线性统计与线性代数

参考材料

倪国熙　陈希孺　著

安徽省数学学会
安徽大学数学系

前　　言

C.R.Rao的《Linear Statistical Inference》是一本数理统计名著，在我国很受重视，该书的精华是其线性统计（回归分析、方差分析、多元分析等）部分，即第一、四、八章和第三章的一部分，这些内容在书中自成体系。其中第一章以简练的笔法总结了矩阵代数的许多有用结果，某些重要内容，如矩阵广义逆和标准形，二次型极值等，在普通教科书中往往介绍得不充分，因此，这章对学习线性代数的读者也很有用。但此书部分习题较难，正文中错误不少，不少地方证明过粗，给学习该书的同志带来不少困难。江西师范学院倪国熙付教授和中国科学技术大学陈希孺教授，为帮助读者研读该书，对第一、四、八章注释了难点，补充了原书中未证或证明过略之处，纠正了原书中的某些错处，并对这几章的全部习题和第三章的有关习题作了仔细解答。现将这些资料汇集成书，以供学习线性统计和线性代数的读者参考。在编写这本资料时，作者尽可能注意到了其独立性，以便于没有 Rao 的书的读者也能直接使用。

由于排版条件的限制，我们对原稿中一部分符号作了更动，如用黑体1代替空心1，用大斜体字母 A，B，…等代替大花写字母；请读者在阅读时，注意 A 与A，B 与B，C 与C，D 与D，F 与F，G 与G，U 与U，V 与V的不同含意。有时这些字母甚至出现在同一个式子中，更要注意它们的区别。又由

于时间仓促，在校对工作中难免有一些错漏之处，敬请作者和读者谅解。

在本书出版过程中，得到我校印刷厂的大力支持，在此表示感谢！

安徽大学数学系　1981.7.

編者附言

在本书出版过程中，得到安徽大学数学系和安大印刷厂的大力支持，特别是数学系概率统计教研室和资料室的同志们作了大量的工作，特表示衷心的感谢。

倪国熙　陈希孺

1981.3.19.　于广东新会

目　　录

一、向量和矩阵代数习题解答

(一)第一组题解

1. 设α_1，…，α_u为向量空间V中的u个无关向量。证明它必可扩充为V之一基底，即可增加$\alpha_{u+1},\cdots,\alpha_r$，以使$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为$V$之一基底。此处$r=\dim(V)$（$V$的维数）。

证. 任取V之一基底$\beta_1,\cdots,\beta_r$，考虑向量组

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_u,\beta_1,\cdots,\beta_r$$

将其中可以用前面的向量的线性组合表出者丢弃，则剩下的将构成V之一基底，又由$\alpha_1,\cdots,\alpha_u$无关的假定，知它们中没有一个被丢弃者，证毕。

2. 证明由以下6个行向量生成的线性空间的维数为4：

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

证. 可以转向于考虑由上面写出的6个列向量所生成的线性子空间，以$\beta_1,\cdots,\beta_6$记这6个列向量，则易见β_3和β_6可由其前面的线性表出：$\beta_3=\beta_1-\beta_2,\beta_6=\beta_1-\beta_4-\beta_5$，故可知$\mu(\beta_1,\cdots,\beta_6)$（$\mu(\beta_1,\cdots,\beta_6)$表示由$\beta_1,\cdots,\beta_6$所生成的向量空间，$\mu(A)$表示由矩阵A的列向量生成的线性空间）的维数不超过4。另一方面，显见$\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$线性

无关（因由 $C_1\beta_3+C_2\beta_4+C_3\beta_5++C_4\beta_6=0$ 即得 $C_2=C_3=C_4=0$，由之推出 $C_1=0$）．故维数等于4．

3. 将第2题的结果推广到pq个行向量，这pq个行向量分为q组，每组p个，第i组的第j个向量在其第1、第i+1和第q+j+1个分量处为1，其余分量为0，证明这pq个向量生成的子空间有维数 $p+q-1$．

证． 一般情况为

$$
\begin{array}{ccccccc|cccccc}
1&1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&1&0&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\\
\hline
1&0&1&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&0&1&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&0&1&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\hline
1&0&0&0&\cdots&0&1&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&0&0&0&\cdots&0&1&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\\
\multicolumn{7}{c|}{\underbrace{\hphantom{1\;0\;0\;0\;\cdots\;0\;1}}_{q+1\text{列}}}&\multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hphantom{0\;0\;0\;\cdots\;0\;1}}_{p\text{列}}}
\end{array}
$$

如此表，一共有 $p+q+1$ 列，分别记为 $\beta_1,\cdots,\beta_{p+q+1}$.

则易见

$$\beta_{q+1}=\beta_1-\beta_2-\beta_3-\cdots-\beta_q,$$

$$\beta_{p+q+1}=\beta_1-\beta_{q+2}-\beta_{q+3}-\cdots-\beta_{q+p}$$

故知这 $p+q+1$ 个列向量生成的线性空间 μ 的维数 $\dim(\mu)$不大于$(p+q+1)-2=p+q-1$，另一方面，$\beta_3,\beta_4,\cdots,\beta_{p+q+1}$ 线性无关，因若

$$C_3\beta_3+C_4\beta_4+\cdots+C_{p+q}\beta_{p+q}=0 \qquad (1)$$

则直接得出

$$C_{q+2}=C_{q+3}=\cdots=C_{q+p}=0 \qquad (2)$$

由(2)和(1)，得 $C_3=C_4=\cdots=C_{q+1}=0$，这证明了 $\dim(\mu)=p+q-1$.

4. pq个数a_{ij}，$i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q$，满足条件

$$a_{ij}+a_{rs}-a_{is}-a_{rj}=0,\text{对}i,r=1,\cdots,p;j,s=1,\cdots,q. \qquad (3)$$

则对适当选择的 $a_i(i=1,\cdots,p),b_j(j=1,\cdots,q)$，有

$$a_{ij}=a_i+b_j,\quad i=1,\cdots,p,\quad j=1,\cdots,q. \qquad (4)$$

证.(3)式可改写为

$$a_{ij}-a_{is}=a_{rj}-a_{rs},\quad i,r=1,\cdots,p$$

故知 $a_{ij}-a_{is}$ 与 i 无关，记为 A_{js}:

$$a_{ij}-a_{is}=A_{js},\quad i=1,\cdots,p,\quad j,s=1,\cdots,q \qquad (5)$$

记 $a_i=(a_{i1}+\cdots+a_{iq})/q$，$b_j=(A_{j1}+\cdots+A_{jq})/q$.

(5)式两边对 s 从 1 到 q 求和并除以 q，即得 $a_{ij}=a_i+b_j$.

5. 有 n 个向量 $(a,b,b,\cdots,b,b)$，$(b,a,b,\cdots,b,b)$，$\cdots,(b,b,b,\cdots,a,b),(b,b,b,\cdots,b,a)$。满足条件 $a+(n-1)b=0$. 决定其中线性无关向量的个数.

解.分两种情况:

a. $a=0$，这时 $b=0$. 所有向量皆为零向量，故线性无关向量个数为 0.

b. $a\neq 0$，以$\beta'_1,\cdots,\beta'_n$ 记上述 n 个向量，则

$$\beta_n=-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_{n-1}$$

故线性无关向量个数不超过 $n-1$. 但易见$\beta'_1,\cdots,\beta'_{n-1}$线性无关.因由 $a\neq 0$，$a+(n-1)b=0$ 知 $b\neq 0$，$b\neq a$. 故若

$$C_1(a,b,\cdots,b)+C_2(b,a,\cdots,b)+$$
$$+C_{n-1}(b,b,\cdots,b)=0$$

则由最后一分量知 $C_1+\cdots+C_{n-1}=0$. 又由第 i 分量知

$$C_i a+(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}C_j-C_i)b=C_i(a-b)=0\Rightarrow C_i=0$$

对 $i=1,\cdots,n-1$. 这证明了 $\beta'_1,\cdots,\beta'_{n-1}$线性无关，因而上述向量组中，线性无关向量个数为 $n-1$.

6. 设F和G为两线性子空间，$F\cap G$为其交.又以$F+G$记一切形如 $x+y$ 的向量所构成的向量集，此处 $x\in F$ 而 $y\in G$. 证明：

(i). $F\cap G$ 和 $F+G$ 都是子空间.

(ii). $F\cap G$ 是同时被包含于 F 和 G 内的最大子空间.

(iii). $F+G$ 是同时包含F 和 G 的最小子空间.

(iv)其维数有关系

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)\qquad(6)$$

证. (i)－(iii)显而易见，故只证(iv).记

$$\dim(F)=m,\ \dim(F\cap G)=m-r,\ \dim(G)=n-r$$

在$F\cap G$ 中取基底 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$，将其分别扩充为$F$ 和 G 的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 和 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,$

α_n.显然，由α_1，…，α_n所生成的线性子空间即为 $F+G$. 又易见α_1，…，α_n线性无关.因若 $\sum_1^n C_i\alpha_i=0$，则 $\sum_1^m C_i\alpha_i=-\sum_{m+1}^n C_i\alpha_i$.此式左边属于$F$而右边属于$G$，故属于$F\cap G$.故可以通过$\alpha_{r+1}$，…，$\alpha_m$唯一地表出来.即有常数$d_{r+1}$，…，$d_m$存在，致

$$\sum_1^m C_i\alpha_i=-\sum_{m+1}^n C_i\alpha_i=\sum_{r+1}^m d_i\alpha_i \qquad (7)$$

但因α_{r+1}，…，α_n线性无关，由(7)的后一等式知

$$d_{r+1}=\cdots=d_m=0,\quad C_{m+1}=\cdots=C_n=0$$

再由(7)式以及α_1，…，α_m线性无关，知$C_1=\cdots=C_m=0$. 这证明了α_1，…，α_n线性无关，因而

$$\begin{aligned}\dim(F+G)&=n=m+(n-r)-(m-r)\\&=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)\end{aligned}$$

即(6)式.

7.证明对任何r，$1\leqslant r\leqslant n$，R^n可表为r个子空间的直接和.

证.显而而见.

8.设S为向量集，$S^\perp$为一切与S正交的向量之集，证明$(S^\perp)^\perp\supseteq S$，等号当且仅当$S$为子空间时成立.

证.$(S^\perp)^\perp\supset S$ 显然.因若 $a\in S$，则对任何 $b\in S^\perp$，有$a\perp b$. 故依定义 $a\perp S^\perp$ 而 $a\in(S^\perp)^\perp$.因为对任何S，易见$S^\perp$为子空间，故若$S=(S^\perp)^\perp$，S必为子空间.反过来，若S为子空间，设$a\in(S^\perp)^\perp$.将a分解为 $a=b+c$，其中$b\in S$，$C\in S^\perp$，必有 $c=0$.因若 $c\neq0$，则

$$(a,c)=(b+c,c)=(b,c)+(c,c)=(c,c)>0$$

与 $a\in(S^\perp)^\perp$ 矛盾. 故 $c=0$ 而$a=b\in S$. 这证明了$(S^\perp)^\perp\subset S$. 因反向包含总成立，有$(S^\perp)^\perp=S$.

9. 若 S，T为任两向量集，都包含零向量，则

$$(S+T)^{\perp}=S^{\perp}\cap T^{\perp} \tag{8}$$

（**注意**：S+T的定义见第6题，且该处定义中 F，G 不必为子空间）

证. 因为一般地有

$$A\subset B\Rightarrow A^{\perp}\supset B^{\perp}$$

故 $(S+T)^{\perp}\subset S^{\perp}$，$(S+T)^{\perp}\subset T^{\perp}$，因而 $(S+T)^{\perp}\subset S^{\perp}\cap T^{\perp}$.（**注**：这是用到了 S，T 都包含零向量，否则无法肯定 $S+T\supset S$，$S+T\supset T$）.反过来，设 $a\in S^{\perp}\cap T^{\perp}$，则 a 与 S 和 T中任一向量都正交，故与 S+T 中任一向量正交.因而 $a\in(S+T)^{\perp}$。这证明了 $(S+T)^{\perp}\supset S^{\perp}\cap T^{\perp}$，因而证明了(8).

10. 设 F 和 G 皆为子空间，则

$$(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$$

证. 在 $F^{\perp}$ 及 $G^{\perp}$ 中分别取基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$，则 $F=(F^{\perp})^{\perp}=\{x:\ x\perp\alpha_i,\ i=1,\cdots,r\}$，
$G=(G^{\perp})^{\perp}=\{x:\ x\perp\beta_j,\ j=1,\cdots,s\}$.因而
$F\cap G=\{x:\ x\perp\alpha_i,\ x\perp\beta_j,\ i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,s\}=$
$=(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp}$.再利用第8题，得

$$(F\cap G)^{\perp}=[(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp}]^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}.$$

11. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为向量空间 V_F 中给定的 m 个向量，则一切形如 $\sum_1^m t_i\alpha_i$ 的向量，其中 $(t_1,\cdots,t_m)'$ 跑遍 E_m，构成一个子空间 $\mu(\alpha)$，其维数 k 等于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中线性无关向量的个数.现问：若 $(t_1,\cdots,t_m)'$ 局限于 E_m 之一 s维子空间 G 时，情况如何.证明：集合 $\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots t_m)'\in G\}$ 仍为一子空间，其维数为 $s-\dim(G\cap F)$，其中 $F=\{(t_1,\cdots,t_m)':\ t_1\alpha_1+\cdots+t_m\alpha_m=0\}$.

证. 记 $B=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in G\right\}$, $\dim(G)=s$

B为子空间易证.记$D=G\cap F$，则$D\subset G$.以C记D在G内的正交补子空间，则 $\dim(C)=\dim(G)-\dim(D)$ 且显然有 $B=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in C\right\}$，因而

$$\dim(B)\leqslant\dim(C) \qquad (9)$$

另一方面，易见当 $(t_1,\cdots,t_m)'$和 $(t_1',\cdots,t_m')'$ 都属于 C 时，有

$$(t_1,\cdots,t_m)\neq(t_1',\cdots,t_m')\Rightarrow\sum_1^m t_i\alpha_i\neq\sum_1^m t_i'\alpha_i \qquad (10)$$

事实上，若记 $(r_1,\cdots,r_m)=(t_1,\cdots,t_m)-(t_1',\cdots,t_m')$，

则 $(r_1,\cdots,r_m)'\in C$，且当$\sum_1^m t_i\alpha_i=\sum_1^m t_i'\alpha_i$时，有

$\sum_1^m r_i\alpha_i=0$，故又有 $(r_1,\cdots,r_m)'\in D$，因为$C\perp D$有 $(r_1,\cdots,r_m)'=0$. 这证明了(10).由(10)知$\dim(B)\geqslant\dim(C)$. 与(9)结合，得

$\dim(B)=\dim(C)=\dim(G)-\dim(D)=s-\dim(G\cap F)$.

注1.记

$A=(\alpha_1\vdots\cdots\vdots\alpha_m)$, $B=(\beta_1\vdots\cdots\vdots\beta_p)$

这里$\beta_1,\cdots,\beta_p$为任一组向量，其生成的线性子空间为G. 又以$N(A)$记子空间 $\{x:\ Ax=0\}$，而将 G 记为$\mu(B)$，则本题结果可写为（$rk(A)$表示A的秩）

$$rk(AB)=rk(B)-\dim(N(A)\cap\mu(B)).$$

12.设11题中的 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$, $i=1,\cdots,m$.记

$\beta_j=(a_{1j},\cdots,a_{mj})'$, $j=1,\cdots,n$

又设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 为 E_m 中给定的 k 个向量，而

$F=\{t=(t_1,\cdots,t_m)':\ (t,\gamma_i)=0,\ i=1,\cdots,k\}$

$$G=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\quad (t_1,\cdots,t_m)'\in F\right\}.$$

则

$$\dim(G)=\dim[\mu(\beta_1,\cdots,\beta_n,\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] - \dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] \tag{11}$$

证. 以 D 记 $\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$ 的正交补子空间，则

$$G=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in D\right\}$$

$\dim(D)=m-\dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)]$.依第11题，有

$$\dim(G)=m-\dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)]-\dim(D\cap Q) \tag{12}$$

此处$Q=\left\{(t_1,\cdots,t_m)':\ \sum_1^m t_i\alpha_i=0\right\}$.但

$$t=(t_1,\cdots,t_m)'\in D\cap Q \Longleftrightarrow (t,\gamma_i)=0,\ (t,\beta_j)=0,\quad i=1,\cdots,k,j=1,\cdots,n$$

故由线性方程组理论中，齐次方程解空间维数之公式，有

$$\dim(D\cap Q)=m-\dim[\mu(\beta_1,\cdots,\beta_n,\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] \tag{13}$$

以(13)代入(12)即得(11).

注2.本题结果可表为下面的形式，它在线性模型一般理论中常用：设 X 和 H 分别为 $n\times p$ 及$m\times p$矩阵，而

$F=\{X\beta:\ H\beta=0\}$. 则 $\dim(F)=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}X\\H\end{pmatrix}-\mathrm{rk}(H)$.

13.找出δ，使方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3=4\\4x_1\qquad+6x_3=1\\\qquad-2x_2+4x_3=7+\delta\end{cases}$$

有解.

解：由第1、2方程解出 x_2，x_3（通过 x_1 表出），

再代入第3方程。得到当且仅当$\delta=0$时，上述方程组有解。

14. 证明：方程组

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=\delta_1 \\ 3x_1+4x_2+x_3+7x_4=\delta_2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=\delta_3 \end{cases} \tag{14}$$

对任何 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 有解。决定其一切解以及其长度最小的解。

证. 由于三个向量 $(4,3,2,8)'$，$(3,4,1,7)'$ 和 $(1,1,1,1)'$ 线性无关，知方程组(14)的系数矩阵及其增广矩阵的秩都为3。故必有解（对任何 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$）。

为了求出(14)的通解，先求出(14)之一特解。取 $x_4=0$ 代入(14)，用简单的消去法不难解出

$\tilde{x}_1=(3\delta_1-\delta_2-5\delta_3)/4$，　$\tilde{x}_2=(-\delta_1+\delta_2+\delta_3)/2$，$\tilde{x}_3=(-\delta_1-\delta_2+7\delta_3)/4$。然后再求出(14)的齐次方程组的通解：置 $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$，$x_4=1$，解出 $x_1=-2$，$x_2=0$，$x_3=2$。因而(14)之通解为 (x_1,x_2,x_3,x_4) $=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,0)+k(-2,0,2,1)$，$k$ 任意。再计算出 $\sum_1^4 x_i^2$，它是 k 的一个二次多项式，容易证明其最小值在 $k=(11\delta_1-\delta_2-29\delta_3)/56$ 时达到。

15. 设以0，1，2表剩余类（mod 3），它构成一个有三个元素的 Galois Field，即GF(3)。其加、乘法按通常的方式定义，若以 x_1,x_2,x_3 记在GF(3)中取值的变元，找出方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2\quad\ =0 \end{cases} \tag{15}$$

的解空间的一基底。考察一下是否存在一解，可表为方程组

的诸行向量的非零线性组合（这种情况在实数域和复数域中不可能。）又，解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \tag{16}$$

解. 由(15)第二式减去第一式，得 $x_2 = x_3$. 又由第二式，并注意 $3x_2 = 0$，有 $x_1 = -2x_2 = x_2$. 故 $x_1 = x_2 = x_3$. 由此知通解为 $k(1,1,1)$. 解空间之一基底为 $(1,1,1)$. 显然，(15)任一解皆可表为方程组行向量之线性组合.

这个情况在实、复数域中不可能（除非解为0，否则必不能表为方程组行向量之线性组合）. 这是很明显的，因若以 $\alpha_1',\cdots,\alpha_m'$ 表方程组的 m 个行向量，则任一解 x' 满足条件 $\alpha_i' x = 0$，$i = 1,\cdots,m$. 因而 $x \in [\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)]^{\perp}$. 如又有 $x \in \mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，则将有 $x \perp x$ 而 $x = 0$.

为解(16)，以2乘第一方程并减去第二方程，得 $4x_2 - x_3 = 0$ 即 $x_2 = x_3$. 由此得出其通解为 $(a,b,b,1-a-2b)$，$a.b = 0,1,2$.

16. 证明：x在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 所生成的线性子空间上的投影为 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$，其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为方程组

$$\begin{cases} a_1(\alpha_1,\alpha_1) + \cdots + a_m(\alpha_1,\alpha_m) = (x,\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1(\alpha_m,\alpha_1) + \cdots + a_m(\alpha_m,\alpha_m) = (x,\alpha_m) \end{cases} \tag{17}$$

之任一解. 证明垂线之长为 $\left[\|x\|^2 - \sum_1^m a_i(x,\alpha_i)\right]^{\frac{1}{2}}$.

证. x 在上述子空间内的投影（记为 ξ）存在且唯一（见P.10.(iii)）. 且当然有 $\xi = \sum_1^m a_i\alpha_i$ 的形状. 为了 ξ 是投影，充要条件为 $(x-\xi,\alpha_i) = 0$，$i = 1,\cdots,m$. 即

$$(x,\alpha_i)=(\zeta,\alpha_i)=\sum_{j=1}^{m}a_j(\alpha_j,\ \alpha_i)$$

即充要条件为 $a_1,\cdots,a_m$ 满足方程组(17).

由上面提到的 x 的投影的存在性，知(17)必有解.根据线性方程组的理论也不难直接证明(17)有解. 事实上，若记

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_m'\end{pmatrix} \tag{18}$$

则方程组(17)的系数方阵为AA'，而右端向量为 Ax. 但 $Ax\in\mu(A)$，而$\mu(A)=\mu(AA')$，因而 $Ax\in\mu(AA')$故相容性条件满足.

$\sum_1^m a_i\alpha_i$ 的唯一性由投影的唯一性得出，也可直接证明如下：设$(a_1,\cdots,a_m)$和 $(\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_m)$ 为(17)的两组解，则用上述记号，并令 $b=(a_1-\tilde{a}_1,\cdots,a_m-\tilde{a}_m)'$，有

$$AA'b=0$$

因而 $b'AA'b=0$，即 $\|A'b\|^2=0$，即

$$A'b=\sum_1^m \alpha_i(a_i-\tilde{a}_i)=0$$

这证明了 $\sum a_i\alpha_i$ 的唯一性.

又垂线之长为

$$l=\|x-\sum_1^m a_i\alpha_i\|$$

由(17)，有

$$l^2=\|x\|^2-2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)+\sum_{i,j=1}^{m}a_ia_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$=\|x\|^2-2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)+\sum_{i=1}^m a_i\sum_{j=1}^m a_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i) + \sum_1^m a_i(x,\alpha_i)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^m a_i(x,\alpha_i).$$

而投影之长为

$$\|\sum_1^m a_i\alpha_i\| = \left\{\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

17. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 R^k 中的向量.在

$$(b,\alpha_i) = p_i, \quad i = 1,\cdots,m \tag{19}$$

的条件下，求$(b,b) = \|b\|^2 = \sum_1^k b_i^2$的最小值.此处 $p_1,\cdots,p_m$ 为给定的常数.

解. 考虑任一适合条件(19)的向量 b，则依 16 题，b 在 $\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上的投影为 $\sum_1^m a_i\alpha_i$，其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为方程组

$$\begin{cases} a_1(\alpha_1,\alpha_1) + \cdots + a_m(\alpha_1,\alpha_m) = p_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1(\alpha_m,\alpha_1) + \cdots + a_m(\alpha_m,\alpha_m) = p_m \end{cases} \tag{20}$$

之解.由于(20)与 b 无关，可知：任何适合条件(19)的 b 在 $\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上的投影唯一.这就说明，对任何这样的 b，有

$$\|b\|^2 \geqslant \|\sum_1^m a_i\alpha_i\|^2$$

其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为(20)的任一解.特别，取$b = \tilde{b} = \sum_1^m a_i\alpha_i$ ($a_1,\cdots,a_m$ 为(20)任一解)，则易见(19)成立，而依第 16 题的论证，有

$$\|\tilde{b}\|^2 = \sum_1^m a_ip_i$$

若以 C 记以(α_i,α_j)为其(i,j)元的方阵(即上题的 AA')，则最小值可表为

$$\|\widetilde{b}\|^2 = P'C^-P$$

此处 $P=(p_1,\cdots,p_m)'$，而 C^- 为 C 之任一广义逆.（在此题中，当然应假定 $P\in\mu(A)$（A 见（18））即 $P\in\mu(C)$. 在此条件下，$P'C^-P$ 与 C^-的取法无关）.

18. steintz 替换定理：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为向量空间V的一组基，而 $\beta_1,\cdots,\beta_p(p<k)$为 V 中的线性无关向量.则可在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中选出 $k-p$ 个向量，记为 $\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(k-p)}$，使 $\beta_1,\cdots,\beta_p,\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(k-p)}$构成$V$的一组基.

证. 见第 1 题.

19. 设 α,β 都是长为 1 的向量，则

$|(\alpha,\beta)|=1\Rightarrow\alpha=c\beta$，其中 $|c|=1$.

证. 取 $c=(\alpha,\beta)$，则 $|c|=1$，且

$$\|\alpha-c\beta\|^2=\|\alpha\|^2+|c|^2\|\beta\|^2-2c\overline{(\alpha,\beta)}$$
$$=1+1-2|(\alpha,\beta)|^2=0$$

这证明了 $\alpha=c\beta$.

（二） 第 二 組 題 解

1. 矩阵的秩. 以 $rk(A)$记A 的秩.

1.1. $rk(AB)\leqslant\min(rk(A),\ rk(B))$.

证. 由于 $rk(A)=\dim(\mu(A))=\dim(\mu(A'))$，而 $\mu(AB)\subset\mu(A)$，故

$$rk(AB)=\dim(\mu(AB))\leqslant\dim(\mu(A))=rk(A),$$
$$rk(AB)=rk(B'A')=\dim(\mu(B'A'))$$
$$\leqslant\dim(\mu(B'))=rk(B)$$

得证.