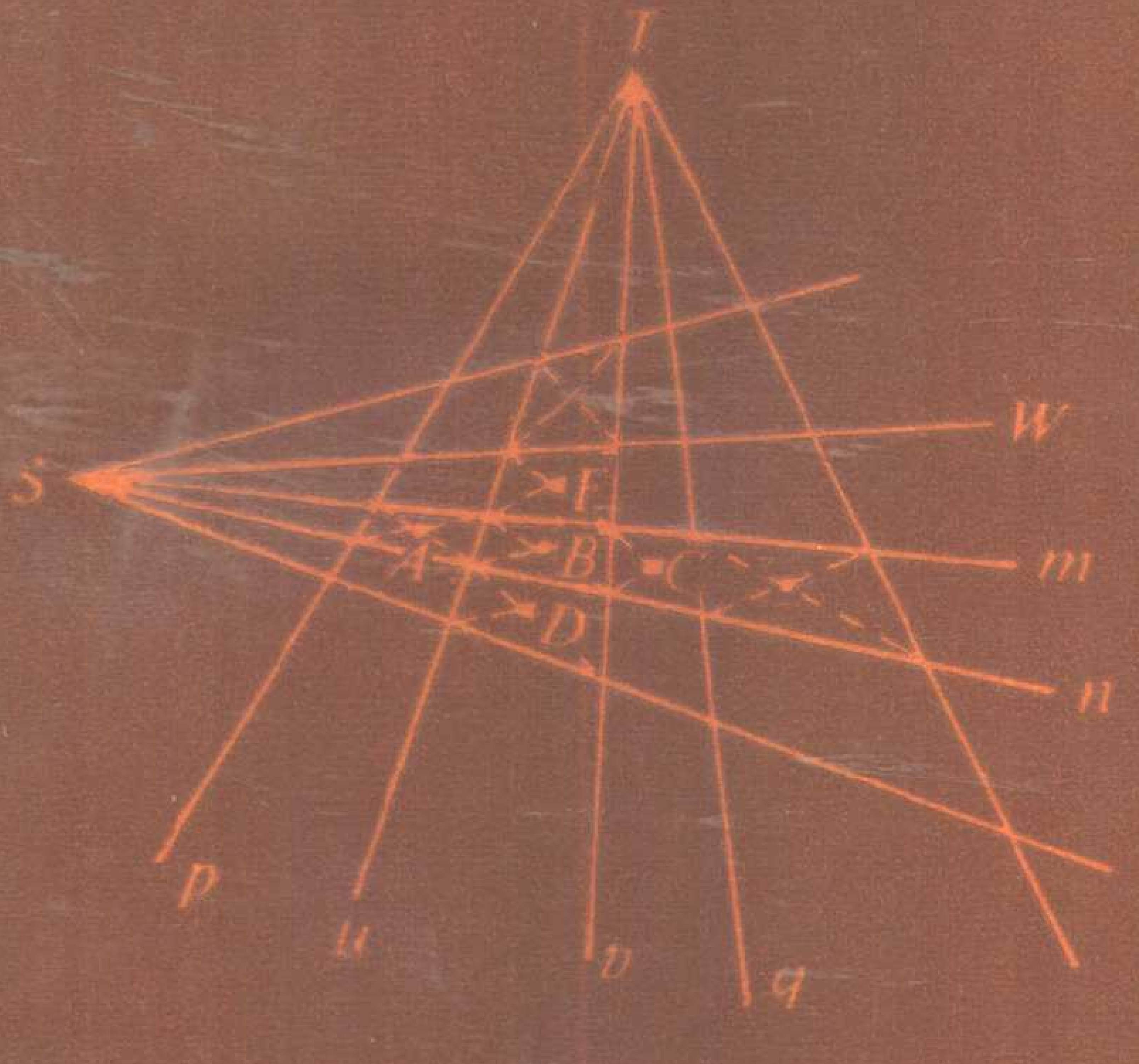
高等学校教学参考书

几何学及拓扑学习题集

李质朴



北京师范大学出版社

几何学及拓扑学习题集

（附解题指导和答案）

主编〔苏〕B. T. 巴兹列夫
李质朴　译
朱鼎勋　校

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书译自〔苏〕B.T.巴兹列夫主编的"几何学及拓扑学习题集"。全书共分五篇二十章。其中包括平面、空间解析几何，仿射、射影几何，画法几何，微分几何，几何基础，非欧几何和拓扑学等方面的习题共1863个。一些习题附以答案；另一些附以解法。全书选题新颖，内容精炼，习题典型。

本书可作为高等院校师生及有关科技人员的参考书。

几何学及拓扑学习题集
（附解题指导和答案）

主编〔苏〕B.T.巴兹列夫
李质朴 译 朱鼎勋 校

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京大兴北藏乡印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：11.625 字数：283千
1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷
印数：1—20,500
统一书号：13243·81 定价：2.90元

序　言

供高等师范院校学生使用的这本几何习题集，包括师范院校教学大纲各篇章中所需要的习题与练习题近1900道。本习题集期望为《几何学》Ⅰ、Ⅱ卷（B. T. 巴兹列夫、K. И. 杜尼切夫、B. П. 伊娃尼茨卡娅集体编写的）教材中叙述的理论教程提供足够的习题资料。众所周知，上述的理论教程与其它教材显著的区别是：和中学的几何课本的内容有着紧密的内在联系，并在理论观点及教学方法上都有独到的见解。因此编写适用这本教材的习题集是必要的。

旨在加强对未来中学数学教师有关几何方面教学的专业训练，本习题集通常都采用了中学几何课本的图形，从而大学生们不仅在课本的相宜篇章，而且在习题资料中都能够深入地研究将在中学所遇到的《图形宝库》。

全部习题依次按1977年高等师范院校几何学教学大纲中的篇章排列。补充的一章内容是大纲说明书中规定有关平面几何的计算题。各篇章中习题数量的多少取决于大纲对掌握各篇章习题的要求及它与中学几何课本联系的密切程度。

习题集由各编写组（莫斯科组：B. T. 巴兹列夫、K. И. 杜尼切夫、B. П. 伊娃尼茨卡娅；雅罗斯拉夫里组：Г. Б. 库兹聂索娃、B. M. 马尤洛夫、З. A. 斯柯别茨）各自准备本习题集的大约一半习题。别拉诺卡娃供给了许多习题，全体编者对她表示谢意。

题集中的某些习题可供大学生几何活动小组使用或作为专修班基础作业之用。

全体编者

译者的话

全书共分五篇二十章。其中包含平面、空间解析几何，仿射、射影几何，画法几何，微分几何，几何基础，非欧几何，拓扑学等方面的习题共1863个。其中一些配备了答案，另外一些还附以解法。除选进一些常见的典些习题外，还增选了大批习题，它们的特点是：

1．完全用近代集合论的观点来处理问题；

2．各种几何间选题彼此密切配合，且多指导初等几何；

3．拓扑学选题时，注意一些概念的具体背景，并与几何密切结合，如曲线论、曲面论等；

4．补充一些新知识，如韦尔（H.Weyl）公理体系。

全书选题新颖、内容精炼、习题典型，这样可以使读者获得触类旁通之效。

书中出现的非帝俄及苏联数学家均用俄文表示，译者均改用这些数学家原名来表示。对原书中明显错误以及印刷上的错误，译者作了订正，个别习题答案核对有错的已改正，并附以略解，如547题、238题之（5）等。书末的中文索引附有俄、英对照以供参考。限于译者水平，译文难免有疏漏不妥、甚至有误，习题答案以及解法也可能有不妥之处，诚望读者批评指正。

目前国内高等学校几何课程，特别是高等几何课程习题来源较少，此书的出版将供各种类型本科、专科数学专业师生参考采用。

在本书翻译过程中，承蒙北京师范大学朱鼎勋教授给予极大鼓励与指导，对全书译稿认真审阅和热忱帮助，并指出原书的一些错误，使译文的质量有明显的提高。译者在此谨向朱鼎勋教授表示衷心的感谢。

译　者　　1984年3月20日

目　　录

第一篇　向量代数初步　平面解析几何

第一章　向量 …… 3

§1　向量、向量加法、数乘向量 …… 3

§2　向量的坐标 …… 7

§3　向量的数量积 …… 9

第二章　平面坐标法 …… 14

§1　平面坐标系 …… 14

§2　直线、圆 …… 17

§3　杂题 …… 28

第三章　平面变换 …… 35

§1　映射 …… 35

§2　位移 …… 36

§3　相似 …… 43

§4　仿射变换 …… 46

§5　变换群 …… 51

§6　杂题 …… 53

第四章　二次曲线 …… 58

§1　椭圆 …… 58

§2　双曲线 …… 62

§3　抛物线 …… 65

§4　二次曲线的一般方程 …… 67

第二篇　欧氏空间和仿射空间的直线　平面和二次曲面

第一章　空间坐标法、向量积和混合积 …… 73

§1　空间坐标法 …… 73

§2　向量积 …… 76

§3　混合积 …… 78

第二章　平面和直线 …… 81

§1 平面 ………………………………………………… 81
§2 直线、直线与平面 …………………………………… 87
§3 杂题 ………………………………………………… 92
第三章 二次曲面 ………………………………………… 95
§1 二次柱面和锥面、旋转曲面 ………………………… 95
§2 椭圆面 ……………………………………………… 98
§3 双曲面 ……………………………………………… 101
§4 抛物面 ……………………………………………… 107
第四章 n维仿射空间和n维欧氏空间 …………………… 110
§1 n维仿射空间 ……………………………………… 110
§2 n维欧氏空间 ……………………………………… 116
第五章 二次形和二次曲面 ……………………………… 125
§1 双线形和二次形 …………………………………… 125
§2 二次曲面 …………………………………………… 127
第六章 凸多面体 ………………………………………… 131
§1 凸的图形、凸多面体 ……………………………… 131
§2 正多面体、半正多面体 …………………………… 133
第三篇 射影空间 映象法
第一章 射影空间 ………………………………………… 139
§1 射影空间、射影坐标 ……………………………… 139
§2 笛沙格定理 ………………………………………… 144
§3 射影映射和射影变换 ……………………………… 146
第二章 射影几何的基本论据 …………………………… 150
§1 交比、调和四元组、完全四点形 ………………… 150
§2 直线和平面的射影变换 …………………………… 152
§3 射影平面上的二次曲线 …………………………… 156
§4 仿射平面和欧氏平面的射影法 …………………… 160
第三章 欧氏平面的几何作图 …………………………… 162
§1 相交法 ……………………………………………… 162
§2 变换法 ……………………………………………… 163
§3 代数法 ……………………………………………… 165
§4 杂题 ………………………………………………… 167

第四章　映象法……………………………………………………………………169
§1　平行射影法……………………………………………………………………169
§2　轴测法……………………………………………………………………171
§3　位置问题和度量问题……………………………………………………………………173
§4　蒙日法……………………………………………………………………177
§5　透视法……………………………………………………………………178
第四篇　几何基础　非欧几何
第一章　几何基础……………………………………………………………………183
§1　公理法的一般问题……………………………………………………………………183
§2　韦尔公理系统、中学几何学公理系统……………………………………………………………………184
第二章　非欧几何……………………………………………………………………189
§1　球面几何……………………………………………………………………189
§2　黎曼椭圆几何……………………………………………………………………194
§3　罗巴切夫斯基双曲几何……………………………………………………………………196
第五篇　拓扑学初步　欧氏空间的曲线和曲面
第一章　拓扑学初步……………………………………………………………………201
§1　拓扑空间、同胚……………………………………………………………………201
§2　流形、欧拉特征数……………………………………………………………………203
第二章　欧氏空间曲线……………………………………………………………………206
§1　光滑曲线、切线、弧长……………………………………………………………………206
§2　曲线的典型标架、曲率和挠率……………………………………………………………………210
第三章　欧氏空间曲面……………………………………………………………………216
§1　光滑曲面、切平面和法线……………………………………………………………………216
§2　曲面的第一基本二次形式……………………………………………………………………218
§3　曲面的第二基本二次形式……………………………………………………………………223
附录　平面几何计算题……………………………………………………………………226
§1　三角形……………………………………………………………………226
§2　多边形……………………………………………………………………231
§3　圆周和圆……………………………………………………………………233
解题指导和答案……………………………………………………………………237
参考书目……………………………………………………………………333
名词索引……………………………………………………………………334

第一篇

向量代数初步
平面解析几何

第一章 向　　量

§1 向量、向量加法、数乘向量

1. 已知平行六面体 $ABCDA'B'C'D'$. 在诸有向线段 $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$中，指出下列各线段：(a) 与$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB'}$相等的；(b) 与$\overrightarrow{AA'}$平行但不相等。

2. 设 A, B, C, D为任意四点，并设 M, N, P, Q 分别为线段〔AB〕,〔BC〕,〔CD〕,〔DA〕的中点。证明有向线段$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{QP}$相等。

3. 证明:所有有向线段的集合 W 上的相等关系是等价关系，即它有反身性、对称性和传递性。

4. 已知有向线段集合 W 上的关系 τ，且若关系 τ 为

$(\overrightarrow{AB}\ \tau\ \overrightarrow{CD}) \Longleftrightarrow (|AB|=|CD|, \overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD})$ $(\forall \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{CD}\in W)$.

试问它是否是等价关系?

5. 证明：所有非零向量集合上的共线关系是一个等价关系．为什么该关系不是所有向量集合上的等价关系?

6. 已知向量 $\vec{a}$, 其长等于3．求与 $\vec{a}$ 反向的向量 $\vec{b}$，设$|\vec{b}|=5$．

7. 设M是三角形ABC的重心(中线交点),证明 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$,并且对任意点$O$等式 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 成立。

8. 设 M, N, P, Q 是五边形$ABCDE$ 各边〔AB〕,〔CD〕,〔BC〕,〔DE〕的中点，而 K, L 是线段〔MN〕,〔PQ〕的中点，证明直线 (AE) 和 (KL) 平行且 $|KN|=\frac{1}{4}|AE|$.

9. 把四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件写成向量形式。

10. 利用向量写出点 A, B, C, D 是梯形 $ABCD$ ($(AB)\parallel(CD)$) 顶点的条件。

11. 给定了三点 A, B, C. 作出点 Q，使得 $\overrightarrow{QA}-2\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{O}$.

12. A, B, C, D 是空间的任意点，作出线段 $[AD]$ 和 $[BC]$ 的中点 M 与 N. 证明：$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

13. 将点本身及以该点为心的心反射用同一字母表示。证明，为使点 C 是线段 $[AB]$ 的中点，充要条件是使反射的合成 $C\circ B\circ C\circ A=e$，其中 e 是恒等变换。

14. 已知封闭折线 $ABCD$. 点 K, L, M, N 按同一比值 $\lambda\neq1$ 分各线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. 证明：如果 $KLMN$ 是平行四边形，则 $ABCD$ 也是平行四边形。当 $\lambda=1$ 时，此命题是否仍然正确?

15. 对二非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，在什么条件下才可能有下列各等式：(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; (2) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda(\vec{a}-\vec{b})$; (3) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; (4) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; (5) $|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$; (6) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

16. 证明存在一个三角形，其各边都相等并且平行另一三角形的三中线。

17. 点 M_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 各面的重心，而其各面的对顶点是 A_i. 证明各线段 $[A_iM_i]$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 通过一点 M、而 $(A_iM_i, M)=3$，且 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=\overrightarrow{O}$.

18. 点 M 是正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心。证明：$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=\overrightarrow{O}$，并且对任意点 O 下列等式成立：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right).$$

19. 证明对每个有限点集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n>1)$ 都存在唯一点

M，使得$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=\overrightarrow{O}$，并对任意点$O$下列等式成立：$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right)$.

20．将点 M 是三角形 ABC 中线交点（重心）的充要条件写成向量形式。

21．将点本身及以该点为心的心反射用同一字母表示。证明点 M 是三角形 ABC 的重心，当且仅当反射的合成

$$M\circ C\circ M\circ B\circ M\circ A=e$$

其中e是恒等变换。

22．用有向线段 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 构成一平行六面体。证明该平行六面体的对角线〔OD〕与平面(ABC)相交于三角形 ABC 的重心 M 处。

23．证明：四面体四个侧面的四个重心，是其位似四面体的顶点。

24．位于各点 M_1, M_2，…，M_n 处的质量为 m_1，m_2，…，m_n. 已知半径向量$\overrightarrow{OM_i}=\overrightarrow{r_i}$ ($i=1$，…，n)．（1）求该质点系重心的半径向量，（2）如果 $m_1=m_2=\cdots=m_n$，则和$\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+\cdots+\overrightarrow{MM_n}=\overrightarrow{O}$.

25．若点 P 与 Q 分别是线段〔AB〕和〔CD〕的中点。证明线段〔AC〕，〔BD〕，〔PQ〕的中点共线。

26．已知四面体$ABCD$和两点P、Q，以及(AB，P)＝(CD，Q)．证明线段〔AC〕，〔BD〕，〔PQ〕的中点共线。

27．在空间里给出了两个三点组A，B，C和A_1，B_1，C_1，并且(AC，B)＝(A_1C_1，B_1)．证明线段〔AA_1〕、〔BB_1〕、〔CC_1〕的中点共线。

28．证明：要使点C属于直线(AB)，必须且亦只需有这样的数 α，使$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$ 其中O是任意点。

29．证明：要使点C属于射线〔AB〕，必须且亦只需有这样的非负数α，使$\overrightarrow{OC}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}$其中$O$是任意点。

30．已知：$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$．二数$\alpha$和$\beta$满足什么条件，才

能使点C属于：（1）直线(AB)；(2)射线$[AB)$；(3)线段$[AB]$。

31．点M与N按等比分两个有向线段$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$．证明向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{MN}$共面。

32．证明要使四点A_1，A_2，A_3，A_4共面，必须且亦只需

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_1\overrightarrow{PA_1}+\alpha_2\overrightarrow{PA_2}+\alpha_3\overrightarrow{PA_3}+\alpha_4\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{O}\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\end{array}\right\}$$

其中P是任意点且至少有一个$\alpha_i\neq 0$.

33．过四面体$OABC$的棱$[OA]$和侧面ABC的重心引一直线，该直线与平面(OBC)相交于D点。证明：$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

34．过三角形ABC的一顶点C引直线l，它与直线(AG)和(BG)的交点分别为A_1和B_1，其中G是三角形的重心。证明：$(AA_1, G)+(BB_1, G)=1$.叙述并证明其逆命题。

35．已知三角形ABC及点A_0、B_0、C_0，以及$(BC, A_0)=\lambda_1$，$(CA, B_0)=\lambda_2$，$(AB, C_0)=\lambda_3$.证明：要使三点A_0、B_0、C_0属于一条直线，必须且亦只需$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$(**梅涅劳**(Menelaus)**定理**)。

36．某直线与各直线(BC)，(CA)，(AB)分别相交在点A_1，B_1，C_1.证明三个向量$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1A_1}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$共线。

37．证明：要使四边形的两个对边平行，必须且亦只需连接它们中点的线段过对角线的交点。

38．证明：要使四边形是平行四边形，必须且亦只需连接它对边中点的线段通过其对角线的交点。

39．三点B_1，B_2，B_3分别属于三角形$A_1A_2A_3$的各边，并且两个三角形$A_1A_2A_3$和$B_1B_2B_3$的重心重合。证明点B_1，B_2，B_3分三角形$A_1A_2A_3$各边成等比。

40．过平行四边形两个对顶点引与边或边的延长线交成四点的两条直线。证明此四点是梯形的顶点或是平行四边形的顶点。

41．验证复数$a+bi$ $(i^2=-1,\ a,\ b\in R)$的集合构成**向量空间**。

42．各元素取自已知域K的n行一列的矩阵称作《向量》，并且

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},\quad \lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix}$$

证明：这样矩阵的集合构成向量空间。

43．设 C 是在区间$[a, b]$上给定的连续函数的集合。验证自然运算为 $f(x)+g(x)$，$\lambda f(x)$，$(\lambda\in R,\ f,\ g\in C)$ 的集合C 能成为向量空间。

44．设V'和 V'' 是向量空间 V 的子空间。证明它们的交集也是向量子空间。

§2 向量的坐标

45．已知梯形$ABCD$ $(\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{AB})$ 。点 M 和 N 是底$[AB]$与$[DC]$的中点，$(AC)\cap(DB)=P$

（1）取向量 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$作基底，求诸向量 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PB}$ 的坐标。

（2）取向量 $\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PB}$ 作基底，求诸向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$ 的分解式。

46．在三角形 ABC 内作角 A 的平分线$[AD]$.将向量 $\overrightarrow{AD}$ 按向量 $\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$ 分解。

47．在平面上，对某个基底用其坐标给出了三个向量：$\vec{a}(4, -2)$、$\vec{b}(3, 5)$、$\vec{c}(-2, -12)$。将向量 $\vec{c}$ 表示成向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$的线性组合。

48．已知非共线向量$\vec{a}$，$\vec{b}$．证明向量组 $\vec{m}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ **线性相关**，而向量$\vec{n}$，$\vec{p}$，不共线。将向量 $\vec{m}$ 按向量$\vec{n}$,$\vec{p}$分解。

49．向量$\vec{a}$对于基底$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$的坐标是（2，1）．求向量$\vec{a}$对基底$\vec{e}'_1$，$\vec{e}'_2$的坐标，假设(1)$\vec{e}'_1=4\vec{e}_1$，$\vec{e}'_2=-\dfrac{2}{3}\vec{e}_2$；(2)$\vec{e}'_1=3\vec{e}_1-$

$\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2$。

50．设 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是空间 V 的基底。证明向量 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$，$\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$共线，当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0 .$$

51．设点 M 是三角形 ABC 的重心。求各向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$对基底 $\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$的坐标。

52．设点M是三角形 ABC 的重心。分解：（1）$\overrightarrow{MA}$按向量$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$；（2）$\overrightarrow{AB}$ 按向量 $\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$；(3) $\overrightarrow{OA}$ 按向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OM}$；这里 O是空间的任意点。

53．四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与平行四边形 $ABCD$ 关于平面(ABC)外一点O 对称。取向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$作基底，求向量$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{DD_1}$及$\overrightarrow{AP}$的坐标，其中 P 是$[A_1B_1]$的中点。

54．在就基底 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$给出的各向量 $\vec{a}(0, -3, 0)$，$\vec{a}_2(-2, 0, 5)$，$\vec{a}_3(0, 2, -1)$，$\vec{a}_4(0, 0, 4)$，$\vec{a}_5(1, 0, 0)$，$\vec{a}_6(0, 1, -3)$，$\vec{a}_7(1, -2, 3)$，$\vec{a}_8(0, 0, 0)$ 里，指出下列向量：（1）与$\vec{e}_2$共线的；（2）与向量 $\vec{e}_2$和$\vec{e}_3$ 共面的。

55．对基底$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$给出了向量 $\vec{p}(-3, 6, -13)$，$\vec{a}(1, 0, -2)$，$\vec{b}(1, -1, 3)$，$\vec{c}(-2, 3, 0)$．将向量$\vec{p}$表示成向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的线性组合。

56．已知三个不共面向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$．设$\overrightarrow{AB}\in\vec{e}_1$，$\overrightarrow{AC}\in\vec{e}_2$ $\overrightarrow{CD}\in\vec{e}_3$，$\overrightarrow{AB_1}\in\alpha\vec{e}_1$，$\overrightarrow{CD_1}\in\alpha\vec{e}_3(\forall\alpha\in R)$．证明三向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{B_1D_1}$共面。

57．点 O 是直角三角形 ABC 斜边的中点。点 D 关于直线(AB)与顶点 C 对称。证明：

$$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}-(2\cos 2\hat{A})\ \overrightarrow{OA} .$$

58．从点 O 截取二有向线段 $\overrightarrow{OA}\in\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}\in\vec{b}\ (\vec{a}\nparallel\vec{b})$．用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示与角 AOB 的平分线共线的任一向量。

59．在空间里给出了这样的三点 A，B，C：$(AB, C)=\lambda$ 和任一点$M\notin(AB)$．分解：(1) $\overrightarrow{MC}$按 $\overrightarrow{MA}$和 $\overrightarrow{MB}$；(2) $\overrightarrow{MB}$按 $\overrightarrow{MA}$ 和

$\overrightarrow{MC}$；(3) $\overrightarrow{AB}$ 按 $\overrightarrow{MA}$ 和 $\overrightarrow{MC}$.

60．设点 P 与 Q 是四面体二对棱〔BC〕和〔AD〕的中点，G 是它的重心。取向量 $\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$ 作基底，求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标。

61．给出了三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$．取向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 作基底，求向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标。其中 M 是平行四边形 BCC_1B_1 的中心，N 是三角形 $A_1B_1C_1$ 的重心。

62．棱锥 $SABCD$ 的底是平行四边形 $ABCD$．取向量 $\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$ 作基底，求各向量 $\overrightarrow{SD}$，$\overrightarrow{SM}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AP}$ 的坐标。其中 M 是线段〔AD〕的中点，而 $(BC, P)=2$。

§3 向量的数量积

63．证明向量 $\vec{p}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{q})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{q})$ 和 $\vec{q}$ 相互垂直。

64．对标准正交基给出了 $\overrightarrow{AB}(2,\ 2,\ 1)$ 及 $\overrightarrow{BC}(1,\ 4,\ 8)$．求 $\cos\widehat{ABC}$．

65．向量的数量积是否具有下述实数乘积的类似性质：(1) 若 $ab=0$，则 a 与 b 中至少有一个数等于零；(2) $ab=ba$；(3) 若 $ab=cb$；且 $b\neq 0$，则 $a=c$；(4) $(a+b)\ c=ac+bc$；(5) $a(bc)=(ab)c$．

66．已知平行四边形 $ABCD$．说明下列各等式的几何意义：(1) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$；(2) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2)$；(3) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2$.

67．已知三非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，并且向量 $\vec{a}$ 不与向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 正交。试问在什么条件下等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 成立？

68、证明：在三角形 ABC 里，角 ABC 是直角，当且仅当 $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$.

69．证明：三角形三中线长的平方和等于其边长平方和的 $\frac{3}{4}$.