目　　录

第1章 技　　术

描述厂商技术最简单和最普通的方法就是生产函数，这已在 1
中级课程中一般化地研究过了。不过，在某些情形下，还有描述厂商技术的更加一般化和更有用的方法。在本章中，我们要对表示厂商生产可能性的那些方法，连同简要描述厂商技术有关方面的方法一起，进行讨论。

1.1　投入和产出的度量

厂商通过各种投入的组合来生产产出。为了研究厂商的选择，我们需要一个便于使用的方法来概括厂商的生产可能性，亦即哪些投入和产出的组合是**技术上可行的**。

通常，最令人满意的是将投入和产出按照流量来度量：每个时期，一定量的投入被用来在每个单位时期生产出一定量的产出。
在特定的投入和产出中，明确地把时间特性包括进来是个好主意。 2
如果你这样做了，那么，使用不相称的单位，混淆存量和流量，或犯其他一些基本错误的可能性就会更小。例如，如果我们按每周小时数来度量劳动时间，我们就会按每周小时数来度量资本贡献和产出的生产。不过，当抽象地讨论技术选择时，正如我们在这一章中所做的那样，通常省略时间特性。

我们也能根据投入和产出的日期、地点，甚至环境来区分投入和产出。按照何时和何地来界定投入和产出，我们可以抓住生产的某些时间或空间特点。例如，在一个给定年份得到的水泥，可以用来构建一座在其下一年完工的建筑物。类似地，在一个地方购买的水泥可用于其他地方的生产。

“水泥”投入应被看作是，可在特定的地点和时间得到的，一定等级的水泥。在一些情况下，我们甚至会给这一限定性条件的排列中增加诸如“如果天气是干燥的”等要求；也就是我们要考虑水泥产地的自然环境。我们在明确说明投入和产出特性时所需用的详细程度要依据手边的问题而定，但我们要知道，一个特定的投入和产出品，可以按人为地、非常细的内容来明确说明。

1.2 技术的说明

假定厂商有 n 种可能的物品用作投入和/或产出。如果厂商用 y_j^i 个单位的物品 j 做为投入，并且生产出 y_j^o 个该物品做为产出，那么物品 j 的**净产出**就由 $y_j = y_j^o - y_j^i$ 给出。如果物品 j 的净产出是正的，那么该厂商生产的物品 j 要比它用作投入的要多；如果净产出是负的，那么该厂商使用的物品 j 要比其生产的多。

生产计划简单来说就是各种物品净产出的一个一览表。我们可以用在 R^n 中的一个向量 y 来表示一个生产计划，其中，如果第 j 项物品是用来做净投入的，那么 y_j 就是负的；如果第 j 项物品是用来做净产出的，那么 y_j 就是正的。所有技术上可行的生产计划的集合被称作该厂商的**生产可能性集**，并且以 R^n 中的一个子集 Y 来表示。Y 集描述了所有技术上可行的投入和产出的模式。它给出我们对厂商所面临的技术可能性的一个完整的描述。

当我们研究某些特定的经济环境中的厂商行为时，我们可能想要在那些“立即可行的”和“最终可行的”生产计划间做出区分。例如，在短期，厂商的一些投入是不变的，以致于仅只是与这些不 3
变要素相容的生产计划才是可能的。在长期，这类要素可以变动，以致厂商的技术可能性也会改变。

我们可以一般化地假定，这样的限制可由 R^n 中的向量 Z 来描述。例如，Z 可以是最大量的各种投入以及可以在研究中的时期内生产出的产出的一个一览表。**受限制的或短期生产可能性集**可

以由 $Y(z)$ 来表示；这由所有与约束水平 Z 相一致的可行的净产出束组成。例如，假设要素 n 短期被固定在 $\bar{y}_n$ 上。那么 $Y_{(\bar{y}_n)}=\{y$ 在 Y 中：$y_n=\bar{y}_n\}$。注意，$Y_{(z)}$ 是 Y 的一个子集，因为它由所有可行的生产计划组成（这就意味着它们在 Y 中）；而这些计划也能满足某些附加条件。

例子：投入要求集

假定我们正在考虑一家只生产一种产出的厂商。在这个例子中，我们将净产出束写作 $(y,-x)$，其中 x 是可以生产 y 单位产出的一个投入向量。然后，我们可以定义一类特殊的受限制的生产可能性集，**投入要求集**：

$V(y)=\{\mathrm{x}$ 在 R^n_+ 中：$(y,-\mathrm{x})$ 在 Y 中$\}$ 投入要求集是至少可以生产 y 单位产出的所有投入束的集合。

注意，正如这里所定义的那样，投入要求集以正数度量投入，而不是像生产可能性集中使用负数。

例子：等产量线

在上面的例子中，我们也可以定义**一条等产量线**

$Q(y)=\{\mathrm{x}$ 在 R^n_+ 中：x 在 $V(y)$ 中并且 X 不在 $V(y')$ 中，$y'>y\}$。

等产量线给出所有刚好生产 y 单位产出的投入束。

短期生产可能性集

假设一个厂商用劳动和某种我们称作"资本"的机器来生产某种产出。那么生产计划看上去就像 $(y,-l,-k)$，其中 y 是产出水平，l 是劳动投入量，k 是资本投入量。我们设想短期内，劳动可以立即变化，但资本被固定在水平 $\bar{k}$ 上。那么：

$$Y(\bar{k})=\{(y,-l,-k)\text{在 }Y\text{ 中}:k=\bar{k}\}$$

就是一个**短期生产可能性集**的例子。

例子：生产函数

如果厂商仅只有一种产出，我们可以定义**生产函数**：

$f(x)=\{y\ in\ R$：y 是与在 Y 中的 $-x$ 相联的最大产出｝

例子：变换函数

生产函数的 n 维模拟在我们对一般均衡理论的研究中会是有用的。如果在 Y 中不存在这样的 y'，竟致于 $y'\geqslant y$ 并且 $y'\neq y$，那么在 Y 中的生产计划 y 就是（**技术上**）**有效的**；那就是，如果没有用同样的投入生产出更多的产出或用更少的投入生产出相同产出的方法，生产计划就是有效的。（仔细注意投入品的符号约定怎样在这里起作用。）我们常常假定可以通过一个**变换函数** $T: R^n\rightarrow R$ 来描述技术上有效的生产计划的集合，其中，当且仅当 y 是有效时，$T(y)=0$。正如生产函数送出最大的纯量作为投入的函数一样，变换函数则选出了最大化的净产出向量。

例子：柯布-道格拉斯技术

让 a 是这样的一个系数，以致于 $0<a<1$。那么，**柯布-道格拉斯技术**可以下面的方式来定义。见图 1.1A。

$$Y=\{(y,-x_1,-x_2)\text{ in }R^3: y\leq x_1^a x_2^{1-a}\}$$

$$V(y)=\{(x_1,x_2)\text{ in }R_+^2: y\leq x_1^a x_2^{1-a}\}$$

$$Q(y)=\{(x_1,x_2)\text{ in }R_+^2: y=x_1^a x_2^{1-a}\}$$

$$Y(z)=\{(y,-x_1,-x_2)\text{ in }R^3: y\leq x_1^a x_2^{1-a}, x_2=z\}$$

$$T(y,x_1,x_2)=y-x_1^a x_2^{1-a}$$

$$f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$$

例子：里昂惕夫技术

令 $a>0$ 和 $b>0$ 为系数。那么，**里昂惕夫技术**可以下面的方式来定义。见图 1.1B。

$$Y=\{(y,-x_1,-x_2)\text{ in }R^3: y\leq\min(ax_1,bx_2)\}$$

$$V(y)=\{(x_1,x_2)\text{ in }R_+^2: y\leq\min(ax_1,bx_2)\}$$

$$Q(y)=\{(x_1,x_2)\text{ in }R_+^2: y=\min(ax_1,bx_2)\}$$

$$T(y,x_1,x_2)=y-\min(ax_1,bx_2)$$

$$f(x_1,x_2)=\min(ax_1,bx_2).$$

5

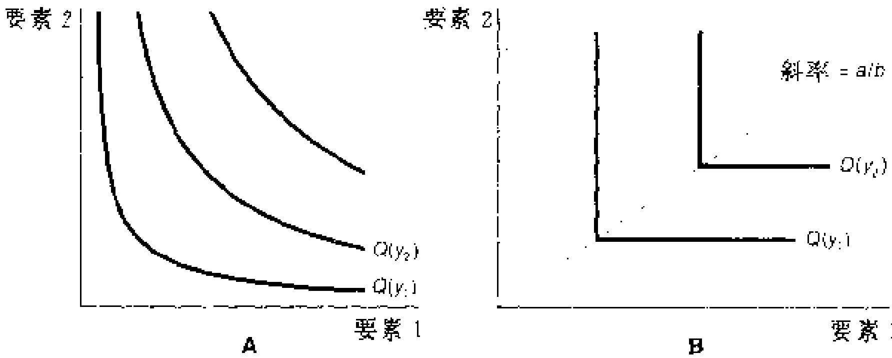

图 1.1 **柯布-道格拉斯和里昂惕夫技术** 图 A 描画道格拉斯技术的一个一般形状，图 B 描画里昂惕夫技术的一个一般形状。

在本章，我们将主要处理只生产一种产出的厂商；因此，我们将主要通过投入要求集或生产函数来描述它们的技术。以后，我们会使用生产集和变换函数。

1.3 活动分析

描述生产集或投入要求集最直接的方法就是简单地列出可行的生产计划。例如，假设我们可以用要素投入 1 和要素投入 2 来生产一种产出品。这有两种不同的生产**活动或技术**：

技术 A：一个单位的要素 1 和二个单位的要素 2，可以生产一个单位的产出。

技术 B：二个单位的要素 1 和一个单位的要素 2，可以生产一个单位的产出。

令产出是物品 1，要素是物品 2 和物品 3。那么，我们表示这两种活动所意味的生产可能性，可以通过生产集

$$Y = \{(1, -1, -2), (1, -2, -1)\}$$

或通过投入要求集

$$V(1) = \{(1,2),(2,1)\}.$$

图1.2A描绘了这一投入要求集。

可能有这种情况，即为了生产 y 单位产出，我们可以刚好使用每个投入品的 y 倍。$y=1,2\cdots\cdots$。在这种情况下，你会想到生产 y 单位产出的可行方法的集合可以表示成 6

$$V(y) = \{(y,2y),(2y,y)\}.$$

不过，这个集合并没有包括所有相关的可能性。确实，如果我们使用技术 A 的话，$(y,2y)$ 会生产出 y 单位的产出，并且如果我们使用技术 B 的话，$(2y,y)$ 也会生产出 y 单位的产出——但是，如果我们使用技术 A 和 B 的混合方式的话，会怎么样呢？

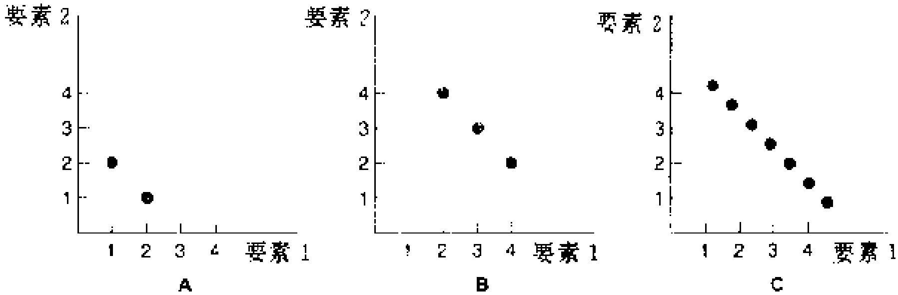

图1.2 **投入要求集** 图A描画 $V(1)$，图B描图 $V(2)$，图C相对于更大的 y 值描画 $V(y)$

在这种情况下，我们得令 y_A 是使用技术 A 的产出量，y_B 是使用技术 B 的产出量。那么，$V(y)$ 可以表示成集合

$$V(y) = \{(y_A + 2y_B, y_B + 2y_A): y = y_A + y_B\}.$$

这样，例如，$V(2)=\{(2,4),(4,2),(3,3)\}$，就正如图1.2B所描绘的那样了。注意，投入组合(3,3)可以通过用技术 A 生产一单位和用技术 B 生产一单位而生产出二单位的产出。

1.4 单调技术

让我们来继续检查上节所引入的两活动的例子。假设我们有

投入向量(3,2)。这足以生产出一单位的产出吗？我们可以说，既然我们可以处理掉2个单位的要素1，并且还留下(1,2)，那实际上是可以用(3,2)的投入来生产出一单位的产出。这样一来，如果这样的**自由处置**是允许的话，我们说，如果 x 是生产 y 单位产出的可行方法，并且 x' 是与 x 中的每种投入至少一样多的投入向量，那么 x' 也应是生产 y 单位，产出的一种可行方法，就是合理的了。因此，投入要求集在下面的意义上应是**单调的**：

单调性 如果 x 在 $V(y)$ 中，并且 $x' > x$，那么，x' 也在 $V(y)$ 中。 7

如果我们假定单调性成立，那么图1.2中所描绘的投入要求集就变成了图1.3所描绘的集合。

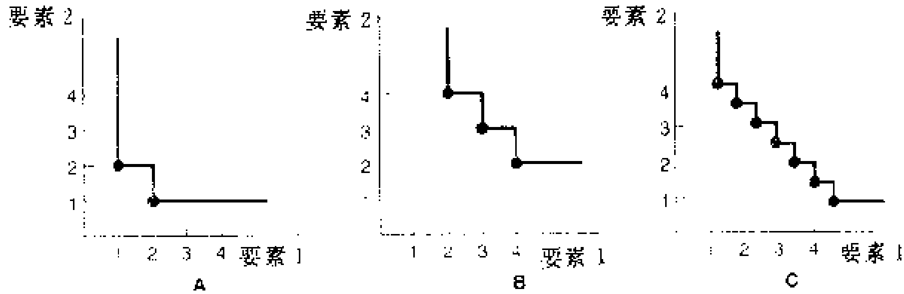

图 1.3 **单调性**如果我们也假定单调性，这里是同样的三个投入要求集。

单调性对生产集而言通常也是一个适当的假设。在本书中，我们想要一般化地假定，如果 y 在 Y 中，并且 $y' \leqslant y$，那么 y' 也一定在 Y 中。仔细注意。符号约定在这里是如何起作用的。如果 $y' \leqslant y$，意味着向量 y' 的每个组成部分都小于或等于 y 的相应组成部分。这就意味着，与 y 相比，y' 所代表的生产计划通过使用与 y 至少一样多的所有投入，生产出相等或较少的产出来。因此，人们自然会假定，如果 y 是可行的，y' 也是可行的。

1.5 凸 技 术

让我们现在来考虑，如果我们想要生产 100 个单位的产出，投入要求集看上去会是什么样子。做为第一步，我们可能会说，如果我们用 100 乘以向量(1,2)和(2,1)，刚好能够复制以前我们所做的工作。因此生产出 100 倍的产出来。显然，并非所有的生产过程一定会允许这种复制，但这在许多情形下，却似乎是貌似有理的。

如果这样的复制是可能的话，那么我们可以断定(100,200)和(200,100)在 $V(100)$ 当中。还有其他生产 100 单位产出的方法吗？我们可以进行 50 次活动 A 和 50 次活动 B。这会使用 150 单位物品 1 和 150 单位物品 2 来生产 100 单位的产出；因此，(150,150)应该在投入要求集中。类似地，我们可以进行 25 次活动 A 和 75 次活动 B。这就意味着

$$.25(100,200)+.75(200,100)=(175,125)$$

应该在 $V(100)$ 中。更一般化地， 8

$$t(100,200)+(1-t)(200,100)=(100t+200(1-t),200t+(1-t)100)$$

应该在 $V(100)$ 中，其中 $t=0,.01,.02,\cdots\cdots 1$.

我们也可以在这儿做出显然的近似，让 t 取 0 与 1 之间任意小的数值。这会导致图 1.4A 所描绘的生产集形式。在往下的一个定义中对这一特性作出了精确表述。

凸性　如果 x 和 x' 都在 $V(y)$ 中，那么，对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的 t 而言，$tx+(1-t)x'$ 在 $V(y)$ 中。那就是，$V(y)$ 是一个**凸集**。

我们通过一个复制的论据，引出了凸性假定。如果我们想要生产“大”量的产出，并且可以复制“小”的生产过程，那么似乎是技术应被模型化成凸性。不过，假如基本活动的规模相对于适意的产出量是巨大的话，凸性可能并非是合理的假定。

尽管如此，关于凸性在某些情况下为什么是合理的假定，也仍

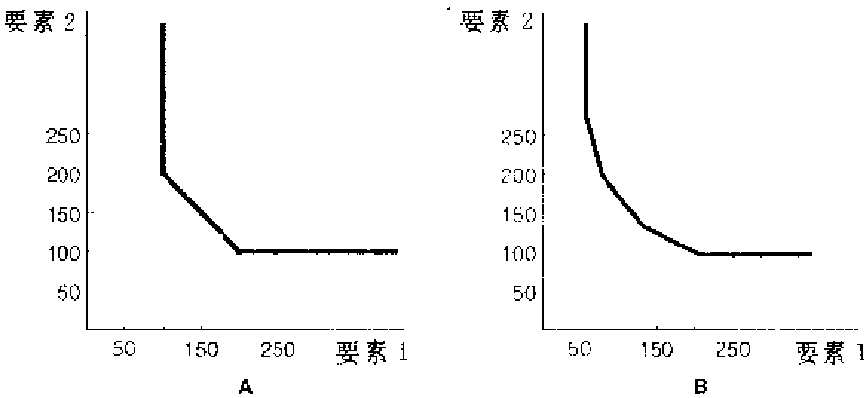

图 1.4 **凸的投入要求集** 如果 x 和 x' 可以生产 y 单位产出，那么任意加权平均 $tx+(1-t)x'$ 也能生产出 y 单位的产出。图 A 描画一个带两个基本活动的凸投入要求集；图 B 描画一个带许多基本活动的凸投入要求集。

有其他的支持观点。例如，假定我们正在考虑每个月的产出。如果投入向量 x 每月可生产 y 单位产出，另一个向量 x' 每月也生产 y 单位产出，那么，我们可以使用 x 半个月。使用 x' 另半个月。如果在月中转变生产计划不会产生什么问题的话，我们就可以合理地预期会得到 y 单位产出。

我们把上面给出的论据运用到了投入要求集上了，但类似的论据也可运用到生产集上。通常，假定如果 y 和 y' 都在 Y 中，那么对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 而言，$ty+(1-t)y'$ 也在 Y 中；换句话说，Y 是一个凸集。不过，应该注意到，生产集凸性是比投入要求集凸性更成问题的假定。例如，生产集凸性将“启动成本”(start up costs)和其他的规模报酬排除在外了。这一点不久就要更详细地讨论。现在，我们要描述 $V(y)$ 的凸性，生产函数的曲度，以及 Y 集凸性之间的一些关系。

凸生产集意味着凸投入要求集。如果生产集 Y 是一个凸集，那么

相联的投入要求集也是一个凸集。

证明　如果 Y 是一个凸集，那么可以得出，对任何使 $(y,-x)$ 和 $(y,-x')$ 都在 Y 中 x 和 x' 来说，我们一定会有 $(ty+(1-t)y,-tx-(1-t)x')$ 在 Y 中。简单地说，这就是要求 $(y,-(tx+(1-t)x'))$ 在 Y 中。这就得出，如果 x 和 x' 在 $V(y)$ 中，$tx+(1-t)x'$ 也在 $V(y)$ 中，说明 $V(y)$ 是凸的。

凸投入要求集等价于拟凹生产函数。 $V(y)$ 是凸集，当且仅当生产函数 $f(x)$ 是一个拟凹函数

证明　$V(y)=\{x:f(x)\geqslant y\}$，正是 $f(x)$ 的上等值集(the upper contour set)。但是，一个函数是拟凹的，当且仅当它有一个上等值集。参见原书第 27 章。

1.6　正则技术(Regular technologies)

最后，我们考虑有关 $V(y)$ 的一个弱正则条件。

正则　对所有 $y\geqslant 0$ 而言，$V(y)$ 是一个非空的闭集。

$V(y)$ 是非空的假定要求，总存在某种可想到的方法来生产出任意给定水平的产出。这仅是想简单地避免以象“假定 y 可以被生产出来”这样的短语来修正语句。

做出 $V(y)$ 是闭集的假定是因为技术上的原因，并且在大多数课文中是无害的。假定 $V(y)$ 是闭集的一个涵义如下：假定我们有一序列投入束 (x^i)，它们每个都能生产 y 单位产出，并且这一序列收敛于投入束 x^0。那就是说，序列中的投入束任意靠近 x^0。如果 $V(y)$ 是个闭集，那么这就限定投入束 x^0 必须能生产 y 单位产出。粗略地说，投入要求集必须“包括它自己的边界。”

1.7　技术的参数表示

假设我们有许多可能的方法来生产某一给定水平的产出。那

么，以像图 1.5 中的“平滑的”投入要求集来概括这一投入集，可能是合理的。那也就是，我们想要拟合一条通过这些可能的生产点的性状良好的曲线。如果确实许多略有不同的方法来生产一给定水平的产出，这样的一个平滑过程就不应牵扯到任何太大的问题。

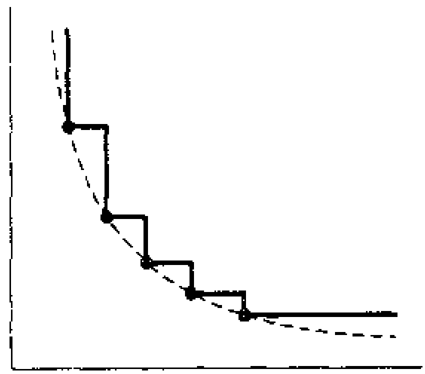

图 1.5 **拟平一条等产量线**一个投入要求集和对其的一个“平滑的”近似。

如果我们的确做出了这样的一种近似来“平滑”投入要求集，那么进一步寻求一种便利的方法，用包括一些未知参数的参数函数来表示该技术就是自然的了。例如，前面提到过的柯布-道格拉斯技术就意味着任何满足 $x_1^a x_2^b \geqslant y$ 的投入束 $(x_1\ x_2)$ 都可以生产至少 y 单位的产出。

这些技术的参数表示当然不必看作是对生产可能性的如实描述。生产可能性是描述实际可能的生产计划的工程数据。也可能恰好这一工程数据可以很好地、合理地由一种诸如像柯布-道格拉斯函数这样便利的函数形式来描述。如果是这样的话，这样的一种参数描述可以非常有用。

在大多数应用中，我们仅只关心对一项技术，在某种特定水平的投入和产出范围内，有一种参数近似，并且通常使用相对简单的函数形式来做出这样的一种参数近似。做为教学工具，这些参数表

示是非常方便的，并且我们将常常认为我们的技术有这样的一种表示。这时我们就可以把微积分和代数的工具带来审查厂商的生产选择。

1.8 技术替代率(TRS)

假定我们有某项可由一平滑的生产函数来概括的技术，并且我们正在一特定的点 $y^*=f(x_1^*,x_2^*)$ 上进行生产。设想我们想要增加投入 1 的用量，减少投入 2 的用量，以便保持不变的产出水平。我们怎么才可以决定这两种要素间的**技术替代率**呢？

在二维的情况下，技术替代率正好是等产量线的斜率：这正如图 1.6 所描绘的那样，当 x_1 发生少量变化时，必须如何调整 x_2 以保持产出不变。在 n 维的情形下，技术替代率是按特定方向度量的等产量曲面的斜率。

让 $x_2(x_1)$ 成为告诉我们如果我们正使用 x_1 单位的其他投入，需要多少单位的 x_2 来生产 y 单位的产出的(隐)函数。那么根据定义，函数 $x_2(x_1)$ 必须满足恒等式

$$f(x_1,x_2(x_1))\equiv y$$

我们求 $\partial x_2(x_1^*)/\partial x_1$ 的表达式。对上面的恒等式进行求导，我们得到：

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}+\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1}=0$$

或

$$\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1}=-\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_1}{\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_2}.$$

这就给出了技术替代率一个明确的表达式。

这里是另一种得出技术替代率的方式。设想一个在投入水平上发生(很小)变化的向量，我们可以将此写作 $dx=(dx_1,dx_2)$。产出方面的相关变动近似为

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2.$$

这一表达式就是函数 $f(x)$ 的**全微分**。考虑一个特定的变化，其中仅要素1和要素2变动，并且该变动要满足产出保持不变。那就是，dx_1 和 dx_2 要"沿一条等产量线"调整。

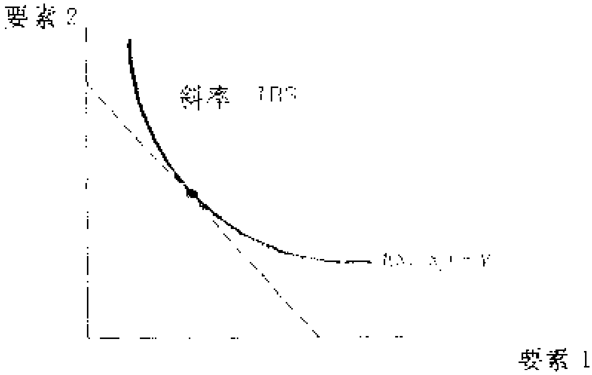

图 1.6 **技术替代率**技术替代率度量当另一种投入变动时，为了保持产出不变，一种投入如何变动

既然产出保持不变，我们就有

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2,$$

这可以解出：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}.$$

不管是隐函数方法还是全微分方法都可以用来计算技术替代率。隐函数方法更严格一点，但全微分方法恐怕更直观。

例子：柯布-道格拉斯技术的技术替代率(TRS)

给定 $f(\mathbf{x}_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$，求偏导得到

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = a\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{1-a}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = (1-a)x_1^a x_2^{-a} = (1-a)\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^a$$

可以得出

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}=-\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}=-\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}.$$

1.9 替代弹性

技术替代率度量等产量线的斜率。**替代弹性**则度量等产量线的曲率。更具体地说，替代弹性度量当产出保持不变时，要素比率的百分比变动除以技术替代率的百分比变动。如果我们让 $\triangle(x_2/x_1)$ 表示要素比率的变动，$\triangle TRS$ 表示技术替代率的变动，我们可以将替代弹性表示为

$$\sigma=\frac{\dfrac{\triangle(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\dfrac{\triangle TRS}{TRS}}.$$

这是对曲率相对自然的度量；它问随着等产量斜率的变动，要素投入比率如何变化。如果斜率的微小变化引起要素投入比率很大的变动，等产量就相对平滑，这就意味着替代弹性是大的。

实际上，我们认为百分比变动很小，当$\triangle$趋于 0 时，取了这一表达式的极限。因此，σ 的表达式成了

$$\sigma=\frac{TRS}{(x_2/x_1)}\frac{d(x_2/x_1)}{dTRS}.$$

通常，使用**对数微商**来计算 σ 是方便的。总的说来，如果 $y=g(x)$，y 对 x 的弹性指的是由 x（微小）的百分比变动所引致的 y 的百分比变动。那就是，

$$\in=\frac{\dfrac{dy}{y}}{\dfrac{dx}{x}}=\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

假如 x 和 y 是正的，这一微商可以写作

$$\in = \frac{d\ln y}{d\ln x}.$$

要证明它，注意通过连锁法则

$$\frac{d\ln y}{d\ln x}\frac{d\ln x}{dx} = \frac{d\ln y}{dx}.$$

对等号左边和右边进行计算，我们有

$$\frac{d\ln y}{d\ln x}\frac{1}{x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

要不，我们可以使用全微分 14

$$d\ln y = \frac{1}{y}dy$$

$$d\ln x = \frac{1}{x}dx,$$

满足

$$\in = \frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

又是给出的第一个计算更严格，但第二个计算更直观。

把这个用到替代弹性上，我们可以写作

$$\sigma = \frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln|TRS|}.$$

（分母中的绝对值符号将技术替代率转换成正数，以便使对数有意义。）

例子：柯布-道格拉斯生产函数的替代弹性

上面我们已经看到

$$TRS = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1},$$

或者

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1-a}{a}TRS.$$

可以得出