



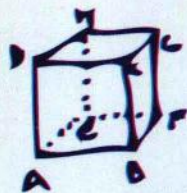
中官联合



$$a^2 = b^2 + c^2$$

数学
人类智慧的源泉

周阳◎编著



探索数学

大观园

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

TANSUOSHUXUE
DAGUANYUAN



中国出版集团



现代出版社

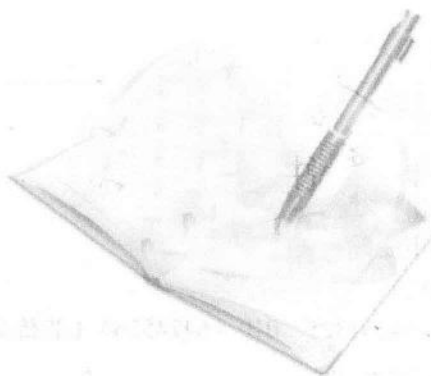
数学
人类智慧的源泉

探索数学

大观园

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

周阳◎编著



中国出版集团

现代出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

探索数学大观园 / 周阳编著. —北京: 现代出版社, 2012. 12

(数学: 人类智慧的源泉)

ISBN 978 - 7 - 5143 - 0924 - 9

I. ①探… II. ①周… III. ①数学 - 青年读物②数学 - 少年读物 IV. ①O1 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 274982 号

探索数学大观园

- | | |
|------|-------------------------------------|
| 编 著 | 周 阳 |
| 责任编辑 | 刘 刚 |
| 出版发行 | 现代出版社 |
| 地 址 | 北京市安定门外安华里 504 号 |
| 邮政编码 | 100011 |
| 电 话 | 010 - 64267325 010 - 64245264 (兼传真) |
| 网 址 | www.xdcbs.com |
| 电子信箱 | xiandai@cnpitc.com.cn |
| 印 刷 | 北京市业和印务有限公司 |
| 开 本 | 710mm × 1000mm 1/16 |
| 印 张 | 12 |
| 版 次 | 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 2 次印刷 |
| 书 号 | ISBN 978 - 7 - 5143 - 0924 - 9 |
| 定 价 | 29.80 元 |
-

版权所有, 翻印必究; 未经许可, 不得转载



前言

什么是数学？用一句话概括，数学就是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。

数学是一门古老的科学，具有悠久的历史，是人们在生产劳动中，逐渐积累起来的关于现实世界中数量关系与空间形式的经验，经过不断条理系统化而形成的知识体系。

数学也是一门充满青春活力的科学，随着现代化科学技术的飞速发展，一些新的概念、理念被引进到数学领域，给数学灌注了新的“血液”，使数学有了一个更大的发展空间，如今数学正以前所未有的规模，向几乎所有的科学领域进军，一些崭新的数学分支如雨后春笋应运而生。

数学是“精确科学的典范”，它最集中、最深刻、最典型地反映了人类理性和逻辑思维所能达到的高度。由此，11世纪大数学家，鼎鼎有名的数学王子高斯称数学为“科学之王”。

数学还是一个精彩纷呈的世界，有心于此的学者们在其中欢快地徜徉，他们视一道道数学难题为一座座巍巍高山，勇于攀登，去领略顶峰的无限风光。

数学知识浩如烟海，博大精深，如今，从大到宇宙探索，小到微观粒子的研究，无处不用到数学知识，可以说，没有数学的高度发展，就没有科学技术的现代化，数学缔造了科技史一个又一个伟大的奇迹。



目 录

最美妙的发明

结绳记数	1
神奇的算筹	4
阿拉伯数码	7
十进位小数	9
二进制	12
刘徽割圆术	14
隙积术和会圆术	17
方程术	20
直角坐标系和解析几何	24

千奇百怪的数

有形的数	29
完善的数	32
对称的数	34



友爱的数	36
破碎的数	38
“马拉松”数—— π	41
优美的音乐数	44
可以遗传的数	46
圣经数和魔术数	49
生活中的趣味数字	51
文学中的趣味数字	58
生物中的有趣数字	63

妙用无穷的理论

毕达哥拉斯定理	66
黄金分割定律	70
出入相补原理	73
祖暅原理	76
相似三角形定理	79
是非难辨的理论	82
模糊数学理论	85
来自赌徒的请求	88
斐波那契数列	91
微积分理论	95
突变理论	98

变幻万千的“形”

神奇幻方	102
奇妙的蜂房	106

地球有多大	109
生活中的万千妙“形”	112

经典数学名题

盈不足术	121
回文等式	125
中国剩余定理	129
丢番图的墓志铭	131
哥德巴赫猜想	135
四色猜想	138
哥尼斯堡七桥问题	142
标尺作图三大难题	145
希尔伯特问题	151

数学家的故事

勤勉的华罗庚	158
低调的陈景润	161
欧几里得和《几何原本》	165
数学导师欧拉	168
数学王子高斯	173
韦达与数学符号应用	176
佩雷尔曼证明彭加勒猜想	179

最美妙的发明

数学是一门古老的科学，远在人类社会发展的最初阶段，人类尚未发明出文字来记录自己的思想，最基本的数学概念就已经产生了。结绳记数、算筹记数、进位制等数学概念及数学工具逐一被发明出来。自此，人类开始了伟大的数学时代。历史以无可辩驳的事实证明，数学的产生对人类社会的发展以及人类思想的发展起到了巨大的影响和作用，数学不愧为“科学之王”，它改变了这个世界。

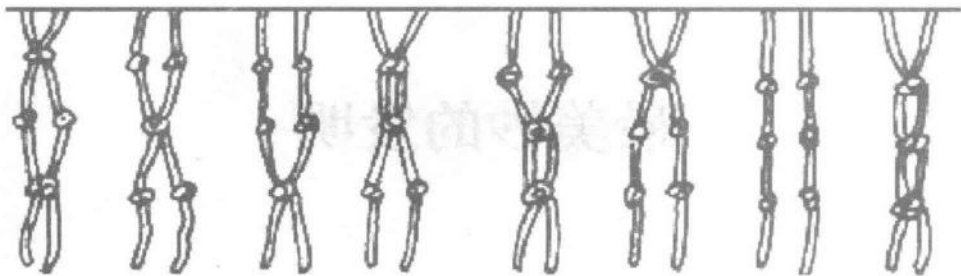
结绳记数

为了表示数目，人类的祖先在摸索中逐渐学会了用实物来表现，如小木棍、竹片、树枝、贝壳、骨头之类。但是很快就发现这些东西容易散乱，不易保存，这样，人们自然会想到用结绳的办法来记数。

结绳（相当于今天的符号）记数在我国最早的一部古书《周易·系辞下》（约公元前11世纪成书）有“上古结绳而治，后世圣人，易之以书契”的记载（意思是说上古时人们用绳打结记数或记事，后来读书人才用符号记数去代替它）。这就是说，古代人最早记数用绳打结的方法，后来又发明了刻痕代替结绳。“书契”是在木、竹片或在骨上刻画某种符号。“契”字左边的“丰”是木棒上所划的痕迹，右边的“刀”是刻痕迹的工具。《史通》称“伏羲始画八卦，



造书契，以代结绳之政”。“事大，大结其绳，事小，小结其绳，结之多少，随物众寡”。



结绳记数

结绳记数在世界各地从古墓挖出的遗物中得到了验证。如南美洲古代有一个印加帝国，建立于 11 世纪，15 世纪全盛时期其领域包括现在的玻利维亚、厄瓜多尔、秘鲁，以及阿根廷、哥伦比亚和智利的部分领土。16 世纪西班牙殖民者初到南美洲，看到这个国家广泛使用结绳来记数和计数。他们用较细的绳子系在较粗的绳上，有时用不同颜色的绳子表示不同的事物。结好的绳子有一个专名叫“基普”。

南美印加人的结绳方法是在一条较粗的绳子上拴很多涂不同颜色的细绳，再在细绳上打不同的结，根据绳的颜色，结的位置和大小，代表不同事物的数目。

印加时代的基普还保留到今天，这些结绳制度在秘鲁高原一直盛行到 19 世纪。琉球群岛的某些小岛，如首里、八重山列岛等至今还没有放弃这种结绳记数的古老方法。

在结绳记数所用材料上面，各地有所不同，有的用麻，有的用草，还有的用羊毛。

但结绳有一定的弊端，一不方便，二不易长期保存，后世的人采用在实物（石、木、竹、骨等）上刻痕以代替结绳记数。现在已发现的最早的刻痕记数 是于 1937 年在捷克斯洛伐克的摩拉维亚洞穴中出土的一根约 3 万年前的狼桡骨，上面刻有 55 道刻痕，估计是记录猎物的数目，这也是世界上发现最古老的人工刻划记数实物。

在我国北京山顶洞发现了一万多年前带有磨刻符号的4个骨管。我国云南的佤族1949年前后还在使用刻竹记事。

在非洲中南部的乌干达和扎伊尔交界处的爱德华湖畔的伊尚戈渔村挖出的一根骨头，被确认为公元前8500年的遗物，骨上的刻痕表示数目。考古学家惊讶地发现，骨的右侧的纹数是11，13，17，19，正好是10~20的4个素数（其和为60，恰是两个月的日数，也许与月亮有关。同时可断定古人已有素数的概念，这是不可思议的）；左侧是11，21，19，9（其和也为60）相当于 $10+1$ ， $20+1$ ， $20-1$ ， $10-1$ 。这根骨刻现藏于比利时布鲁塞尔自然博物馆。但纹数之谜尚待进一步揭开。

刻痕的进一步发展，就形成了古老的记数符号——数字，随着记载数目的增大各种进位制也随之出现。

知识点

素数

素数是只能被1和它本身整除的自然数，如2、3、5、7、11等等，也称为质数。如果一个自然数不仅能被1和它本身整除，还能被别的自然数整除，就叫合数。1既不是素数，也不是合数。全体自然数可以分为3类：1、素数、合数。而每个合数都可以表示成一些素数的乘积，因此素数可以说是构成整个自然数大厦的砖瓦。

延伸阅读

波斯王结绳

结绳计数虽然是我们华夏祖先较早的一种创造，但在世界各地区，几乎都



有过结绳记数的历史。

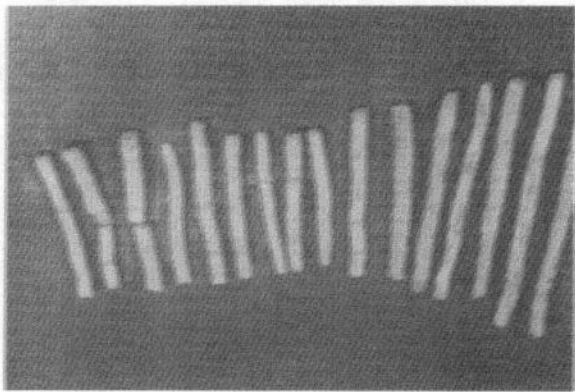
有这样一则古老的传说：波斯王大理派军队去远征斯基福人，他命令他的卫队留下来保卫耶兹德河上的桥。他在皮条上拴了60个结，交给他们说：“卫队的勇士们，拿着这根皮条，并按照我说的去做：当你们知道我宣布打斯基福时，从那天起你们每天解一个结，当这些结所表示的日子都已经过去的时候，你们就可以回家啦。”

神奇的算筹

我国古代以筹为工具来记数、列式和进行各种数与式的演算的一种方法。筹，又称为策、筹策、算筹，后来又称之为算子。

算筹最初是小竹棍一类的自然物，以后逐渐发展成为专门的计算工具，质地与制作也愈加精致。据文献记载，算筹除竹筹外，还有木筹、铁筹、骨筹、玉筹和牙筹，并且有盛装算筹的算袋和算子筒。算筹实物已在陕西、湖南、江苏、河北等省发现多批。其中发现最早的是1971年陕西千阳出土的西汉宣帝时期的骨制算筹。

筹算在我国起源甚古，春秋战国时期是我国从奴隶制转变到封建制的时期，生产的迅速发展和科学技术的进步遇到了大量比较复杂的数字计算问题。为了适应这种需要，劳动人民创造了一种十分重要的计算方法，就是筹算。



出土的算筹

春秋战国时期的《老子》中就有“善数者不用筹策”的记述。当时算筹已作为专门的计算工具被普遍采用，

并且筹的算法已趋成熟。《汉书·律历志》中有关于算筹的形状与大小的记载：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。”西汉算筹一般是直径为 0.23 厘米，长约 13.86 厘米的圆形竹棍，把 271 枚筹捆成六角形的捆。而《隋书·律历志》称：“其算用竹，广二分，长三寸。正策三廉，积二百一十六枚成六觚，干之策也。负策四廉，积一百四十四枚成方，坤之策也。”到了隋代，算筹已是三棱形与四棱形两种，以区别正数与负数。

算筹是筹算的工具，可以摆成纵式和横式的两种数字，按照纵横相间（“一纵十横，百立千僵”）的原则表示任何自然数，从而进行加、减、乘、除、开方以及其他的代数计算。

筹算一出现，就严格遵循十进位值制记数法。算筹记数的规则，最早载于《孙子算经》：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千、十相望，万、百相当。”九以上的数就进一位，同一个数字放在百位就是几百，放在万位就是几万。

这种记数法，除所用的数字和现今通用的印度—阿拉伯数字形式不同外，和现在的记数法实质是一样的。

我国古代的筹算表现为算法的形式，而具有模式化、程序化的特征。它的运算程序和现今珠算的运算程序基本相似。记述筹算记数法和运算法则的著作有《孙子算经》（公元 4 世纪）、《夏侯阳算经》（公元 5 世纪）和《数术记遗》（公元 6 世纪）。因此，我国古算中的“术”，都是用一套一套的“程序语言”所描写的程序化算法，并且中算家经常将其依据的算理蕴含于演算的步骤之中，起到“不言而喻，不证自明”的作用。可以说“寓理于算”是古代筹算在表现形式上的又一特点。

负数出现后，算筹分成红黑两种，红筹表示正数，黑筹表示负数。也可以用斜摆的小棍表示负数，用正摆的小棍表示正数。

算筹还可以表示各种代数式，进行各种代数运算，方法和现今的分离系数法相似。我国古代在数字计算和代数学方面取得的辉煌成就，和筹算有密切的关系。例如祖冲之的圆周率准确到小数第六位，需要计算正一万二千二百八十八边形的边长，把一个九位数进行二十二次开平方（加、减、乘、除步骤除



外), 如果没有十进位值制的计算方法, 那就会困难得多了。

我国古代的筹算不仅是正、负整数与分数的四则运算和开方, 而且还包含着各种特定筹式的演算。我国古人不仅利用筹码不同的“位”来表示不同的“值”, 发明了十进位值制记数法, 而且还利用筹在算板上各种相对位置排列成特定的数学模式, 用以描述某种类型的实际应用问题。例如列衰、盈朒、“方程”诸术所列筹式描述了实际中常见的比例问题和线性问题; 天元、四元及开方诸式, 则刻画了高次方程问题; 而大衍求一术则是为“乘率”而设计的特殊筹式。

筹式以不同的位置关系表示特定的数量关系。在这些筹式所规定的不同“位”上, 可以布列任意的数码(它们随着实际问题的不同而取不同的数值), 因而, 我国古代的筹式本身就具有代数符号的性质。可以认为, 是一种独特的符号系统。

知识点

系数

数学上的系数是指在与特定的变量(或未知函数)及其导数有关的表达式或方程中, 与未知数相乘的已知函数或常数。单项式中的数字因数为这个单项式的系数。多项式中最高次幂项的因数叫做这个多项式的系数。通常系数不能为零。

延伸阅读

十进位制算筹记数法是个伟大的创造

我国古代十进位制的算筹记数法在世界数学史上是一个伟大的创造。把它

与世界其他古老民族的记数法作一比较，其优越性是显而易见的。古罗马的数字系统没有位值制，只有 7 个基本符号，如要记稍大一点儿的数目就相当繁难。古美洲玛雅人虽然懂得位值制，但用的是 20 进位；古巴比伦人也知道位值制，但用的是 60 进位。20 进位至少需要 19 个数码，60 进位则需要 59 个数码，这就使记数和运算变得十分繁复，远不如只用 9 个数码便可表示任意自然数的十进位制简捷方便。我国古代数学之所以在计算方面取得许多卓越的成就，在一定程度上应该归功于这一符合十进位制的算筹记数法。

阿拉伯数码

阿拉伯数码和记数法也像整个阿拉伯数学一样，是在一定程度上吸收了外来成就，特别是希腊和印度成就以后，经过自己的加工、发展而成的。

聪明的阿拉伯人看到古希腊曾用字母表示数，阿拉伯文共有 28 个字母，他们就用每个字母代表一个数字。其中 9 个字母代表个位数，9 个字母代表十位数 10~90，还有 9 个字母代表百位数 100~900，剩下一个字母代表 1000。

这里，阿拉伯数字记数是按数字从小到大顺序排列，并不是字母表原来的顺序。这种字母记数法，从中世纪直到现在还在使用，多半用于占卜和神事。令人感兴趣的是，在阿拉伯词典中，每一个字母都表明它所代表的数字。

关于阿拉伯数字，曾有一个美丽的传说：古老的阿拉伯数字中，凡两条线段交叉处就组成一个角，每个阿拉伯数字原来的形状就是角的个数。

数 1, 2, 3……曾在欧洲一些数学史书中被记载为“阿拉伯数字”。其实，这是一个历史的误会，从迄今为止所搜集到的古印度数码可知，古印度数码早在公元 4~5 世纪就已经稳定地发展了。公元 8 世纪，阿拉伯人入侵印度，发现了印度具有十进位值制的德温那格利数字比阿拉伯原用 28 个字母记数符号以及当时欧洲人使用罗马记数方法既简便又科学。阿拉伯人一见钟情，对它产生了极大的兴趣。

公元 773 年，据说有一位在巴格达城的印度天文、数学家，开始将印度天



文、数学书籍译成阿拉伯文，于是这时，印度数码传入阿拉伯国家。估计这位印度人带去的是德温那格利数码（具有十进位值制）。还有一本书说，印度传入的阿拉伯数码，最早见于公元 662 年叙利亚一个“一性论派”主教塞·西波克的著作中。两种说法相差 100 余年，若后者成立，印度数码传入阿拉伯应当早在 7 世纪了。

在传入的基础上，阿拉伯第一位伟大的数学家阿尔·花拉子模写成《印度的算术》（又译为《印度数字的计算法》），书中用阿拉伯文叙述了十进位制记数法及其运算法则，特别提出数“0”在其中的应用及其乘法性质。这是第一部用阿拉伯语介绍印度数码及记数法的著作，后人称为“印度—阿拉伯数码”。

公元 8 世纪，阿拉伯人入侵西班牙以后，把印度这种数码传给西班牙。后来经西班牙传入意大利、法国和英国。西欧人称其为“阿拉伯数码”，这就是现在阿拉伯数码名称的起源。



知识点

中世纪

中世纪是欧洲（主要是西欧）历史上的一个时代，时间范围约自西罗马帝国灭亡（公元 476 年）数百年后起，在世界范围内，封建制度占统治地位的时期，直到文艺复兴时期（公元 1453 年）之后，资本主义抬头的时期为止。中世纪时期的欧洲没有一个强有力的政权来统治。封建割据带来频繁的战争，造成科技和生产力发展停滞，人民生活在毫无希望的痛苦中，所以中世纪或者中世纪早期被称做“黑暗时代”，传统上认为这是欧洲文明史上发展比较缓慢的时期。

延伸阅读

阿拉伯数学——数学之桥

阿拉伯吸收、保存了希腊、印度的数字，并将它传到欧洲，阿拉伯人发明了代数这门学科的名称。此外，阿拉伯人还解出一些一次、二次方程，甚至三次方程，并且用几何图形来解释它们的解法。

阿拉伯人获得了较精确的圆周率，已计算 15 位到小数点后 17 位。此外，他们在三角形上引进了正切和余切，给出了平面三角形的正弦定律的证明。平面三角和球面三角的比较完善的理论也是他们提出的。阿拉伯数学作为“数学之桥”，还在于翻译并著述了大量数学文献，这些著作传到欧洲后，数学从此进入了新的发展时期。

十进位小数

小数就是不带分母的十进分数，完全的称呼是“十进小数”。小数的出现标志着十进位记数法从整数扩展到分数，使整数和分数在形式上获得了统一。

虽然小数点“.”最早是欧洲人创造出来的，但是十进位小数却最早见于我国公元 3 世纪数学家刘徽注的《九章算术》中。

古代四大文明古国对进位小数都有所研究，我国不仅是世界上最早采用十进制记数法的国家之一，而且也是最早使用十进制小数的国家。古印度和阿拉伯数学中也用到十进小数。他们在表示小数时，把小数部分的各数分别用圆圈圈起来以便与整数区分。例如 42.56 表示为 42⑤⑥。这种方法后来传入阿拉伯和欧洲。

我国古代表示小数，一般借助于度量衡单位。例如：在我国的小数记数中，把 3.1415927 表示为三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽。当小数位增多



时,则需要引进一批更小的单位。秦九韶的《数书九章》中,关于一个复利问题的答案是“二万四千七百六贯二百七十九文,三分四厘八毫四丝六忽七微七沙三莽一轻二清五烟”。因为当时钱币是以文为最小单位的,所以“文”以后各位都是小数。上面的数相当于 24706279.3484670703125 文。秦九韶认为,整数的最后一位是“元数”,它是一个“尾数”为零的数。他把小数部分称为“尾数”,我国古代的数学家杨辉,在他的著作中把一个宽 $24\text{步}3\frac{4}{10}\text{尺}$ ($1\text{步}=5\text{尺}$),长 $36\text{步}2\frac{8}{10}\text{尺}$ 的长方形田的求积问题,化成以步为单位来计算,就会得到:

$$24.68 \times 36.56 = 902.3008$$

这与我们现在的表示法一样。

到了 14 世纪,我国的《丁巨算法》一书中,首先把整数与小数部分严格区分开来。但是小数点是用“余”字来表示的。当小数点后的第一位有效数字前有若干个零时,我们现在可以利用科学记数法来简记。例如电子的质量为 $0.\underbrace{000000000000000000000000}_{27\text{个}0}911\text{克}$, 它就可以简写成 $9.11 \times 10^{-28}\text{克}$ 。这种

科学记数法的发明权也属于我国。远在公元 5 世纪,数学家夏侯阳就指出,当除数是 10 或 10 的幂时,可以不再做除法。他列出的规则即相当于用 10^{-1} 、 10^{-2} 等来表示,可惜已经失传。直到 15 世纪末法国数学家休凯再度引进,才得以固定下来。

虽然我国是最早采用十进小数的国家,但是并没有出现真正的小数点“.”。小数点的出现应归功于 16 世纪荷兰的会计工作者、数学家和物理学家斯蒂文。1585 年,他发表了《论小数》一文,首先引进了符号①,把符号①放在个位数的后面或上面来区分一个数的整数部分和小数部分;小数部分的数字从左向右依次在它们上面写上①②③等。例如 5.912 可以记为 $\frac{①②③}{5912}$, 后来他觉得这样书写起来并不方便,又改为 5①9①1②2③。这样一来,小数的概念清楚了,但是用起来并不顺手。到了 1592 年,瑞士人布吉仅用一个符号