

微 積 概 要

國立中山大學理學院院長

何衍璿

國立中山大學數學系助教

李銘槃 苗文綏

合 編

國 立 編 譯 館

中華民國二十五年三月初版

周

微積概要一冊

(52241.3)

每冊定價國幣貳元捌角

外埠酌加運費匯費

商務印書館

編纂者

國立中山大學
數學系助教 李
國立中山大學
理學院院長 何
國立中山大學
數學系助教 苗

銘 璩
文 縵

出版者

國立編譯館

發行人

王雲五
上海河南路

印刷所

商務印書館
上海河南路

發行所

商務印書館
上海及各埠

序

慨自歐風東漸，國人乃銳志科學之提倡。年來講求研究，致力未遑。惟實利之見太深，祇顧實用，忽略原理。積習相沿，遂致多數學子，徒知倣效，真諦莫明，模糊強記，不能推究。長此因循，繩人步武，文化邁進，永不可期。言之良堪浩歎。同人等有見及此，輒思有所矯正，爰編微積概要一書，內容採擇，務求精審。原理闡發，必期詳明。全書共分十二章，章分節，以 I, II, III, …… 記其序，節分目，以 1, 2, 3, …… 識其別。提綱挈領，俾讀者易於明瞭。代數幾何二門，於此亦有相當之顧及，故可作為初等微積學與普通數學之教本或參考書籍。惟倉卒付梓，舛誤深恐不免，尚望海內賢達，進而匡正之，幸甚。

民國廿四年春

編者識於國立中山大學理學院

目 錄

第一章 函數極限及連續

I. 大綱	1
1. 函數 2. 極限 3. 不含常數項之多項式	
4. 極限之定理 5. 例 6. 連續 7. 幾何釋義	
8. 無限項數列 9. 數集之高低界 10. 關於連續函數之定理	
11. 反函數 12. 代數函數及超然函數	
II. 無理數, 指數函數及對數函數	20
1. 無理數 2. x 爲有理數之指數函數 a^x 3. 定理一	
4. 定理二 5. x 爲無理數時之情形 6. 定理三	
7. 由前數目所得之結果 8. 指數定律 9. a^x 之性質	
10. 指數函數之變值 11. 對數	
第一章之習題	31

第二章 級 數

I. 大綱	33
-------	----

1. 定義 2. 例 3. 定理	
II. 正項級數	36
1. 定義及定理 2. 公項為 $\frac{1}{n^k}$ 之級數 3. D'Alembert 定理 4. Cauchy 定理 5. 同性質之級數 6. 應用	
III. 各項為任意符號之級數	45
1. 定理 2. 絕對收斂及條件收斂 3. 應用	
IV. 級數之和及積	52
1. 和之定理 2. 積之定理	
V. 級數 e	54
1. 緣起 2. 各種情形 3. 備考	
第二章之習題	59

第三章 引數及微分

I. 無窮小	65
1. 定義 2. 例 3. 主要無窮小 4. 相當無窮小 5. 關於無窮小之定理	
II. 引數	70
1. 定義 2. 連續與引數之關係 3. 幾何釋義 4. 切線及法線之方程式	

III. 簡單函數之引數	73
1. x^m 之引數	
2. a^x 之引數	
3. $\log_a x$ 之引數	
4. $\cos x$ 之引數	
5. $\sin x$ 之引數	
6. $\tan x$ 之引數	
7. 反函數之引數	
8. $\arccos x$ 之引數	
9. $\arcsin x$ 之引數	
10. $\arctan x$ 之引數	
IV. 函數之函數之引數	79
1. 定義	
2. 引數之求法	
3. 例	
4. 推廣	
V. 複函數	81
1. 定義	
2. 和之引數	
3. 積之引數	
4. 商之引數	
5. w 之引數	
6. 引數表	
VI. 雙曲線函數	87
1. 定義	
2. 雙曲線函數之性質	
3. 求和公式	
4. 反雙曲線函數	
5. 備考	
VII. 第 n 引數	98
1. 定義	
2. 例	
3. Leibniz 公式	
VIII. 微分	101
1. 定義	
2. 幾何釋義	
3. 函數之函數之微分	
4. 複函數之微分	
5. 第 n 微分	
IX. 引數之性質	105
1. 定理	
2. Rolle 定理	
3. 中值定理	
4. 應用	

5. 中值定理之推廣

X. 變數之更換 108

1. 自變數與他變數之互換
2. 他變數之更換
3. 自變數之更換

第三章之習題 112

第四章 原函數及積分

I 定義及定理 116

1. 原函數
2. $f(x)$ 不常正之情形
3. 曲線與直線所包面積之他種求法
4. 各種情形之討論
5. 近代分析採用之方法

II. 積分 126

1. 定積分
2. a, b 之互換
3. 間隔之劃分
4. 推廣
5. 備考
6. 積分之中值定理
7. 在定間隔內函數之中值
8. 原函數存在之又一證法
9. 未定積分

III. 未定積分題解簡要 132

1. 簡單函數之積分
2. 和之積分
3. 更換變數之方法
4. 例
5. 分部積分
6. 面積
7. 極位標制面積之求法

IV. 定積分之推廣 143

1. 積分間隔爲無窮大時之情形
2. 函數 $f(x)$ 在積分間隔內爲不連續時情形

V. 兩平行底面間之體積 146

1. 體積之計算
2. 旋轉面之體積
3. 例題

第四章之習題 150

第五章 函數展成級數及整級數之性質

I. 函數展成級數 153

1. Taylor 公式
2. 定理
3. Maclaurin 公式
4. 指數函數之展開
5. 三角函數之展開
6. 問題

II. 整級數 160

1. 定義
2. 整級數之定理
3. 由上述定理所得之結果
4. 級數之殘餘
5. 整級數殘餘之定理
6. 整級數之連續性

III. 整級數之積分及引數 167

1. 整級數之積分
2. 整級數引數之定理
3. 整級數之第 n 引數

IV. 應用 171

1. 對數函數之展開 2. $\arctan x$ 之展開 3.
指數函數之展開 4. 二項級數 5. $\arcsin x$
之展開

第五章之習題 177

第六章 未定形式

I. Hospital 法則及其應用 180

1. Hospital 法則 2. $x \rightarrow \infty$ 時之情形 3. 未定
形式 $0 \cdot \infty$ 4. 未定形式 $\infty - \infty$

II. 展式之應用 187

1. 殘餘之變形 2. 應用例題 3. $x = a \pm 0$
時之情形 4. $x \rightarrow \infty$ 時之情形 5. e^x 或 $\log x$
與 $x^m (m > 0)$ 增大之比較

III. 指數函數之未定形式 192

1. 未定形式 0^0 2. 未定形式 ∞^0 3. 未定形
式 1^∞

第六章之習題 195

第七章 函數之變值

I. 遞增及遞減函數 197

II. 極大極小 198

1. 定義 2. 定理 3. 極大極小之判斷 4. 函 數無引數時之情形 5. 應用問題	
III. 反曲點及漸近線	203
1. 反曲點 2. 漸近線	
IV. 曲線繪畫法舉例	207
1. 例一 2. 例二 3. 例三	
第七章之習題	215

第八章 多變數之函數

I. 定義, 極限及連續, 偏引數	217
1. 定義 2. 極限及連續 3. 偏引數 4. 關於 偏引數之定理 5. 不同之第 n 偏引數之個 數	
II. 複函數之引數及微分	222
1. 引數 2. 例 3. 微分 4. 第 n 引數 5. u, v, w 爲 x 之一次式之情形 6. Taylor 公式在三 變數函數之推廣 7. 特端 8. 中值定理在 三變數函數之推廣 9. 二變數函數之極 大極小	
III. 多變數函數之全微分	232

1. 全微分	2. 複函數之全微分	3. 定理	
IV. 陰函數及其引數之求法			237
1. 陰函數	2. 引數之求法		
V. 齊次函數			238
1. 定義	2. Euler 定理	3. Euler 逆定理	
第八章之習題			240

第九章 積分方法

I. 有理函數之積分			242
1. 引言	2. 求 $\int \frac{A dx}{(x-a)^m}$	3. 求 $\int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}$	
4. 例			
II. 能化為有理函數之函數之積分			248
1. $x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{p'}{q'}} \dots$ 等之有理函數之積分	2. $x,$		
$y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}} \dots$ 等之有理函數之積分	3. 二項式		
$x^m(a+bx^n)^p$ 之積分	4. x 及 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 之有		
理函數之積分	5. 特例	6. e^{ax} 之有理函數	
之積分	7. 對數函數積分及反三角函數		
積分之特例	8. 有理函數 $R(\sin x, \cos x)$ 之		
積分	9. 特端	10. 有理函數 $R(\operatorname{Sh} x, \operatorname{Ch} x)$ 之	
積分			

III. 雜例 262

1. $\tan^n x$ 及 $\cot^n x$ 之積分 2. $\sin^{2m} x$ 及 $\cos^{2n} x$ 之積分 3. 餘弦乘積之積分 4. $e^{ax} R(\sin x, \cos x)$ 之積分 5. $H(x)e^{ax}\sin bx$ 及 $H(x)e^{ax}\cos bx$ 之積分

第九章之習題 267

第十章 平面幾何應用

I. 切線長, 法線長, 及次切線長, 次法線長 271

1. 正交位標制 2. 極位標制

II. 曲線之弧長 274

1. 弧長之計算 2. 定理 3 正負號之採擇
4. 例 5. 極位標制弧長之計算 6. 備考——
旋轉面之面積

III. 曲率, 曲率半徑, 曲率中心, 漸屈線及漸伸線 285

1. 曲率與曲率半徑之定義 2. 曲率與曲率半徑之求法 3. 曲率中心與漸屈線之定義及求法 4. 定理 5. 密切圓 6. 曲率半徑與漸屈線弧長之關係, 漸伸線

IV. 二重點	301
V. 包線	304
1. 定義 2. 定理 3. 法線之包線	
VI. 斜交或正交曲線系	309
第十章之習題	310

第十一章 二重積分及三重積分

I. 二重積分	314
1. 定義及體積之計算 2. 曲面之各種位置	
II. 二重積分在正交位標制之計算	318
1. 普通方法 2. 例 3. 備考	
III. 二重積分在極位標制之計算	324
1. 方法 2. 例 3. 備考 4. 原點0在積分場內之情形 5. 在極位標制計算二重積分之別法	
IV. 曲面之面積	332
1. 面積之計算 2. 例 3. 二重積分之別例	
V. 三重積分	338
1. 定義 2. 三重積分在正交位標制之計算	
第十一章之習題	340

第十二章 微分方程式概要

I. 定義及定理	342
II. 第一級微分方程式	344
1. 分離變數法	
2. 齊次方程式	
3. 平直方程式	
4. Bernoulli 方程式	
5. Riccati 方程式	
6. Lagrange 方程式	
7. Clairaut 方程式	
III. 第二級微分方程式	356
1. 特例	
2. 常數系數之第二級平直微分方程式	
3. 無第二段之方程式	
4. 指標方程式	
5. 有第二段之方程式	
第十二章之習題	370

第一章

函數, 極限及連續

I. 大綱

1. 函數 (Function).

設有兩變數量, 其中一值視其他之值而變, 則謂此中一數量爲其他數量之函數. 如設其一數量任意變更, 則此數量名爲自變數 (Independent Variable). 茲以 x 表自變數, 而設其由一數 a 變至一數 b ($a < b$), 且經過 a, b 中一切之值. 又令 y 爲他一變數, 其與 x 之關係如下: 當 x 爲 a, b 中之一值或等於 a, b 時, y 有一確定 (Determined) 之值與 x 之值對應, 則謂在間隔 (Interval) (a, b) 內, y 爲 x 之函數, 而以方程式 $y=f(x)$ 表此二數之相關.

例——無論 x 爲何值, 多項式 $f(x)$ 常爲 x 之函數. 在間隔 $(-1, +1)$ 內, $\sqrt{1-x^2}$ 爲 x 之函數.

2. 極限 (Limit).

極限之意義如下:

(其一) 設在間隔 (a, b) 內, $f(x)$ 爲 x 之函數, x_0 爲間

隔內之一值，如謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時之極限為 A ，意即任與一正數 ε ，可得一正數 α 與之對應，使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)-A|<\varepsilon$ 〔設 x_0+h 屬於間隔 (a, b) 之值〕。

(其二) 設 x 之絕對值大於一正數 α 時， $f(x)$ 為 x 之函數。如謂函數 $f(x)$ 於 $x=+\infty$ 時之極限為 A ，意即任與一正數 ε ，可得一正數 B 與之對應，使不等式 $|x|>B$ 產生不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 。此定義可用於 $x=-\infty$ 時之情形。

例——當 x 為無窮時，函數 $\frac{1}{x}$ 之極限為零。蓋以不等式 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ 產生不等式 $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$ ，即可令 $B=\frac{1}{\varepsilon}$ 故也。

(其三) 除 $x=x_0$ 外，設在間隔 (a, b) 內， $f(x)$ 為 x 之函數。如謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時為無窮，意即任與一正數 A ，可得一正數 α 與之對應，使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)|>A$ 。

例——當 $x=1$ 時，函數 $\frac{1}{x-1}$ 為無窮。蓋因除 $x=1$ 外，無論 x 為何值， $\frac{1}{x-1}$ 均為 x 之函數。若令 $x=1+h$ ，則不等式 $|h|<\frac{1}{A}$ 產生不等式 $|\frac{1}{h}|>A$ ，即可令 $\alpha=\frac{1}{A}$ 故也。

(其四) 設 x 之絕對值大於一正數 α 時， $f(x)$ 為 x 之函數。如謂函數 $f(x)$ 於 $x=+\infty$ 時為無窮，意即任與一正