

公共课系列 2001年研究生入学考试应试指导丛书

3

2001
2001

策划：北京大学研究生院

Entrance Exams for MD

研究生入学考试

数学

应试指导

(工学类)

邵士敏 主编

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

2001年研究生入学考试
数学应试指导
(工学类)

主 编 邵士敏

撰稿人 邵士敏 娄元仁 文 丽

邵士敏 娄元仁 文丽 张立昂

北 京 大 学 出 版 社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

2001年研究生入学考试数学应试指导.工学类/邵士敏主编. —北京:北京大学出版社, 2000.3

ISBN 7-301-04476-3

(2001年研究生入学考试应试指导丛书)

I. 2... II. 邵... III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03847号

书 名: 2001年研究生入学考试数学应试指导(工学类)

著作责任者: 邵士敏

责任编辑: 刘金海

标准书号: ISBN 7-301-04476-3/G·560

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62752014 编辑室 62752027

电子信箱: zpp@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京飞达印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850毫米×1168毫米 32开本 15.375印张 384千字

2000年4月第一版 2000年4月第一次印刷

定 价: 21.00元

前 言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考,我们按照教育部制定的全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求,编写了这本书.

本教程内容有高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步三部分,包括了新数学考试大纲数学一、二类(工学类)的全部内容.本书详尽地叙述了应考的基本概念、基本定理及计算公式,并配有尽可能多的典型例题,以便帮助读者深入理解概念,加强公式的运用.此外,还备有练习题及答案,可供读者复习时使用.

在编写过程中,我们研究了数学考试大纲对各部分内容要求的深度.书中对基本概念、基础知识的叙述,使之尽量符合大纲要求.我们还参考了近几年的试题,在选编典型例题时,既注意选编一些基本题,也选少量过去的试题,以提高考生的综合解题能力,使他们能较顺利地应考并进一步得到提高.本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法,书中就不另作说明.

本书可与作者同时编写的工学类“模拟试题”一书配合使用.

由于时间仓促,难免有疏误之处,诚望广大考生及众读者提供宝贵意见.

编 者

2000年2月于北京大学

前 言

数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识,还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力,让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物,用数学的思维方法分析、解决实际问题。

当代著名数学家、沃尔夫奖获得者 P. D. 拉克斯(Lax, Peter, D.)指出:“目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃,而且成就辉煌.但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其它科学的相互关系.这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的.纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始就做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程.”“在微积分里,学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉.最后,很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案.”数学家 C. 雷波特(Report, Cambridge)指出:“应该把数学内部及外部的应用都教给学生,使他对两个方面都明白:一是数学作为科学方法的效力,一是数学作为科学所应有的统一与美.在某种意义上,把数学的思考方式传递给我们智力工作的其余部分,就是数学的一个应用.”当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 H. 惠特尼(Whitney Hasselr)指出:“学数学意味着什么?当然是希望能用它,……最好的学习就是用,并且古今皆知仅在你有自己的想法时才有真正的学习.”著名数学教育家 H. 弗洛登塔尔(Freudenthel, Hans)指出:“数学源于现实,并且用于现实.”我很赞赏他们这些观点。

毋庸讳言,从知识的学习到知识的应用不是一件简单的、自然而然就能实现的事情,没有充分地、有意识地培养、训练和实践,没有表达应用观点的教学用书,学生的应用意识、兴趣和能力是不会

形成的,然而,目前国内大部分《高等数学》教学用书中的实例或习题,不仅应用面窄,局限于几何、物理居多;而且面孔陈旧,缺乏时代感.

为了在高等数学这一门重要基础课教学中,培养学生的应用意识、兴趣和能力,引导学生用所学的数学知识、方法去观察、分析、解决实际问题,北京数学会大学委员会经过讨论,认为很有必要编写一本高等数学应用实例的教学参考书,并责成我和姚金华同志负责组织北京有关高等院校的部分教师来编写.

经过有关院校的推荐和我们的邀请,参加编写此书的同志有:王强、王崇寿、孙洪祥、李卫国、李心灿、邵鸿飞、郑权、杨奇峰、姚金华、黄金坤、张建伟、曾庆黎,并由李心灿任主编、姚金华、邵鸿飞任副主编.

本书的编写过程是:先由正副主编总体构思设计,拟出编写要求、方案、计划,并提出一批主要可供参考的文献、书籍;通过全体编者认真讨论,分工阅读,又进一步收集了大量国内外的有关文献、书籍、教材,经过挑选或改编,共初选出了近 400 个实例;在此基础上,由正副主编主持在北京航空航天大学经过多次集体讨论,再由各编者分工进行修改;最后由正副主编初审、筛选、统稿、编排.

本书共汇集了 205 个应用实例.这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的;也有医学、航空航天、工程技术方面的;还有经济、管理、日常生活方面的.其中有不少实例贴近生活,贴近时代.这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容,其中也溶进了各位编者的专业知识和教学经验.这些实例,展示了高等数学在各学科领域的广泛而又有趣的应用.其中,一些较简单的实例,将使学生受到初步数学模型构建的训练,提高解决实际问题的兴趣;一些较难的实例,将使学生见识如何从实际问题归纳成数学问题,进而解决实际问题.著名科学家爱因斯坦(Einstein, Albert)有句名言:“只有‘热爱’才是最好的老师.”我们认为应该使高等数

内 容 简 介

本书编选了 205 个高等数学应用实例. 这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的, 也有医学、航空航天、工程技术方面的, 还有经济、管理、日常生活方面的. 这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容, 不仅展示了高等数学在各学科领域的广泛应用, 而且也引导读者利用其知识和方法去观察、分析、解决实际问题.

本书既可以作为高等数学教学参考书, 也可以作为数学爱好者学习高等数学的补充读物.

目 录

高等数学	1
一 函数、极限、连续	1
习题一	24
二 一元函数微分学	27
习题二	60
三 一元函数积分学	62
习题三	103
四 向量代数和空间解析几何	106
习题四	118
五 多元函数微分学	121
习题五	138
六 多元函数积分学	140
习题六	181
七 无穷级数	185
习题七	212
八 常微分方程	214
习题八	269
线性代数	272
一 行列式	272
习题一	285
二 矩阵	286

习题二	309
三 向量	311
习题三	328
四 线性方程组	329
习题四	340
五 矩阵的特征值与特征向量	342
习题五	350
六 二次型	351
习题六	358
概率论与数理统计初步	359
一 随机事件和概率	359
习题一	372
二 随机变量及其概率分布	375
习题二	389
三 二维随机变量及其概率分布	392
习题三	407
四 随机变量的数字特征	409
习题四	419
五 大数定律和中心极限定理	421
习题五	426
六 数理统计的基本概念	427
习题六	438
七 参数估计	439
习题七	451
八 假设检验	453
习题八	463
习题答案	464

59. 大衣柜能搬进新居吗	101
60. 心输出量	102
61. 为什么不宜制造太大的核弹头	103
62. 玻璃钢瓶还能用吗	105
63. 重力加速度问题	106
64. 钟表每天快多少	108
65. 如何计算储存在容器中苯的损失量	109
66. 石油的消耗量	112
67. 租客机还是买客机	112
68. 你会计算绕斜轴旋转而成的立体的体积吗	114
69. 学习曲线	119
70. 潜艇的观察窗问题	120
71. 垂直金属杆的长度问题	122
72. 如何求物体加热所需的热量	123
73. 怎样计算气体流经喷嘴的最快速度	124
74. 天然气产量的预测	127
75. 终身供应润滑油所需的数量	128
76. 如何标出椭圆柱油罐中油量的刻度	129
77. 如何用比较简便的方法计算椭圆周长	131
78. 地球环带的面积	133
79. 高尔夫球座的体积	134
80. 刚性棒的转动	135
81. 桶在海水中所受的压力	136
82. 大气压强问题	138
83. 转售机器的最佳时间	139
84. 力矩的功	140
85. 人口统计模型	142
86. 牙弓形状的数学模型	145
87. 单位时间内的血流量	146
88. 心脏输出量的测定	148
89. 呼出或吸入空气的速率	149
90. 估计某医院在某时间内的就医人数	150

91. 捕鱼成本的计算	151
92. 怎样计算均匀货币流的价值	152
93. 最大利润问题	154
94. 消费者剩余与生产者剩余问题	156
95. 最佳停产时间问题	161
96. 商品的贮存费需多少	162
97. 可否判定汽车起动和刹车时的加速度和减速度	163
98. 区间内平均温度可由两个固定时刻的平均温度决定	164
99. 高速公路出口处车辆平均行驶速度	166
100. 根据二维切片估计组织中小颗粒的数目	167
101. 半球面电极的接地电阻问题	168
102. 飞出火星去	169
103. 你知道物体的辐射能与温度之间的关系吗	170
104. 你知道质点滑落所需时间最少的路线吗	173
105. 算一下立交桥桥墩的体积	175
106. 根据库存量的函数估计保管费多少	177
107. 导弹跟踪飞机问题	177
108. 收音机怎样选择电台	180
109. 核废料的处理问题	183
110. 雪球融化问题	186
111. 马王堆一号墓年代的确定	188
112. 为什么用三级火箭发射人造卫星	190
113. 飞机减速伞的设计与应用	194
114. 惠更斯钟摆	196
115. 单摆可以用来作钟摆吗	200
116. 冰雹的下落速度	202
117. 陨石的质量	204
118. 马尔萨斯人口方程	205
119. 椭圆形办公室的声学特性	206
120. 化工车间的通风问题	208
121. 如何确定商品价格浮动的规律	210
122. 火箭的速度与高度是如何确定的	211

123. 液体旋转的角速度是如何确定的	213
124. 如何计算贮水槽的水位	216
125. 如何求物料干燥所需的时间	218
126. 能抓住走私船吗	221
127. 动物数量能够预测吗	223
128. 毛细管中的液体的流速是如何分布的	225
129. 如何建立固体物质的溶解速度常数的方程式	229
130. 血液的流速	231
131. 伯努利方程	233
132. 赤道上需多少颗通讯卫星	235
133. 反刍动物的食物通道	237
134. 恒速静脉滴注的一室模型	239
135. 主动脉压	241
136. 他是嫌疑犯吗	243
137. 游船上的传染病人数量	244
138. 肿瘤生长的数学模型	245
139. 被食者—食者系统的 Volterra 模型	248
140. 布朗运动	251
141. 静脉输液问题	253
142. 逻辑斯蒂(Logistic)方程	254
143. 他的胰脏正常吗	256
144. 油井收入为多少	256
145. 湖泊体积及平均水深的估算	257
146. 如何控制体重	258
147. 我国人口会不会下降	260
148. 2000 年世界人口知多少	262
149. 最优化的产出水平	264
150. 蜂房问题	267
151. 在确定的预算下,劳动力与资本的最佳配置	271
152. 抵押贷款与分期付款购物分析	272
153. 火箭发射后地球对火箭引力减小的速率是多少	276
154. 怎样确定电视机的最优价格	277

155. 如何确定面膨胀系数	279
156. 如何才能使回收醋酸的效果最好	281
157. 你会求使旋转体的表面积最小的曲线吗	283
158. 尿素的清除率	285
159. 大气污染指数的影响因素	286
160. 广告的费用及其效应	287
161. 最大利润问题	290
162. 弦振动方程	291
163. 如何购物最满意	293
164. 鲑鱼问题	294
165. 替商店预测某个月加利福尼亚酒的销售量	295
166. 当商店卖两种牌子的冻果汁时,如何取得最大利润	296
167. 欧拉的四面体问题	296
168. 飞机的速度	299
169. 光线的反射	300
170. Kepler 定律与卫星的最大、最小速度	302
171. 超音速飞机与“马赫锥”	305
172. 刚体转动时速度的分布	307
173. 基因的“距离”	308
174. 通电线圈的磁转矩问题	310
175. 火山喷发后高度的变化	311
176. 飓风的能量有多大	312
177. 怎样计算水桶的最大容水量	313
178. 如何求通过孔口的流量	315
179. 泊萧叶公式	317
180. 刚体的转动惯量和刚体的绕轴运动	319
181. 用曲线积分证明 Kepler 第二定律	322
182. 摆线的等时性	325
183. 小岛在涨潮与落潮之间的面积变化	328
184. 通讯卫星的覆盖面积	329
185. 电荷移动做功	332
186. 分针与时针何时重合	333

187. 多波型信号发生仪中正弦波形逼近的优化设计	334
188. 矩形脉冲信号的频谱分析	339
189. e 是无理数的证明	341
190. p 进制无限循环小数怎样化成分数	342
191. 如何计划家庭教育基金	345
192. 药物在体内的残留量	346
193. 经济中的乘子效应	348
194. n 年后提取 n^2 元需存入多少钱	349
195. 齐诺悖论问题	351
196. 行星的顺向与逆向运动	353
197. 促进剂的配方问题	356
198. 如何测定太湖最深处	358
199. 蚂蚁如何逃跑	360
200. 溪流的流向	361
201. 火箭的运行速度	362
202. 第一宇宙速度	363
203. 炮弹在空中的运行问题	365
204. 沿什么方向电压变化最快	367
205. 星形线的一种形成方式	368
主要参考文献	371

高等数学

一 函数、极限、连续

1. 函数

(1) 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 x, y , x 的变化域是 X . 若对 X 中每一个 x 值, 依照某一规律, 变量 y 都有惟一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

x 称为自变量, y 称为因变量, X 称为函数的定义域. 因变量 y 的变化域称为函数的值域, 可以记作

$$y = f(X) = \{y | y = f(x), \quad x \in X\}.$$

在函数定义中, 应注意对应关系 f 和定义域 X , 它们是函数定义中的两个要素.

(2) 函数的图形

函数 $y = f(x)$ ($x \in X$) 的图形是指点集

$$\{(x, y) | y = f(x), \quad x \in X\},$$

一般情形下, 它是 xy 平面上的一条或几条曲线, 且任何一条平行于 y 轴的直线, 与曲线 $y = f(x)$ 至多相交于一点.

(3) 函数的几种常见特性

有界性 若 $\exists M > 0$, $\exists \cdot |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X$, ^① 则称 $f(x)$

① 符号 $\exists$ 表示“存在”, $\exists \cdot$ 表示“使得”, $\forall$ 表示“对于任意的”, 或“任给”.

在 X 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是它界于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

奇偶性 设有函数 $y=f(x)$, $x \in X$, 其中 X 关于原点对称(即: 若 $x \in X$, 则 $-x \in X$).

若 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于 y 轴.

单调性 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上单调上升(或单调下降). 此处的上升亦称递增, 下降亦称递减.

若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调上升(或严格单调下降).

周期性 设有函数 $y=f(x)$, $x \in X$. 若 $\exists$ 常数 $T > 0$, $\exists \cdot \forall x \in X$, 都有 $x+T \in X$, 且有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为周期.

显然, 任何周期函数都有无穷多个周期, 若其中有一个最小的正数, 则称它为最小正周期, 亦称周期.

“周期”通常指最小正周期. 但周期函数未必都有最小正周期.

(4) 复合函数

设有函数

$$y = f(u) \quad u \in U,$$

$$u = \varphi(x) \quad x \in X \quad \text{值域为 } U',$$

若 $U' \subseteq U$, 则在 X 上确定了一个新函数

$$y = f[\varphi(x)] \quad x \in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数, u 称为中间变量.

(5) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y . 若对 Y 中每一个 y 值, 都可由方程 $y=f(x)$ 惟一确定出 x 值, 则得到一个定义在 Y 上的函数, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作

$$x=f^{-1}(y) \quad y \in Y,$$

易知, 严格单调函数必有反函数, 并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x) \quad (x \in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y) \quad (y \in Y)$ 的图形相同.

在习惯上, 为了强调对应规律 f^{-1} , 并将因变量仍记作 y , 通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x) \quad x \in Y,$$

它的图形与 $y=f(x) \quad (x \in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数, 称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数: 常数函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.

例 1 符号函数是指下面的分段函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

它是有界函数, 也是奇函数, 其图形由两段直线及一个点 $(0, 0)$ 组成.

问: $y=\operatorname{sgn} x$ 是不是单调函数?

例 2 狄利克雷 (Dirichlet) 函数