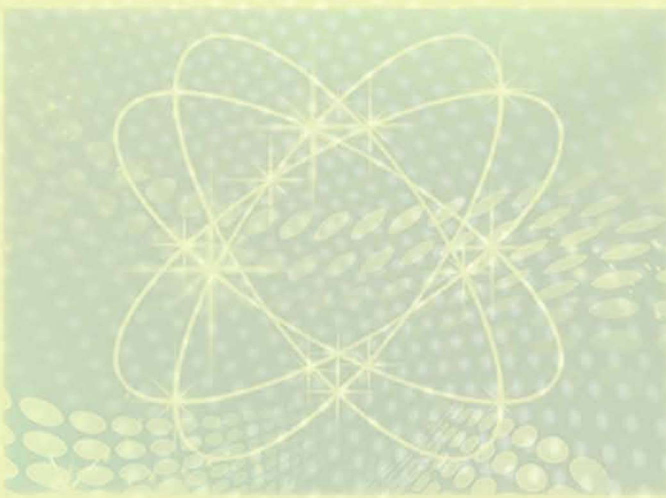
大学数学系列课程学习辅导与同步练习

线性代数

杨文胜　刘碧玉　编著



中南大学出版社

中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

线 性 代 数

杨文胜　刘碧玉　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

前 言

大学数学系列课程包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计等课程，它是高等院校各专业必修的基础理论课，是高等院校人才培养的关键环节。认真扎实学好大学数学系列课程有助于学生科学思维能力、数学运用能力、创新探索能力的培养，有利于后续课程的学习，并为进一步深造奠定必要的数学基础和科学素养。

2013 年，中南大学首批“开放式精品示范课堂建设计划”资助建设高等数学开放式精品示范课堂建设。课程建设团队经过 2 年的探索、研究与实践，形成了特色鲜明的大学数学开放式课堂教学模式，受到了学校领导与学生的肯定与支持，决定面向全校推广应用。

为配合开放式课堂教学模式改革的实践，适应学生自主研学、自由探索的需要，激发学生对本课程学习的积极性，有效地将课堂学习延伸到课外，方便师生互动、规范作业，大学数学系列课程教学团队经多年的经验积累、对课程教学的不断改革钻研，精心设计了《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，作为课程学习的配套资料，其内容主要包括课程知识结构、重点难点、知识点综合例题、课程导学、同步练习，内容设置加强了对课堂教学的针对性，力求达到课前预学、课后复习、作业练习、巩固提高的目的，通过课前、课间、课后环节自主性、探索性、讨论式、启发式学习，加深对教学内容的理解，培养学生独立运用理论知识、严密思考与科学计算的能力。

《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》涵盖了整个大学一年级两个学期及大学二年级上学期的所有大学数学系列(高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计)课程的内容，配套同步练习册代替了学生的大学数学作业本，每套同步练习含填空、选择、计算、证明题。填空、选择只要将答案填入即可，计算、证明题需在活页纸下方或反面空白处写出主要步骤。为方便教师批改、学生同步学习，课程导学、同步练习作为活页形式，课前完成下次课程的导学，课后完成上次课相应的一套同步练习，并交任课教师批阅，教师批阅后返回给学生，以备复习时使用。做好课程教学的导学和同步练习是学好大学数学系列课程的重要环节。教科书上的习题可作为同学们课外练习补充、复习之用。

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。希望同学们充分利用《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，自主学习，在科学的道路上不断进取、勇往直前，学有所成!

感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划的项目支持，感谢中南大学数学与统计学院大学数学系列课程教学团队全体教师的无私奉献，感谢中南大学出版社的大力支持。

中南大学

高等数学教学与研究中心

2015 年 9 月 20 日

目　录

第 1 章　矩阵与行列式

I. 学习内容要点与要求

1. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、矩阵转置与方阵行列式的运算规律;
2. 掌握行列式计算方法(对 n 阶行列式只要求简单的计算) ;
3. 掌握逆阵的概念，逆阵存在的充要条件，逆阵的运算性质及可逆矩阵求逆的方法;
4. 掌握并能应用 Cramer 法则;
5. 理解矩阵的概念及特殊矩阵 —— 单位阵、对角阵、对称阵及转置矩阵的概念;
6. 了解 n 阶行列式定义、性质;
7. 了解分块矩阵及其运算.

II. 重点、难点与知识结构

重点

1. 矩阵的线性运算、乘法运算、矩阵转置及其运算规律;
2. 行列式计算方法;
3. 逆阵的概念、运算性质及可逆矩阵求逆的方法;
4. Cramer 法则的应用.

难点

1. 行列式的计算;
2. 逆阵概念及计算.

本章知识点网络图

- 矩阵与行列式
  - 矩阵及其运算
    - 矩阵的定义
    - 矩阵的加减法
    - 矩阵的数量乘法
    - 矩阵乘法
    - 方阵的幂
    - 矩阵的转置
    - 方阵的逆
      - 方阵逆的定义、性质
      - 方阵逆的计算方法
  - 行列式及其计算
    - 行列式的定义、性质
    - 行列式按行展开定理
    - 行列式的计算
  - *Cramer* 法则

Ⅲ. 典型例题分析

一、矩阵的线性运算、乘法运算、转置及其运算规律

例 1 设 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解 由于 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是一个 2×3 矩阵，而 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 是 2×2 矩阵，由矩阵乘法，可知 X 为一个 3×2 矩阵，设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$，由矩阵乘法运算，可得

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + x_6 = 4 \end{cases},$$

令 $x_3 = c$，$x_4 = d$，则 $x_1 = 2 + c$，$x_2 = 5 + d$，$x_5 = -3 - 2c$，$x_6 = -6 - 2d$，所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 + c & 5 + d \\ c & d \\ -3 - 2c & -6 - 2d \end{pmatrix}，c，d \text{ 为任意常数}.$$

例 2 设 $A = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 2)$，$B = (0 \quad 1 \quad -2 \quad -1)$，$C = A^{\mathrm{T}}B$，求 C^n

解 因 $C^n = A^{\mathrm{T}}BA^{\mathrm{T}}B\cdots A^{\mathrm{T}}B = A^{\mathrm{T}}(BA^{\mathrm{T}})\cdots(BA^{\mathrm{T}})B$，而

$$BA^{\mathrm{T}} = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2，故 C^n = 2^{n-1}A^{\mathrm{T}}B = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

注: 此题求解的关键是利用矩阵乘法的结合律.

例 3　试证不存在 n 阶方阵 A, B, 满足 $AB - BA = E$.

证　设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$,

则 $AB - BA = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}a_{in} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}b_{in} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i1} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i2} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} - \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}a_{in} \end{pmatrix}$,

$AB - BA$ 的主对角线上元素之和为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} + \cdots \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i2} + \cdots \sum_{i=1}^{n} b_{ni}a_{in}\right)$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} +$$

$$\cdots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots a_{nn}b_{nn} - b_{11}a_{11} - b_{12}a_{21} - \cdots - b_{1n}a_{n1}$$

$$- b_{21}a_{12} - b_{22}a_{22} - \cdots - b_{2n}a_{n2} - b_{21}a_{12} - b_{22}a_{22} - \cdots - b_{2n}a_{n2} = 0,$$

而单位阵 E 的主对角线元素之和为 n, 因此 $AB - BA$ 不可能等于 E, 即不存在 n 阶方阵 A, B, 满足 $AB - BA = E$.

二、行列式的计算

例 1　计算行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[-c_1+c_2]{} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[-3c_2+c_4]{-2c_2+c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

例 2 计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D_{n+1}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$

$=[(a-1)-a][(a-2)-a]\cdots[(a-n)-a][a-2-(a-1)][(a-3)-(a-1)]\cdots$

$=[(a-n)-a]\cdots[(a-n)-(a-(n-1))]=\prod\limits_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)$

结论: 此题的解法是利用行列式性质化为 Vandermonde 行列式计算.

例 3 证明 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

证 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} xD_{n-1}+a_n$

$$\xlongequal[\text{按 } c_1 \text{ 展开}]{\text{将 } D_{n-1}} x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n$$

$=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n=\cdots=x^{n-2}D_2+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$=x^{n-2}\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

例 4 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $A'A=AA'=E$, $B'B=BB'=E$ 及 $|A|+|B|=0$, 求 $|A+B|$ (其中 A' 表示矩阵 A 的转置).

证 因为 $A'A=AA'=E$, $B'B=BB'=E$, 所以 $|A|=\pm1$, $|B|=\pm1$,
又 $|A|+|B|=0$, 从而 $|A|$ 与 $|B|$ 互为相反数, 因此 $|A||B|=-1$,
由于

$|A+B|=|AB'B+AA'B|=|A(B'+A')B|=|A(B+A)'B|=|A||B||A+B|$,

所以

$$|A+B|(1-|A||B|)=0,$$

从而

$$-2|A+B|=0，故 |A+B|=0.$$

小结: n阶行列式的计算是本章重点和难点，除一些特殊行列式直接按定义计算外，一般还有下列方法:

(1) 利用行列式的性质化为上(或下) 三角形行列式计算

注: 上(或下) 三角形行列式的值为对角元的乘积.

(2) 降阶法: 利用行列式的性质将行列式化为某行(列) 只有一个(或尽量少) 非零元素，然后按此行(列) 展开，化为较低阶的行列式的计算.

(3) 递推公式法: 应用行列式的性质，把 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶的行列式的线性关系式 $D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}$ 或 $D_n = aD_{n-1} + \beta$，再根据此关系式递推，求得所给 n 阶行列式的值.

(4) 拆分法: 将行列式适当地拆分成若干个同阶行列式之和，然后求出各行列式的值，即可得原行列式的值.

(5) 用数学归纳法进行计算或证明

(6) 利用已知行列式，其中最重要的已知行列式是范德蒙行列式.

以上方法中，前两种是最基本的算法，应熟练掌握. 至于采取何种方法，首先需特别注意行列式的特征. 具体到一个题，有时需要综合运用多种方法才能得到答案.

三、逆阵的概念、运算性质及可逆矩阵求逆的方法

例 1　设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$，证明 A 及 $A+2E$ 可逆，并求 A^{-1} 及$(A+2E)^{-1}$.

解　由已知得 $A(A-E) = 2E$，即 $A\left(\dfrac{A-E}{2}\right) = E$，故 A 可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{A-E}{2}$.

又由 $A^2 - A - 2E = 0$ 得 $A+2E = A^2$，而 A 可逆. 故 $A+2E$ 可逆，且

$$(A+2E)^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \frac{1}{4}(A-E)^2.$$

例 2　已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，若矩阵 X 满足: $AX + B = 2X$，求矩阵 X.

解　由 $AX + B = 2X$ 得$(2E - A)X = B$，有 $X = (2E-A)^{-1}B$，而

$$(2E-A)^{-1} = \frac{(2E-A)^*}{|2E-A|},$$

计算可得:

$$X = (2E-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & -1 \\ \dfrac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

例3　设 $AX + E = A^2 + X$，且 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X 及$(X^{-1})^*$，其中$(X^{-1})^*$ 为 X^{-1}

的伴随矩阵，E 为单位矩阵.

解　由 $AX+E=A^2+X$，得：$(A-E)X=A^2-E$，

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $(A-E)$ 可逆，故

$$X=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix};$$

由于 $|X|=9\neq 0$，所以 $(X^{-1})^*=|X^{-1}|(X^{-1})^{-1}=\frac{1}{|X|}X=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

结论：矩阵求逆的方法常有：

(1) 利用逆矩阵的定义，如以上例 1；

(2) 利用伴随矩阵，如以上例 2；

(3) 利用下一章的初等变换法.

四、Cramer 法则及应用

例 1　求 λ 在什么条件下，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2=0\\x_1+\lambda x_2=0\end{cases}$ 有非零解?

解　如方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2=0\\x_1+\lambda x_2=0\end{cases}$ 有非零解，则由 Cramer 法则有 $\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$，所以 $\lambda=\pm 1$.

例 2　设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j)(i,j=1,2,\cdots,n)$，求方程 $A^{\mathrm T}x=b$ 的解

解　$\because |A^{\mathrm T}|=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0$，由 Cramer 法则知方程有惟一解

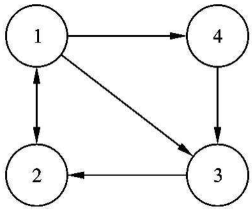
$$x_1=\frac{|A_1^{\mathrm T}|}{|A^{\mathrm T}|}=\frac{|A^{\mathrm T}|}{|A^{\mathrm T}|}=1,\ x_2=\frac{|A_2^{\mathrm T}|}{|A^{\mathrm T}|}=0,\ \cdots,\ x_n=\frac{|A_n^{\mathrm T}|}{|A^{\mathrm T}|}=0.$$

导学 1.1

(**1.1** 矩阵及其运算)

一、相关问题

四个城市间的单向航线如图所示,



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线} \end{cases}$$

以 a_{ij} 为元素, 试用矩阵形式表示图中所示的航线情况.

二、相关知识

1. 简述矩阵定义, 有哪些特殊矩阵, 举一个能用矩阵描述的实际例子.
2. 矩阵有哪些运算?这些运算的规定中特别要注意什么?
3. 矩阵乘法满足哪些运算规律?不满足哪些规律?

三、练习题

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^n.

三、思考题

1. $AB = BA$ 吗?
2. $AB = AC \Rightarrow B = C$, 正确吗?

导学 1.2

(**1.2** 行列式及其计算)

一、相关问题

行列式的引进是为了方便计数，当线性问题遇到大量的数据时，可以用矩阵和行列式来方便地进行计算. 比如有的线性方程组求解，就可以用行列式来计算；在几何中可以用行列式确定通过定点的几何图形的方程等.

二、相关知识

1. 简述行列式的几种定义，说明行列式与方阵的本质差别.
2. 行列式有哪些性质?
3. 行列式按行(列) 展开定理有何作用?
4. 行列式计算有哪些常用方法，是否困难?

三、练习题

计算 $D_n = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta-\alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \cdots & \cdots & \beta-\alpha \end{vmatrix}$.

四、思考题

求 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$展开后的正项总数.

导学 1.3

(**1.3** 方阵的逆)

一、相关问题

逆矩阵在保密通信中的应用：保密通信是新时代一个非常重要的技术，许多科技工作者做了大量的工作，提出了许多有效的保密通信模型，其中基于加密技术的保密通信模型就是其中一种：

发送方采用某种算法将明文数据加密转换成密文数据发送给接受方，接受方则可以采用对应的某种算法将密文数据解密转换成明文数据. 一种加密技术是否有效，关键在于密文能否还原成明文. 若设 A 为可逆矩阵，B 为明文矩阵，C 为密文矩阵，加密算法为 $C = AB$ 或 $C = BA$，解密算法为 $B = A^{-1}C$ 或 $B = CA^{-1}$，这就是一种有效的加密技术.

例如：倩倩的朋友给她发来了一封密信，它有一个 3 阶方阵 $\begin{pmatrix} 207 & 210 & 125 \\ 231 & 318 & 135 \\ 244 & 161 & 175 \end{pmatrix}$，约定：消息的每一个英文字母用一个整数来表示：$a \to 1$，$b \to 2$，$c \to 3$，$\cdots$，$y \to 25$，$z \to 26$，约好的密码矩阵为 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$，试求倩倩的朋友发来的密码内容？

二、相关知识

1. 矩阵可逆的前提与条件是什么？如何求矩阵的逆？
2. 可逆矩阵在参入矩阵运算中是否重要？可逆矩阵有哪些应用？

三、练习题

设 A 为 3 阶方阵，其逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 的伴随矩阵 $(A^{-1})^*$.

四、思考题

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，3 阶方阵 B 满足 $A^* BA = 2BA - 9E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为单位矩阵，求矩阵 B.