光）、“三清”等等神秘说法。

在其他很多古代文明中，“3”也都具有这种象征性意义。很多古代神话及宗教，主神往往是三位，如古印度教的三相神：梵天、毗湿奴、湿婆；古婆罗门教和以后的印度教都要供奉“三火”。古希腊罗马神话里也有很多所谓“三联神”，如古希腊的宙斯、雅典娜、阿波罗，古罗马的丘裘比特、基林努斯、玛斯。佛教有“三世”说，寺庙里供奉着过去、现世、未来三佛；把意识空间想象为“三界”（欲界、色界、无色界），引导众生解脱的途径有“三乘”，经典总称为“三藏”。天主教则有圣父、圣子、圣灵的“三位一体”等等。

4 这个数在我们一些中国人的眼中就像瘟神一样的唯恐避之不及，皆因它与“死”谐音。一些宾馆酒楼，甚至要用3A这样的让人多少有些摸不着北的号码来标明4楼。这边说它不好，同样也是中国人，不少地方的人却认为它是一个吉祥的数字，真让人莫衷一是。

5 是一个圆满的数。在中国文化里，“五”这个数字也极具象征意义。“五”为满掌之数，古人学会掐指计数，至满掌的五而止，或许就此产生五这个数字的“圆满”的语义。古时候，中原地区的先民就把世界万

物的原形归纳为“五行”，《说文解字》对五的解释就是：“五，五行也，从二，阴阳在天地间交午也。”这就有神秘色彩了。

汉语中凡是总称的、泛指的概念，往往就以“五”来表示。比如地理的方位总称为“五方”，斑斓的色彩总称为“五彩”，能够供人果腹的粮食总称为“五谷”，滋味统称“五味”，人们的亲属总称“五服”等等。

6也是个冰火两重天的数。在我们中国人的眼里，6是个吉祥的数字。我们中国人在古代的时候就注意到，上、下、前、后、左、右这六大方位“六合”足以用来表现并构建空间，因此逐渐形成对于“六”的迷信。特别是666这个数，更被我们中国人视为六六大顺的吉利数。2006年6月6日，据说选在这一天结婚的人特别多。有人说是百年一遇的相当吉利的好日子。但也就是同一天，美国的许多准妈妈们纷纷采取措施坚决避免生小孩，因为在她们心目里，666是“野兽的数字”。

7多少也带点宗教的色彩，特别是对穆斯林来说，这是一个很重要的数：他们每隔7天就举行一次聚礼，开斋节念的大赞词要念7遍，朝觐仪式多用7或7的倍数来进行。据说这与《古兰经》的提示有关。在伊朗这个伊斯兰教国家，7是一个重要的数字，伊朗人过年要摆上“七种”物品的拼盘以迎新春，女儿出嫁要穿“七色”染成的新装以贺新喜。



8 这个数真的有点“八”——“八卦”是也,就是因为它与“发”谐音,所以我们中国人特别是南方人,趋之若鹜。选手机号、选车牌、举办婚礼甚至出门看日子等,都特别看重这个数字,有人为了求得这个吉祥的数字,甚至不惜重金。所谓的数字崇拜,在 8 这个数上表现得最淋漓尽致。

9 是一个尊贵的数。这起源于它是数字 0、1—9 的终端,是最大的阳数,是一切事物的顶点。所以,9 含有“至高无上”的意思。

3 的平方是 9,既然 3 可以表示“多”、“广”、“高”,因此它的平方“9”也往往用来指“极多”、“极高”、“极广”,比如“九牛一毛”来表示“多”,以“九天”、“九霄”来表示高不可攀的上苍,用“九州”来表示广阔的地域。

9 实为我们中国人宠爱的数字。除了上述的原因外,还因为其发音,“9”,“久”也。

由此,“9”又成了尊贵之数。又由此,“9”与皇家结下了不解之缘,凡是涉及皇帝的事物,往往与 9 或 9 的倍数有关,比如皇帝的京城一定要有“九门”;皇宫的房屋高、宽、深尺寸,开间的数目,台阶的数目,屋顶上的装饰物,围墙的高度,甚至大门的大铜泡钉,也总是要搞成 9 的倍数。而“九五之尊”则成了国王、皇帝的代名词。

0,通常表示什么也没有。比如说《辞海》上就有

这样一种解释：“它在任何计量单位中表示‘没有’。”而《国语辞典》也说：“在算术上其意义为无，以0表之。”

但实际上零表示的意义非常丰富。

首先，“0”的意义并不仅仅表示“没有”，而且还表示多方面的内容及其作用，比如：温度表上的“0”度（零度），表示一个特定的温度——冰的熔点，并不表示没有温度。人们常说的“0”时（零时）即24时，这是一个明确的时间概念，不能说成“没有”时间。

而且，0在很多时候还表示起点，比如，0在数轴上作为原点，也是起点的意思。

0又是正数与负数间的唯一中性数，是正数与负数的分界数，它比所有的正数都小，比所有的负数都大。

在纯粹的数里，0虽然表示无，但却可以用来表示数位，加了它或少了它，数的大小立即就有了质的变化，如0.02、0.2、20、200、2000……，这些数中，都只有1个有明确意义的数字“2”，但这些数的大小是明显不同的。

0在电子计算机中的地位是最崇高的，因为在电脑所用的二进制数中，0是所用的两个基本数码之一（另一个是1）。

0还可以表示精确度，在近似的计算中，7.5与7.50表示的精确程度是不同的，7.5表示精确到小数



点后一位,而 7.50 表示精确到小数点后二位。

0 在被动的情况下,还唯唯诺诺的,但一旦它处在主动的位置,立即显示其巨大的能量来:

$a - 0$ 没什么,但如是 $0 - a$,立即就得出 $-a$ 。

$0 \div a$ 也没什么,但 $a \div 0$ 立即就变成天大的事了。

看看,0 的作用还是很大吧!

亲和的友好数

远古时期,人类的一些部落就把 220 和 284 这两个数字奉若神明。男女青年结缔婚姻时,往往把这两个数分别写在不同的签上,两个青年在抽签时,若分别抽到了 220 和 284,便被确定结为终身伴侣;若抽不到这两个数,他们则因天生无缘,只有分道扬镳了。

这种缔婚方式固然是这些部落的风俗,但在某种迷信色彩的背后,倒也有些说道。表面上,这两个数字似乎没有什么神秘之处,然而,它们却存在着某些内在的联系:

能够整除 220 的全部正整数(不包括 220)之和恰好等于 284;而能够整除 284 的全部正整数(不包括 284)之和又恰好等于 220。

我们可以可以验算一下:

能够整除 220 的全部正整数是:1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 它们加起来得到 284。

能够整除 284 的全部正整数是:1, 2, 4, 71, 142, 加

起来恰好是 220。

因为如此,人们把这两个数称为友好数。

实际上,友好数不仅仅只有这一对,而是很多对。

所以,可以这样定义友好数:友好数又叫亲和数,它指的是这样两个自然数,其中每个数的真因数之和等于另一个数。

所谓的真因数(或真除数)是能整除一个数的所有除数,包括 1,但不包括该数本身。通俗地说,就是能够整除一个数的全部正整数。

220 与 284 是人类最早发现的友好数,是公元前 6 世纪古希腊数学家毕达哥拉斯发现的,它也是所有友好数中最小的一对。

人类发现的第二对友好数(17296, 18416),则是在两千多年后的 1636 年的事了。之后,人类不断发现新的友好数。至 1750 年,瑞士伟大的数学家欧拉,一个人就找出了 59 对友好数。令人惊讶的是,第二对最小的友好数(1184, 1210),直到 1866 年才被一个 16 岁的意大利男孩发现。

迄今为止,人们已经找出了大约 1200 对友好数,其中最大的一对是 111448537712 和 118853793424。

现代数学家还将友好数的概念从一组 2 个扩展到一组 3 个。在一组友好的 3 个数中,任何一个数的真除数之和都等于其他两个数之和。例如:103 340 640; 123 228 768 和 124 015 008 就是一个友好的亲和数。



另一组友好的三个数为 1 945 330 728 960; 2 324 196 638 720 和 2 615 631 953 920。

3 个一组的友好数并不易发现, 在上面这一组数字中 3 个数分别有 959, 959 和 479 个因数。

人们还研究了友好数链: 这是一连串自然数, 其中每一个数的真因数之和都等于下一个数, 最后一个数的真因数之和等于第一个数, 因而又是一个封闭的链。如: 12496, 14288, 15472, 14536, 14264 (五环链)。

而下面的两个友好数链都是四环相亲数链:

2115324, 3317740, 3649556, 2797612;

1264460, 1547860, 1727636, 1305184。

1965 年滑铁卢大学的福赖尔 (K. D. Fryer) 发现一个以 14316 打头的有 28 环的相亲数链。

与亲和数相反, 有一类所谓的自私数, 求它的真除数之和会得到一个新的数, 这样反复进行下去, 最终还是等于它自身。比如 12496, 它的真除数之和是 14288, 再计算 14288 的真除数之和, 反复计算五轮之后, 正好等于 12496, 算来算去最终还是它自己, 因此人们称这种数为自私数。

自私数实际上是一种数字黑洞。关于数字黑洞, 后面我们还有讲述。

稀少而完美的完全数

古时候, 6 是一个备受宠爱的数。有人认为, 6 是

属于美神维纳斯的,它象征着美满的婚姻;也有人认为,宇宙之所以这样完美,是因为上帝创造它时花了6天时间……

自然数6为什么备受人们青睐呢?

原来,6是一个非常“完善”的数,它刚好等于它的全部3个真因数1、2、3之和。

有些自然数,也存在这样的性质。比如28、496等,它们都等于其真因数之和:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

这就如同人间的全家福,因此,这些数被人们称为“完全数”或者“完美数”。

第一个发现完全数的人是古希腊伟大的数学家欧几里得。在他编著的《几何原本》(公元前三百多年出版)的第九章中,有这样一段记载:在自然数中,我们把恰好等于自身的全部真因子之和的数,叫做“完全数”,如6、28、496和8128这四个数就是完全数。

也许是因为太完美了吧,所以完全数的数量很稀少。除了欧几里得发现的4个完全数外,直至1460年,一位无名氏才神秘地给出了第五个完全数:33550336。

到20世纪末,人类总共才找到了30个偶数完全数,最大的完全数是一个由13万位阿拉伯数字组成的庞然大物: $2^{216090}(2^{216091} - 1)$ 。是否存在无限多个完全



数不得而知。如果谁能找到一个奇数完全数,那将是一项了不起的数学成就。

除了前述的特性外,完全数还具有如下的神奇得令人惊叹的特性:

$$(1) 6 = 2^1 + 2^2; 28 = 2^2 + 2^3 + 2^4; 496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8; \dots$$

$$(2) 6 = 1 + 2 + 3; 28 = 1 + 2 + \dots + 7; 496 = 1 + 2 + 3 + \dots + 31; \dots$$

$$(3) \text{除 } 6 \text{ 外, } 28 = 1^3 + 3^3; 496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3; \dots$$

(4) 完全数的全部因子的倒数和都等于 2:

$$6: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2; 28: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2, \dots$$

这些性质都可以说很完美,所以,它们真无愧于“完全数”的美称!

许多数学家研究过完全数。1730年,瑞士的数学大师欧拉发现,求完全数的公式为 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 。

用这个公式求出的完全数都是偶数,是否存在更多的完全数?除了偶数完全数,是否也存在奇数完全数?这些都仍是待揭之谜!

1972年有人证明:要找奇完全数,只能在大于 10^{50} 的数中找,且它必须为 $p^{4a+1}q^2$ 形式,其中 p 为奇质数,