高等学校教学参考资料

理论力学习题解答

（上）

吉林师范大学物理系力热教研室
理论力学教学组

批　号：80吉业印字第8号
开　本：787×1092毫米 1/16
字　数：328.320字
吉林师范大学物理系出版
吉林工业大学印刷厂印

1980年6月

说　明

自我系肖士珣教授所编《理论力学简明教程》一书出版以后，很多院校用作教本，并纷纷函索该书题解，又考虑到我系几年来用的课本是周衍柏先生编的《理论力学》（61年版，79年8月印刷本）。所以我们为了满足兄弟院校和我系的教学需要，有利于学生加深对理论力学的基本概念、定理和定律的理解和掌握，将以上两书的绝大部分习题都作了解答(500题左右），同时补充了我们多年来在理论力学教学上积累的类型题百余道题。选题比较全面，紧密配合教材。

此书可供综合大学、师范院校、理工院校、电视大学、业余大学等教师和学生参考。对于中学物理教师的进修和提高亦富有参考的价值。

每题在题目后边注有该题的出处，如（周5.15）系指该题是周衍柏先生编的《理论力学》第五章第15题。在题目后边无注明者，均为自选题。全书分上、下两册出版。上册题解为质点运动学、刚体运动学、相对运动和质点动力学：下册为质点组动力学、刚体动力学和分析力学部分。

参加编审工作的同志有：战永杰、贾玉江、朱霞云、刘云鹏、魏守常、金重铁。全书插图均由顾达天同志绘出。张世泽副教授参加了审稿工作。郭连财同志负责本书的出版、发行工作。

由于时间仓促和我们的水平有限，书中难免有错误和不足之处，恳切希望读者提出批评和指正。

本题解上册说明中第一行正数第五字，因改样之误，将“肖士珣”错改为“肖珣”，特此更正。

编　者

1980年3月

目　　录

目　　录

第一章 质点运动学

内 容 提 要

Ⅰ．运动与静止

1．相对于参考坐标系而言，运动点的坐标是时间 t 的函数，如点坐标为常数，则谓之静止。

2．运动方程

(a) 矢量形式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$。

(b) 坐标形式

（Ⅰ）直角坐标　$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$，$z=f_3(t)$。

（Ⅱ）曲线坐标　$q_1=q_1(t)$，$q_2=q_2(t)$，$q_3=q_3(t)$。

3．轨道——运动质点在空间一连串占据的点所形成的连续曲线，其方程可由运动方程消去 t 得到。

Ⅱ．速度与加速度

1．矢量形式 $\mathbf{v}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt^2}$，　$\mathbf{a}=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt^2}=\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

2．分量形式（平面）

	速　　度	加　　速　　度		速　　度	加　　速　　度
轴　向	$\dot{x}$，$\dot{y}$	$\ddot{x}$，$\ddot{y}$	径　向	$\dot{r}$	$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$
切　向	$\dot{S}$	$\ddot{S}$ 或 $v\dfrac{dv}{ds}$	横　向	$r\dot{\theta}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$
法　向	O	v^2/ρ			

1．1　已知两矢量 $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{i}-5\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$，$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$ 是笛卡儿坐标轴的单位矢量，计算：

（1）每个矢量的量值；

（2）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$；

（3）两矢量的夹角；

（4）每个矢量的方向余弦；

（5）$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的量值和方向；

（6）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$；　　（肖1．1）

〔解〕（1）　$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{50}$

$|\mathbf{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$

（2）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(-5)\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k})=-3+8-30=-25$

（3）设 a 与 b 间夹角为 θ，因 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$

所以
$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{-25}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{41}}=-0.553$$
$$\theta=123.5^\circ$$

（4）
$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{i}})=\cos\alpha=\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}=\frac{3}{\sqrt{50}}$$
$$\alpha=64^\circ54'$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{j}})=\cos\beta=\frac{a_y}{|\mathbf{a}|}=\frac{4}{\sqrt{50}}$$
$$\beta=55^\circ36'$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{k}})=\cos\gamma=\frac{a_z}{|\mathbf{a}|}=\frac{-5}{\sqrt{50}}$$
$$\gamma=135^\circ$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{i}})=\cos\alpha'=\frac{b_x}{|\mathbf{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{41}}$$
$$\alpha'=99^\circ$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{j}})=\cos\beta'=\frac{b_y}{|\mathbf{b}|}=\frac{2}{\sqrt{41}}$$
$$\beta'=71^\circ48'$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{k}})=\cos\gamma'=\frac{b_z}{|\mathbf{b}|}=\frac{6}{\sqrt{41}}$$
$$\gamma'=20^\circ24'$$

（5）
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(3-1)\mathbf{i}+(4+2)\mathbf{j}+(-5+6)\mathbf{k}=2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{2^2+6^3+1^2}=\sqrt{41}$$
$$\cos\alpha=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})_x}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}=\frac{2}{\sqrt{41}}\qquad\alpha=71^\circ48'$$
$$\cos\beta=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})_y}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}=\frac{6}{\sqrt{41}}\qquad\beta=20^\circ24'$$
$$\cos\gamma=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})_z}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}=\frac{1}{\sqrt{41}}\qquad\gamma=81^\circ$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(3+1)\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}+(-5-6)\mathbf{k}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-11\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{4^2+2^2+(-11)^2}=\sqrt{141}$$
$$\cos\alpha'=\frac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})_x}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}=\frac{4}{\sqrt{141}}$$
$$\alpha'=70^\circ18'$$

$$\cos\beta' = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})_y}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{141}}$$

$$\beta' = 80^\circ 18'$$

$$\cos\gamma' = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})_z}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = \frac{-11}{\sqrt{141}}$$

$$\gamma' = 157^\circ 54'$$

(6) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = [(4\cdot 6)-(-5\cdot 2)]\mathbf{i} + [(-1\cdot -5)-(6\cdot 3)]\mathbf{j} + [(2\cdot 3)-(4\cdot -1)]\mathbf{k}$

$= (24+10)\mathbf{i} + (5-18)\mathbf{j} + (6+4)\mathbf{k}$

$= 34\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

1．2　试证矢量 a 与矢量 b 垂直的条件是 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$。（肖1．2）

〔解〕已知矢量

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

据矢量乘法法则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\cdot b\cos(\widehat{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}})$$

当 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 时，

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}) = 0，\quad 亦即\quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

而　　$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

即　　$(a_x+b_x)^2 + (a_y+b_y)^2 + (a_z+b_z)^2 = (a_x-b_x)^2 + (a_y-b_y)^2 + (a_z-b_z)^2$

$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y + 2a_z b_z$

$= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2a_x b_x - 2a_y b_y - 2a_z b_z$

亦即　　$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$

等号两边相等，只有

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

方能满足，因此 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$，必然有 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。

1．3　已知矢量 $\mathbf{b} = x\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ 分别和 $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ 垂直，求 x 和 y，并证明 b 与 c 必平行（在三维空间中，和一矢量相垂直的两个矢量并不必平行）。（肖1．3）

〔解〕（1）求 x、y 之值，据题意

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5x + 18 = 0 \qquad x = \frac{-18}{5}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 10 + 6y = 0 \qquad y = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

（2）证明 $\mathbf{b}\parallel\mathbf{c}$，因

$$\mathbf{b} = -\frac{18}{5}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{c}=2\mathbf{i}-\frac{5}{3}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\frac{18}{5} & 3 & 0\\ 2 & -\frac{5}{3} & 0\end{vmatrix}=\left[\left(\frac{-18}{5}\cdot\frac{-5}{3}\right)-(2\times3)\right]\mathbf{k}=0$$

而

$$|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=b\cdot c\cdot\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}})=0$$

即 $$\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}})=0$$

b 与 c 夹角为 0°，故此$\mathbf{b}\parallel\mathbf{c}$得证。

1．4　若 a、b、c 三矢量共面，必须满足 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$，其中 λ 和 μ 是任意的数值。（肖1．4）

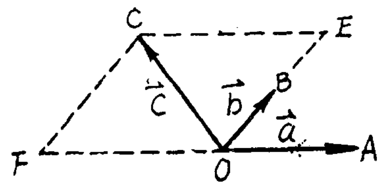
〔解〕若 a、b、c三矢量共面，则可把三矢量移置一点，如图所示，从 c 的端点作 a 与 b 的平行线，得一平行四边形，因

$$\mathbf{c}=\mathbf{OF}+\mathbf{OE}$$

而 $$\mathbf{OF}=\lambda\mathbf{a}$$

$$\mathbf{OE}=\mu\mathbf{b}$$

所以 $$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$$



（题1．4图）

1．5　若上题的三矢量 a、b、c 保持线性关系，证明这三个矢量都和平面π平行，并证矢量$(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c})$和$(7\mathbf{a}-12\mathbf{b}+14\mathbf{c})$ 都和平面π平行。（肖 1．5）

〔解〕取π平面与a、b平行。则因矢量a、b、c保持线性关系，即$\mathbf{c}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ 成立，则c在$m\mathbf{a}$与$n\mathbf{b}$构成的平面内，而$\mathbf{a}\parallel m\mathbf{a}$，$\mathbf{b}\parallel m\mathbf{b}$，所以c平行a、b所平行的平面$\pi$，因此a、b、c均平行于$\pi$平面。

又因 $$2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=(2+m)\mathbf{a}+(n-3)\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4m\mathbf{a}+4n\mathbf{b}=(4m+1)\mathbf{a}+(4n-2)\mathbf{b}$$

$$7\mathbf{a}-12\mathbf{b}+14\mathbf{c}=7\mathbf{a}-12\mathbf{b}+14m\mathbf{a}+14n\mathbf{b}=(14m+7)\mathbf{a}+(14n-12)\mathbf{b}$$

三矢量均与 a、b成线性关系，所以三矢量均平行 a、b所平行之平面 π。

1．6　已知点P_1与点P_2的笛卡儿坐标为（−7，2，3）与（−8，4，5），求证：

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，且沿 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$方向的单位矢量的投影为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。（肖1.6）

〔解〕设 (x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)分别为P_1与P_2的坐标。所以

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

$$=[(-8)-(-7)]\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}+(5-3)\mathbf{k}$$

$$=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

再求 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ 方向的单位矢量在 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$方向上的投影：

因 $$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$$

$$\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{i}})=\frac{(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_x}{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|}=\frac{-1}{3}$$

$$\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{j}})=\frac{(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_y}{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|}=\frac{2}{3}$$

$$\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{k}})=\frac{(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_z}{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|}=\frac{2}{3}$$

所以 $$x=1\cdot\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{i}})=-\frac{1}{3}$$

$$y=1\cdot\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{j}})=\frac{2}{3}$$

$$z=1\cdot\cos(\mathbf{P}_1\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{k}})=\frac{2}{3}$$

1．7 求证 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$。（肖1．7）

〔解〕

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\times\mathbf{c}$$

$$=[(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}]\times\mathbf{c}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_yb_z-a_zb_y&a_zb_x-a_xb_z&a_xb_y-a_yb_x\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}=&[(a_zb_x-a_xb_z)c_z-(a_xb_y-a_yb_x)c_y]\mathbf{i}\\&+[(a_xb_y-a_yb_x)c_x-(a_yb_z-a_zb_y)c_z]\mathbf{j}\\&+[(a_yb_z-a_zb_y)c_y-(a_zb_x-a_xb_z)c_x]\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&[a_zb_xc_z-a_xb_zc_z-a_xb_yc_y+a_yb_xc_y]\mathbf{i}\\&+[a_xb_yc_x-a_yb_xc_x-a_yb_zc_z+a_zb_yc_z]\mathbf{j}\\&+[a_yb_zc_y-a_zb_yc_y-a_zb_xc_x+a_xb_zc_x]\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&[a_zb_xc_z-a_xb_zc_z-a_xb_yc_y+a_yb_xc_y+a_xb_xc_x-a_xb_xc_x]\mathbf{i}\\&+[a_xb_yc_x-a_yb_xc_x-a_yb_zc_z+a_zb_yc_z+a_yb_yc_y-a_yb_yc_y]\mathbf{j}\\&+[a_yb_zc_y-a_zb_yc_y-a_zb_xc_x+a_xb_zc_x+a_zb_zc_z-a_zb_zc_z]\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&[(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_x-(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)a_x]\mathbf{i}\\&+[(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_y-(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)a_y]\mathbf{j}\\&+[(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_z-(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)a_z]\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\&-(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\end{aligned}$$

1．8　求证　$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$。（肖1．8）

〔解〕

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}\times\mathbf{d}=(c_yd_z-c_zd_y)\mathbf{i}+(c_zd_x-c_xd_z)\mathbf{j}+(c_xd_y-c_yd_x)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=(a_yb_z-a_zb_y)(c_yd_z-c_zd_y)\\&\quad+(a_zb_x-a_xb_z)(c_zd_x-c_xd_z)+(a_xb_y-a_yb_x)(c_xd_y-c_yd_x)\\&=a_yb_zc_yd_z-a_yb_zc_zd_y-a_zb_yc_yd_z+a_zb_yc_zd_y\\&\quad+a_zb_xc_zd_x-a_zb_xc_xd_z-a_xb_zc_zd_x+a_xb_zc_xd_z\\&\quad+a_xb_yc_xd_y-a_xb_yc_yd_x-a_yb_xc_xd_y+a_yb_xc_yd_x\\&=(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)(b_xd_x+b_yd_y+b_zd_z)\\&\quad-(a_xd_x+a_yd_y+a_zd_z)(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\end{aligned}$$

1．9　求证　$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$（肖1．9）

〔解〕

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$$

因此上面三式等号两边分别相加，即得

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

1．10　设矢量 r 在笛卡儿坐标系的投影为（x、y、z），证明 $div\mathbf{r}=3$，$rot\mathbf{r}=0$，并求使 $\mathbf{r}=grad\varphi$的函数 φ。（肖1．10）

〔解〕（1）

$$div\mathbf{r}=\frac{\partial r_x}{\partial x}+\frac{\partial r_y}{\partial y}+\frac{\partial r_z}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

（2）

$$rot\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$=0$$

（3）

$$\mathbf{r}=grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x\qquad\varphi=\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=y\qquad\varphi=\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=z\qquad\varphi=\frac{1}{2}z^2$$

或 $\varphi=\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)$

1．11 由一点发射出两个粒子在某时刻的位移为

$$\mathbf{r}_1=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+8\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_2=2\mathbf{i}+10\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

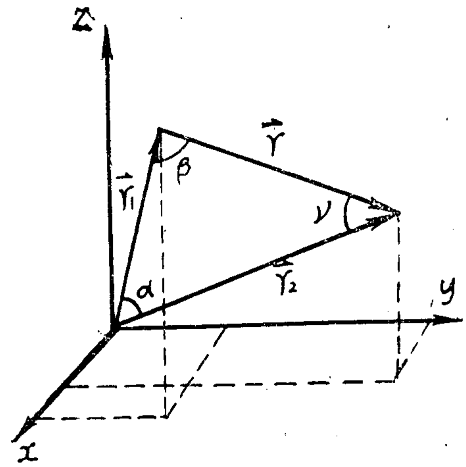
（1）画出并计算出第二粒子相对于第一粒子的位移 r；

（2）求出每个位移矢量的量值；

（3）计算这三个矢量间的所有的夹角；

（4）计算 $\mathbf{r}$ 对 $\mathbf{r}_1$ 的投影；

（5）计算矢积 $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$。（肖 1．11）



题1．11图

〔解〕（1）$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(2-4)\mathbf{i}+(10-3)\mathbf{j}+(5-8)\mathbf{k}=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

（2）$|\mathbf{r}_1|=\sqrt{4^2+3^2+8^2}=\sqrt{89}=9.4$

$|\mathbf{r}_2|=\sqrt{2^2+10^2+5^2}=\sqrt{129}=11.4$

$|\mathbf{r}|=\sqrt{(-2)^2+7^2+(-3)^2}=\sqrt{62}=7.9$

（3）

$$r^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{r_1^2+r_2^2-r^2}{2r_1\ r_2}=\frac{89+129-62}{2\times9.4\times11.4}=0.7279$$

$$\alpha=43°18'$$

$$\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{\sin\beta}{r_2}$$

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{r}\cdot r_2=\frac{11.4}{7.9}\times0.6858=0.9896$$

$$\beta=81°42'$$

$$\sin\gamma=\frac{r_1}{r}\sin\alpha=\frac{9.4}{7.9}\times0.6858=0.817$$

$$\gamma=54°48'$$

（4）

$$r_{r1}=-r\cdot\cos\beta=-7.9\times0.1444=-1.1411\approx-1.2$$

（5）

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\4&3&8\\2&10&5\end{vmatrix}=(15-80)\mathbf{i}+(16-20)\mathbf{j}+(40-6)\mathbf{k}$$

$$=-65\mathbf{i}-4\mathbf{j}+34\mathbf{k}$$

1．12 两质点1与2沿 x 与 y 轴分别以绝对速度 $\mathbf{v}_1=2\mathbf{i}$ 米/秒和 $\mathbf{v}_2=3\mathbf{i}$ 米/秒运动。在 $t=0$ 时，它们位于 $x_1=-3$ 米，$\mathbf{v}_1=0$；$x_2=0$，$y_2=-3$ 米，求

（1）粒子2对粒子1的相对位置矢量（$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$）与时间 t 的函数关系；

（2）试问两粒子在什么时间和地点相距最近？（肖1．12）

〔解〕（1）

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(y_2+v_2t)\mathbf{j}-(x_1+v_1t)\mathbf{i}$$
$$=(-3+3t)\mathbf{j}-(-3+2t)\mathbf{i}$$
$$=(3-2t)\mathbf{i}+(3t-3)\mathbf{j}$$

（2）

$$r=\sqrt{(3-2t)^2+(3t-3)^2}=\sqrt{9+4t^2-12t+9t^2+9-18t}$$
$$=\sqrt{13t^2-30t+18}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{26t-30}{2\sqrt{13t^2-30t+18}}=0$$

即
$$26t-30=0,\quad t=\frac{30}{26}=1.15〔秒〕$$

$$x=3-2t=0.7〔米〕$$
$$y=3t-3=3.45-3=0.45〔米〕$$

即当 $t=1.15$秒，$x=0.7$米，$y=0\ 45$米时，二质点相距最近。

1．13　给出质点的位置坐标 r，计算其速度与加速度。（肖1．13）

（1）　$\mathbf{r}=16t\mathbf{i}+25t^2\mathbf{j}+33\mathbf{k}$

（2）　$\mathbf{r}=10\sin 15t\mathbf{i}+35t\mathbf{j}+e^{6t}\mathbf{k}$

式中 t 是时间。

〔解〕（1）

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=16\mathbf{i}+50t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=50\mathbf{j}$$

（2）

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=150\cos 15t\mathbf{i}+35\mathbf{j}+6e^{6t}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-2250\sin 15t\mathbf{i}+36e^{6t}\mathbf{k}$$

1．14　一质点沿 x 轴作直线运动，其加速度与坐标 x 成正比，即 $a=k^2x$，其中k为常数，求此质点的运动方程。设开始时 $x=0$，$v=v_0$。（肖1．14）

〔解〕

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=k^2x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\ \frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v=k^2x$$

二边积分　$v^2=k^2x^2+c$

因　$t=0\quad x=0,\ v=v$

所以　$v^2=k^2x^2+v_0^2$

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{k^2x^2+v_0^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{k^2x^2+v_0^2}}=dt$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{v_0^2}{k^2}}}=kdt$$

积分得 $$xt=\sinh^{-1}\frac{x}{\frac{v_0}{k}} \qquad \sinh nt=\frac{kx}{v_0}$$

因 $$\sinh kt=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$$

所以 $$x=\frac{v_0}{2n}(e^{kt}-e^{-kt})$$

1．15　在一悬崖旁，每隔一秒落下一石。试求当第五石落下2秒后，每两石中间相隔的距离，假定重力加速度g的数值为已知。（周1．1）

〔解〕取悬崖旁为坐标的原点，设向下为y轴的正方向。当第五石下落2秒后，各石运动所经时间和所在的坐标分别如下

第五石　$t_5=2$秒　$y_5=\frac{1}{2}gt_5^2$

第四石　$t_4=3$秒　$y_4=\frac{1}{2}gt_4^2$

第三石　$t_3=4$秒　$y_3=\frac{1}{2}gt_3^2$

第二石　$t_2=5$秒　$y_2=\frac{1}{2}gt_2^2$

第一石　$t_1=6$秒　$y_1=\frac{1}{2}gt_1^2$

第五与第四石间距　$y_4-y_5=\frac{1}{2}g(t_4^2-t_5^2)=\frac{1}{2}g\cdot 5$

第四与第三石间距　$y_3-y_4=\frac{1}{2}g(t_3^2-t_4^2)=\frac{1}{2}g\cdot 7$

第三与第二石间距　$y_2-y_3=\frac{1}{2}g(t_2^2-t_3^2)=\frac{1}{2}g\cdot 9$

第二与第一石间距 $y_1-y_2=\frac{1}{2}g(t_1^2-t_2^2)=\frac{1}{2}g\cdot 11$

1．16 以初速v_0垂直向上抛一物体，经过t_0秒后又以同一速度向上抛出另一物体。不计空气阻力，求两者相遇的时间及地点。（周1．2）

〔**解**〕取抛出点为坐标原点，向上y轴为正，从第一物体抛出时计算时间。设t_1时刻二物体在坐标为y的位置相遇，则有

$$y_1=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2 \qquad (1)$$

$$y_2=v_0(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g(t_1-t_0)^2$$

$$=v_0t_1-v_0t_0-\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt_0^2+gt_1t_0 \qquad (2)$$

因 $y_1=y_2=y$

所以 $y_2-y_1=0$

则 （2）－（1）得

$$-v_0t_0-\frac{1}{2}gt_0^2+gt_1t_0=0$$

所以 $$t_1=\frac{v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2}{g\ t_0}=\frac{2v_0+gt_0}{2g}$$

所以 $$y=y_1=y_2=v_0\frac{2v_0+gt_0}{2g}-\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{2v_0+gt_0}{2g}\right)^2$$

$$=\frac{2v_0+gt_0}{2g}\left(v_0-\frac{1}{2}g\cdot\frac{2v_0+gt_0}{2g}\right)=\frac{2v_0+gt_0}{2g}\cdot\frac{2v_0-gt_0}{4}$$

$$=\frac{4v_0^2-g^2t_0^2}{8g}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{1}{8}gt_0^2$$

1．17 某船向东航行，速率为每小时15千米，在正午经过某一灯塔。另一船以同样速率向北航行，在下午1时30分经过此灯塔。问在什么时刻，两船的距离最近？最近是的距离多少？（周1．3）

〔**解**〕取灯塔为坐标的原点，向东与向北，分别为x轴与y轴的正向，正午十二点为计算时间的起点，即$t=0$，则任意时刻二船的位置分别为：

$$x=vt \qquad (v=15\text{千米/小时})$$

$$y=-y_0+v_0t \quad (\text{因 } y_0=v_01.5)$$

$$=-1.5v+vt$$

$$=(t-1.5)v$$

所以 任意时刻二船相距为：

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{v^2t^2+v^2(t-1.5)^2}=v\sqrt{t^2+t^2+2.25-3t}$$
$$=\sqrt{2t^2-3t+2.25}$$

求极值 $\qquad \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{v}{2}\cdot\dfrac{4t-3}{(2t^2-3t+2.25)^{\frac{1}{2}}}=0$

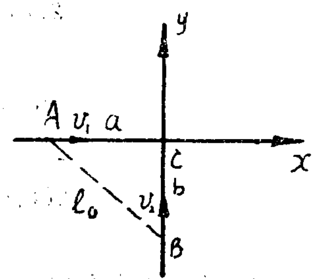
所以 $\qquad 4t-3=0$，即 $t=\dfrac{3}{4}$小时 亦即下午零时45分

把 t 代入 s，有

$$s=v\sqrt{2t^2-3t+2.25}=15\sqrt{2\times\frac{9}{16}-3\times\frac{3}{4}+2.25}=15.9\text{〔千米〕}$$

1．18 两条直线公路正交于C点，两辆车子从A、B两点各以匀速v_1、v_2，各沿一条公路向C点行驶。开始时，两车的距离为l_0，且$\overline{AC}=a$，$\overline{BC}=b$，试求两车距离l为最小的瞬时t_1及两车距离又为l_0的瞬时t_2。（周1．4）

〔解〕取$\overline{AC}$、$\overline{BC}$分别沿着x轴、y轴，交点C为x、y的原点，所以任意时刻二车的位置分别为：



（题1．18图）

$$x=-a+v_1t$$
$$y=-b+v_2t$$

所以 二车相距

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(v_1t-a)^2+(v_2t-b)^2}$$

求极值

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\,\frac{2(v_1t-a)v_1+2(v_2t-b)v_2}{\sqrt{(v_1t-a)^2+(v_2t-b)^2}}$$

令 $\qquad (v_1t-a)v_1+(v_2t-b)v_2=0$

所以 $\qquad t_1=\dfrac{a_1v_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ 即为二车最近时的时间

下面求二车再距l_0时的t_2

据题意

$$s=\sqrt{(v_1t_2-a)^2+(v_2t_2-b)^2}=l_0$$

而 $\qquad l_0=\sqrt{a^2+b^2}$

所以
$$a^2+b^2=(v_1t_2-a)^2+(v_2t_2-b)^2$$
$$=v_1^2t_2^2+a^2-2v_1t_2a+v_2^2t_2^2+b^2-2v_2t_2b$$
$$=(v_1^2+v_2^2)t_2^2-2(v_1a+v_2b)t_2+(a^2+b^2)$$

所以 $\qquad (v_1^2+v_2^2)t_2^2-2(v_1a+v_2b)t_2=0$

所以 $\qquad t_2=\dfrac{2\ (v_1a+v_2b)}{v_1^2+v_2^2}=2t_1$

1．19 两人自同一点以初速度v_1，v_2及匀加速度a_1，a_2赛跑，并于同时达到终点。试证他们所跑完的距离为

$$s=\frac{2(v_1-v_2)(v_1a_2-v_2a_1)}{(a_1-a_2)^2} \qquad \text{（周1．5）}$$

〔解〕二人用相同的时间，跑完相同的距离，

即
$$s=v_1t+\frac{1}{2}a_1t^2=v_2t+\frac{1}{2}a_2t^2$$

所以
$$v_2-v_1=\frac{1}{2}(a_1-a_2)t$$

$$t=\frac{2\ (v_2-v_1)}{a_1-a_2}$$

因此
$$s=v_1\frac{2(v_2-v_1)}{a_1-a_2}+\frac{1}{2}a_1\left(\frac{2(v_2-v_1)}{a_1-a_2}\right)^2$$

$$=\frac{2v_1(v_2-v_1)(a_1-a_2)+2a_1(v_2-v_1)^2}{(a_1-a_2)^2}$$

$$=\frac{2(v_2-v_1)(v_1a_1-v_1a_2+a_1v_2-v_1a_1)}{(a_1-a_2)^2}$$

$$=\frac{2(v_2-v_1)(a_1v_2-v_1a_2)}{(a_1-a_2)^2}$$

$$=\frac{2(v_1-v_2)(v_1a_2-v_2a_1)}{(a_1-a_2)^2}$$

1．20　沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 s 的时间为 t_1，而通过下一等距离 s 的时间则为 t_2，试证枪弹的减速度（假定是常数）为 $\frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$。（周1．6）

〔解〕题中所要证之减速度，实际是与运动方向相反的负加速度 a

因　第一段
$$s=v_1t_1-\frac{1}{2}at_1^2 \tag{1}$$

第二段
$$s=v_2t_2-\frac{1}{2}at_2^2 \tag{2}$$

而
$$v_2=v_1-at_1$$

式（1）、（2）分别乘以 t_2 与 t_1

$$st_2=v_1t_1t_2-\frac{1}{2}at_1^2t_2 \tag{3}$$

$$st_1=v_2t_2t_1-\frac{1}{2}at_2^2t_1$$

$$=v_1t_2t_1-at_1^2t_2-\frac{1}{2}at_2^2t_1 \tag{4}$$

（3）—（4）得

$$s(t_2-t_1)=at_1^2t_2-\frac{1}{2}at_1t_2(t_1-t_2)$$