普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21世纪高等学校通信类规划教材

随机信号分析

(第3版)

Random Signal Analysis

(Third Edition)

李晓峰　李在铭　周　宁　傅志中　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
21 世纪高等学校通信类规划教材

随机信号分析

（第 3 版）

Random Signal Analysis

（Third Edition）

李晓峰　李在铭　周　宁　傅志中　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书主要讨论随机信号的基础理论和分析方法。全书共 7 章，内容包括：概率论基础，随机信号与典型信号举例，平稳性、循环平稳性与功率谱密度函数，各态历经性与随机实验方法，随机信号通过线性系统，带通信号与窄带高斯信号，马尔可夫链、独立增量过程与泊松过程等。

本书强调随机信号及其分析的基本概念、物理意义与系统方法，注重理论基础，并联系工程实践。内容全面，叙述清楚，例题与图示丰富，便于教学与自学。

本书以初等概率论、高等数学与信号分析的基本知识为基础，可以作为高等学校电子信息类专业本科生与研究生教材或教学参考书，也可供相关专业领域的师生、科研和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机信号分析 / 李晓峰，李在铭，周宁等编著. —3 版. —北京：电子工业出版社，2007.2
（21 世纪高等学校通信类规划教材）
ISBN 978-7-121-03628-6
Ⅰ. 随… Ⅱ. ①李… ②李… ③周… Ⅲ. 随机信号－信号分析－高等学校－教材 Ⅳ. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 149564 号

责任编辑：韩同平　　特约编辑：李佩乾
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：三河市万和装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：11.5　字数：306.8 千字
印　　次：2007 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：5000 册　　定价：19.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系电话：（010）68279077；邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

随机信号分析是电子信息类专业的重要基础课程。本教材的第 1、2 版《随机信号分析及工程应用》自出版以来，在电子科技大学等多所学校的本科及研究生教学中长期使用，教学效果好，得到广泛的社会认同。第 3 版是作者结合近年来从事该门课程的教学与研究经验，在广泛参考与学习国内外现有的同类书籍后，对原书进行改编而成的。本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

编写与修订中，本教材力求突出下面三点：

（1）揭示概念的来源与背景，引导学生领悟本理论的思想方法。初学本课程的学生由于长期习惯思考确定性问题，经常感觉统计理论与方法不可靠、概念模糊难懂。减少这类困惑的有效方法是进一步地揭示各种概念的本质，帮助他们形成新的、有趣的思维方法。

（2）注重理论基础，安排适合的内容结构，采用简明的叙述方式。书中对许多重要的基础概念与结论采用了数学定义与定理的表现形式，以帮助学生建立严谨的基础体系。在内容选择与表述上，着力条理性与简明性，以突出重点，方便阅读理解。书中还增强了例题与举例，通过它们具体说明问题的应用背景，示范分析思路、方法与技巧。

（3）结合专业背景，联系工程实践，强调物理意义。本课程是一门以基本数学理论为工具，研究电子电气工程应用的专业基础课程。为此，书中注意解释各种数学概念与结论的物理含义，阐述数学问题所关联的工程背景。书中还安排了专门章节，讨论基本的实验测量技术，说明随机模拟的思想，并示范了运用 MATLAB 进行实践的方法。

这次再版主要进行了下面几个方面的改进：① 调整了原书的部分结构，精选了例题与举例，进一步改善了内容的条理性与简明性；② 侧重于基础教学的需要，缩减了部分较深入的章节；③ 补充了运用 MATLAB 的计算机实践方法；④ 增强了马尔可夫链与泊松过程的基础理论内容。

本教材以初等概率论、高等数学与信号分析的基本知识为基础，可以作为本科生与研究生的教材或教学参考书，建议教学学时数为 32～64 学时。

全书共分 7 章：第 1 章复习与总结概率论的基础知识，同时补充了随机变量的条件数学期望、特征函数等新知识点；第 2 章介绍随机信号的定义、基本特性与描述方式，介绍几个典型的信号例子与重要的高斯信号；第 3 章介绍平稳性与循环平稳性，讨论平稳信号的相关函数与功率谱密度函数；第 4 章讨论随机信号的各态历经性、基本参数的实验测量方法、随机模拟的思想，以及运用 MATLAB 进行实践的方法；第 5 章介绍随机信号通过线性时不变系统的分析方法，讨论噪声中信号处理的基本技术；第 6 章介绍希尔伯特变换与复随机信号，说明带通信号的基本特性与重要性质，给出窄带高斯噪声和它加上高频信号时的各种基础概率分布；第 7 章讨论马尔可夫链、独立增量过程与泊松过程。书中列举了大量的例题与图示，给出了一些运用 MATLAB 的实践示例，各章末附有足够的习题供练习。

本书由李晓峰教授等编著，经陈天麒教授主审。李在铭编写第 1 章，李晓峰编写第 2, 3, 5 章，周宁、李晓峰合作编写第 4, 6 章，傅志中编写第 7 章。全书由李晓峰统编定稿。本书得到电子科技大学随机信号分析课程组同仁的鼓励、帮助和支持，研究生王俊芳、肖世尧和

汪明月等为书稿的录入、整理和校对做了许多工作，本书的出版还得到电子工业出版社的大力支持，韩同平编辑为本书花费了不少精力，作者在此一并表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中谬误与疏漏在所难免，敬请读者批评指正。

本书配有电子课件，可登录电子工业出版社华信教育资源网 http://www.huaxin.edu.cn 免费下载。

作者联系方式：xfli@uestc.edu.cn　028-83202468

编著者

于电子科技大学

本书常用符号说明

$\forall$	全称量词（任意）
$\exists$	存在量词（存在）
$[\ ]$	取整运算
$\chi^2(n)$	（n 个自由度的）χ^2 分布
$\delta(x)$	（单位）冲激函数
$\delta(n)$	（单位）冲激序列
$\Phi(x)$, $N(0,1)$	标准正态（高斯）分布
$\phi_X(v)$, $\phi(v)$	特征函数
$\boldsymbol{\phi}_X(\boldsymbol{v})$, $\phi_{X_1X_2\cdots}(v_1,v_2,\cdots)$	多维（联合）特征函数
$\phi_X(v_1,v_2,\cdots;t_1,t_2,\cdots)$	随机信号的多维特征函数
$\boldsymbol{\mu}_X$, $(EX_i)_{n\times 1}$	n 维均值（列）向量
μ_i	状态 i 的平均返回步数
$\pi_i(n)$, $\boldsymbol{p}(n)$	绝对概率与概率分布向量
$\Gamma(\alpha,\beta)$	伽马分布
ρ_{XY}, ρ	相关系数
$\rho_X(t_1,t_2)$, $\rho_{XY}(t_1,t_2)$	随机信号自（或互）相关系数
$\rho_X(\tau)$, $\rho_{XY}(\tau)$	平稳信号自（或互）相关系数
σ_X, σ	标准差
$\sigma_X^2(t)$, $\mathrm{Var}[X(t)]$	随机信号的方差
$\hat{\sigma}_X^2$	方差的估计
τ_c	相关时间
Ω	随机试验样本空间
ω_0	系统的中心（角）频率
ω_m	最高非零（角）频率
ξ，ξ_i	随机试验结果、样本点
$A[\ ]$	算术或时间平均
$A(t,\Delta t)$	泊松平均变化率，泊松增量
$a(t)$	复包络信号
$B(n,p)$	参数 (n,p) 的二项分布

B_N	系统等效噪声带宽（赫兹）
B_{3dB}	系统 3dB 带宽（赫兹）
B_{eq}	信号矩形等效带宽（赫兹）
B_{rms}	信号均方根带宽（赫兹）
$\mathrm{Cov}(X,Y)$, μ_{11}	协方差
$\boldsymbol{C}_X$, $(\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{n\times n}$	（n 维）协方差矩阵
$C_X(t_1,t_2)$, $C_{XY}(t_1,t_2)$	随机信号自（或互）协方差函数
$C_X(\tau)$, $C_{XY}(\tau)$	平稳信号自（或互）协方差函数
EX, $E(X)$, m_X	数学期望、均值、统计平均、集平均
EX^2, $E[X^2]$	均方值
$E(X-EX)^2$, σ_X^2, $\mathrm{Var}(X)$, $D(X)$	方差
$E(XY)$, m_{11}	二阶联合原点矩
EX^n, $E(X^n)$, m_n	n 阶原点矩
$E(X-EX)^n$, μ_n	n 阶中心矩
$E\lvert X\rvert^n$, $E(\lvert X\rvert^n)$	n 阶绝对矩
$E[X\mid Y=y]$, $E[X\mid Y]$, $m_{X\mid Y}$	条件数学期望、条件平均
$EX(t)$, $E[X(t)]$, $m_X(t)$	随机信号的均值
$EX^2(t)$, $E[X^2(t)]$	随机信号的均方值
$F_X(x)$, $F(x)$	（概率）分布函数，累积分布函数
$F_{X_1X_2\cdots}(x_1,x_2,\cdots)$	多维联合（概率）分布函数
$F_{X\mid Y}(x\mid y)$, $F(x\mid y)$	条件（概率）分布函数
$F_X(x;t)$	随机信号的一维分布函数
$F_X(x_1,x_2,\cdots;t_1,t_2,\cdots)$	随机信号的多维分布函数
$f_X(x)$, $f(x)$	（概率）密度函数
$f_{X_1X_2\cdots}(x_1,x_2,\cdots)$	多维联合（概率）密度函数

$f_{X\|Y}(x\|y), f(x\|y)$	条件（概率）密度函数
$f_X(x;t)$	随机信号的一维密度函数
$f_X(x_1,x_2,\cdots;t_1,t_2,\cdots)$	随机信号的多维密度函数
$f_{ij}(n)$	状态 i 到 j 的 n 步首达概率
f_{ij}	状态 i 到 j 的最终到达概率
$G_X(\omega), G(\omega)$	单边功率谱密度函数
G_0	系统的中心功率增益
$h(t)$	系统冲激响应
$H(\mathrm{j}\omega)$	系统频响函数
$h(n)$	离散系统冲激响应
$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$	离散系统频响函数
$H(z)$	离散系统 z 函数
$\mathscr{H}[\ ], \mathscr{H}^{-1}[\ ]$	希尔伯特变换与逆变换
$i(t), q(t)$	带通信号的同相与正交分量
$i \to j$	状态 i 可达状态 j
$i \leftrightarrow j$	状态 i 与 j 互通
$\boldsymbol{J}$	雅可比行列式
$L[\ ]$	线性系统算子
LPF{ }	低通滤波处理
$\hat{m}_X$	均值的估计
$N(\mu,\sigma^2)$	正态（高斯）分布
$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$	二维正态（高斯）分布
$N(\boldsymbol{\mu}_X,\boldsymbol{C}_X)$	n 维正态（高斯）分布
$N_0/2$	白噪声功率谱密度
$N(t)$	泊松（计数）过程
$P(A)$	事件 A 的概率
$P(A\|B)$	事件 B 条件下事件 A 的概率
$P(\lambda)$	（参数为 λ 的）泊松分布
P_X, P	功率
$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}(k)$	一步与 k 步转移概率矩阵
$\boldsymbol{P}(m,n)$	m 时刻向 n 时刻的转移矩阵

$p_{ij}, p_{ij}(k)$	一步与 k 步转移概率
$p_{ij}(m,n)$	m 时刻向 n 时刻的转移概率
$R_X(t_1,t_2),\ R_{XY}(t_1,t_2)$	随机信号自（或互）相关函数
$R_X(\tau), R_{XY}(\tau)$	平稳信号自（或互）相关函数
$\hat{R}_X[m]$	自相关序列的估计
$r_h(t)$	系统相关函数
$S_X(\omega), S_{XY}(\omega)$	功率谱与互功率谱
$S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}), S_{XY}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$	平稳序列功率谱与互功率谱
$S_X(z), S_{XY}(z)$	平稳序列自（或互）相关函数的 z 变换
S_n	泊松事件的到达时刻
T_n	（相邻）泊松事件的时间间隔
T_{ij}	从状态 i 到 j 的首达时间
T_s	采样间隔
$U(a,b)$	区间 (a,b) 上的均匀分布
$u(x)$	（单位）阶跃函数
$u(n)$	（单位）阶跃序列
W_N	系统等效噪声带宽（角频率）
$X\|Y, X\|Y=y$	条件随机变量
$X_1,\cdots,X_n\|Y_1,\cdots,Y_m$	多维条件随机变量
$\{X(t,\xi),t\in T\}, X(t,\xi), X(t)$	随机信号，随机过程
$\{X(n,\xi),n\in N\},\ X(n,\xi),\ X(n),\ X_n$	随机序列，离散随机过程
$X_0(t), \dot{X}(t)$	中心化信号与归一化信号
$x(t)\leftrightarrow X(\mathrm{j}\omega)$	傅里叶变换对
$\hat{x}(t)$	$x(t)$ 的希尔伯特变换
$z(t)$	解析信号

目　　录

第 1 章　概率论基础

概率论的基本知识读者已经学习过了，它们是随机信号分析的理论基础。因此，本章将简明地复习与总结这些知识，同时也扩充一些后面需要用到的新知识点，例如，利用冲激函数表示离散与混合型随机变量的概率密度函数，随机变量的条件数学期望与特征函数等。

1.1　概率公理与随机变量

随机现象总是表现得捉摸不定，它的基本特征在于：结果多样且事先无法预知。为了对随机性进行定量描述，并使用数学工具深入分析其内在规律，人们建立了随机试验、样本空间、事件与概率等概念，并定义了随机变量。

1.1.1　概率公理

1. 概率的定义

数学家通过对大量随机现象的深入考察建立了一系列的基本概念与术语：

随机试验　对随机现象做出的观察与科学实验被抽象为随机试验（Random Experiment）。它具有下述特性：① 可以在相同条件下重复进行；② 全部的可能结果是事先知道的；③ 每次试验的结果不可预知。

随机试验的例子很多，例如：投掷骰子，观察顶面出现的点数；连续投掷硬币两次，观察正、反面出现的组合结果；记录某街道照明灯泡的寿命时间；统计网络交换机 1 s 内接收到的数据包数目与到达时刻；用电压表测量某接收机前端的噪声输出电压。

样本点与样本空间　随机试验所有的基本可能结果构成的集合称为样本空间（Sample Space），记为Ω。Ω的元素是单个基本可能结果，称为样本点（Sample Point），记为ξ_i $(i=1,2,\cdots)$，$\xi_i\in\Omega$。

事件　事件（Event）是试验中“人们感兴趣的结果”构成的集合，是Ω的子集，常用大写字母A、B、C等表示。事件可以是：

① 基本事件，仅包含一个样本点，如$\{\xi_1\}$，$\{\xi_3\}$等；

② 复合事件，它包含多个样本点，如$\{\xi_1,\xi_2,\xi_6\}$，$\{\xi_6,\xi_2\}$等；

③ 不可能事件，空集$\varnothing$，它不包含任何样本点；

④ 必然事件，整个Ω，它包含所有样本点。

概率　事件是随机的。除必然事件与不可能事件外，试验进行前无法确知“感兴趣的结果”是否会出现。赋予每个事件一个出现可能性的度量值，称为**概率**（Probability）。

所谓“可能性的度量值”是指“宏观”意义下（即大数量的情形下）事件出现的比例值。人们对于随机现象长期的研究发现了一个有趣的结果：捉摸不定的随机事件在大量统计下，出现的比例表现为某个明确的固定值。这种特征——既在个别时表现为无法确定又在大数量时表现为具有规律，引出了一套全新的理论，概率这个术语正好集中反映了这一特征，

因而是这套理论的核心术语。

在实际应用中，事件 A 出现的可能性直观地由其**相对频率**（Relative Frequency）来计算，因此

$$P(A) \approx \frac{\text{试验中}A\text{ 出现 的次数}}{\text{总试验次数}} = \frac{n_A}{n} \qquad (n\text{ 很大}) \tag{1.1}$$

相对频率的客观特性要求（理论研究中的）概率具有一些基本特性，称为概率公理。

概率公理　任何事件 A 的概率满足:

① 非负性: 任取事件 A，$P(A) \geqslant 0$；

② 归一性: $P(\Omega)=1$；

③ 可加性: 若事件 A,B 互斥，即 $A \cap B = \varnothing$，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$。

概率与概率公理是概率论的基石，它们源于科学实践，其正确性在于它能合理地表述与解释客观世界，并能有效地解决实际问题。

2. 条件概率与独立性

“前提条件”与“相互独立”是随机问题中经常遇到的概念。

若事件 A 会发生，即 $P(A)>0$，考虑在 A 发生的条件下，另外一个事件 B，这便引出了**条件事件**和**条件概率**（Conditional Probability），它们定义为

$$B|A = \text{事件 } A \text{ 发生条件下的事件 } B$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A)>0 \tag{1.2}$$

在实际应用中，条件概率可以用相对频率如下计算（n 足够大）

$$P(B|A) \approx (A\text{ 发生时 }B\text{ 也发生的次数占 }A\text{ 发生总次数的相对比例}) = n_{AB}/n_A$$

它还可以按图 1.1 直观地进行理解。

独立的概念用于描述事件的发生不依赖于条件的特性，即 $P(B|A)=P(B)$。因此，事件 A 与 B **独立**（Independent）等价地定义为

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此独立的定义为: 若对于任意的 $m(1<m\leqslant n)$ 与 m 个任意整数: $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$，满足

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_m}) \tag{1.3}$$

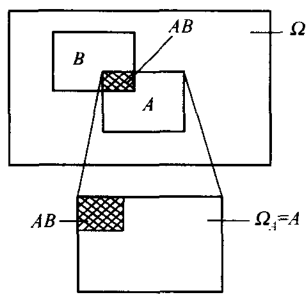

图 1.1　条件事件及其集合表示

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此独立。可见多个事件的独立要求它们两两独立，三三独立，以及任意 $m(\leqslant n)$ 个都独立。

3. 基本性质与事件运算

基于公理，容易导出事件概率的如下基本性质:

① $P(\varnothing)=0$；

② $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

③ $P(A) \leqslant P(B)$，如果 $A \subseteq B$；

④ $P(AB) \leqslant P(A) \leqslant P(A \cup B)$。

样本空间与事件的数学描述都是集合，因此，事件的运算是集合的运算。事件的基本运算包括: 非、加（或）、减、乘（与）及除（条件），对应的概率关系如下:

① $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

② $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\quad = P(A) + P(B)$ （如果彼此互斥）

③ $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(AB)$

$\quad = P(A) - P(B)$ （如果 $B \subseteq A$）

④ $P(AB) = P(A)P(B|A), \quad P(A) > 0$

$\quad = P(B)P(A|B), \quad P(B) > 0$

$\quad = P(A)P(B)$ （如果彼此独立）

⑤ $P(B|A) = P(AB)/P(A), \quad P(A) > 0$

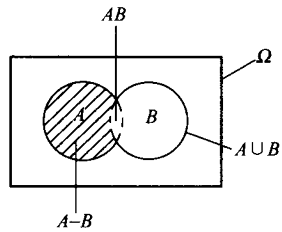

图 1.2　文氏图

通过**文氏图**（Venn Diagram）可以形象化地理解概率的基本性质、事件运算及其对应概率的运算，如图 1.2 所示。

事件的反复运算生成各种新的事件，各种不同事件的总体构成一个事件集合，称为事件域 F。样本空间、事件和概率是概率理论的三个最基本的概念。

例 1.1　分析掷均匀硬币问题。

解: 掷币试验的基本结果是: H—正面，T—反面。因此有

（1）样本空间: $\Omega = \{H, T\}$。

（2）事件域: $F = \{\{H\}, \{T\}, \varnothing, \Omega\}$。

（3）由硬币的均匀特性可得，$P\{H\} = P\{T\} = 0.5$；而且 $P\{\varnothing\} = 0$，$P\{\Omega\} = 1$。

例 1.2　有 N 个格子排为一列，将一只小球随机地放入其中任一格子。对于 $k \in [1, N]$，求:

（1）小球放入第 k 号格子的概率。

（2）前 k 个格子中有小球的概率。

解: 因为是等概的，显然

$$P(\text{小球放入任一格子}) = 1/N$$

又因为小球放入各个格子是互斥的，于是有

$$P(\text{小球放入任意}k\text{个格子}) = k/N$$

基于概率论解决实际问题的原则思路是: 首先为问题设计随机试验模型，确定其样本空间 Ω，然后合理地假设其中某些基本事件的概率，再由它们推导出我们感兴趣的事件概率与特性，从而解决所关心的问题。

4. 几个基本公式

概率论中，有下面几个重要的公式。

（1）链式法则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \quad (1.4)$$

式中，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$。易见，链式法则是反复运用条件概率定义的结果。

（2）全概率公式

事件组 $A_i,i=1,2,\cdots,n$，若满足:

$$\forall i\neq j，\ A_iA_j=\varnothing；\quad \bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$$

则称该事件组为样本空间的一个**完备事件组或分割**（Partition）。完备事件组是既彼此互斥又可以完整地拼成Ω的事件组。

若 $A_i,i=1,2,\cdots,n$，是完备组，任取另外一个事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i) \quad (1.5)$$

该式称为全概率公式。

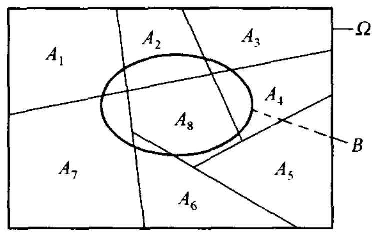

图 1.3　全概率公式

易见上式等价于 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)$，其中各个 A_iB 是图 1.3 中 B 的局部子块，它们彼此互斥。于是，上式可由概率公理的可加性得出。形象地讲，全概率公式表明：“全部”的概率是各种（互斥的）“部分”的概率按比例构成的。

（3）贝叶斯（Bayes）公式

若 $A_i,i=1,2,\cdots,n$，是完备组，任取另外一个事件 B，有

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)},\ k=1,2,\cdots,n \quad (1.6)$$

易见，上式右边的分子与分母分别为

$$P(A_k)P(B|A_k)=P(A_kB),\quad \sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)=P(B)$$

因此，式（1.6）本质上源于条件概率的定义。

贝叶斯公式在研究因果推测、信息传输与检测等问题中有着重要的应用。通常将各个因事件概率 $P(A_i)$ 称为**先验概率**（Priori Probability），它是观察事件 B 出现与否的实验之前已存在的；将条件概率 $P(B|A_k)$ 称为**转移概率**（Transition Probability），它是第 k 个因事件转移成（或引起）事件 B 的概率；而将观察到 B 出现之后，条件概率 $P(A_k|B)$ 称为**后验概率**（Posteriori Probability）。考虑一下因果推测问题：A_i 是 m 个原因事件，B 是某种结果事件；各原因的概率是先验概率，由原因引起结果的概率是转移概率，而知道结果后推测起因的概率就是后验概率。贝叶斯公式正是基于结果 B 推测某种起因 A_k 的可能性的方法。

例 1.3　在二元传输或检测中，假定二元消息表示为 0 与 1，记为 X，其先验概率分别为 $P\{X=0\}=0.9$，$P\{X=1\}=0.1$，传输可靠性为 80%。问：收到 1 时，真正发送的消息是什么？

解: 由于传输并非绝对可靠，不论发送的是 0 或 1，接收到的消息可能为 0，也可能为

1，记为 Y。如图 1.4 所示，问题实际上是要求回答“$Y=1$条件下，X 到底是什么?”，这需要比较$P\{X=0|Y=1\}$与$P\{X=1|Y=1\}$的大小。

根据贝叶斯公式可得

$$P\{X=0|Y=1\}=\frac{0.9\times0.2}{0.9\times0.2+0.1\times0.8}=\frac{9}{13}$$

$$P\{X=1|Y=1\}=\frac{0.1\times0.8}{0.9\times0.2+0.1\times0.8}=\frac{4}{13}$$

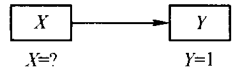

图 1.4 二元传输系统

由于$P\{X=0|Y=1\}>P\{X=1|Y=1\}$，收到的虽然是 1，但合理的估计仍然是“原本发送的是 0”，尽管传输可靠性高达 80%。这是因为在源端，消息 1 本身“太稀有了”，发送它的概率不大。因此，这个 1 更可能是发送 0 时错误产生的。

1.1.2 随机变量

概率论中的样本空间与事件等都是一般意义下的集合，为了更加有效地进行讨论与分析，我们希望将原来的集合描述形式转换为实数描述形式，因为在实数域上存在着丰富的数学分析方法与结果。为此，设计一个从样本空间向实数域的映射，将样本点映射为实数值，将事件映射为实数集合，这便产生了随机变量。

在样本空间Ω上定义一个单值实函数$X(\xi)$，称为**随机变量**（random variable，常缩写为 r.v.）。并规定：任取实数x，用$\{X(\xi)\leqslant x\}$的概率来描述$X(\xi)$的概率特性，记为

$$F_X(x)=P\{X(\xi)\leqslant x\} \tag{1.7}$$

称它为 X 的**概率分布函数**（Distribution Function）或**概率累积分布函数**（Cumulative Distribution Function），简称为分布函数。

定义随机变量$X(\xi)$时，不仅关心它取什么值，而且关心它取值的概率大小。定义中的$\{X(\xi)\leqslant x\}$是$\{\xi：X(\xi)\leqslant x\}$的缩写，它本质上是样本空间上样本点的集合，是一个事件，而非普通的实数集合。为了书写简便，常省略括号及其中的ξ，将随机变量简记为 X。

分布函数$F_X(x)$的下标指出它所关注的随机变量是 X，常常可以省略；而自变量 x 是确定变量，指示取值的位置。由概率公理与性质容易得出，分布函数具有如下基本性质:

① $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；

② $F(x)$是右连续的单调非降函数，即

$$F(x_1)\leqslant F(x_2),\quad x_1<x_2;\qquad F(x^+)=F(x)$$

③ 区间事件的概率计算公式为

$$P\{x_1<x\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

$$P\{x_1\leqslant x\leqslant x_2\}=P\{x_1<x\leqslant x_2\}+P(x=x_1)=F(x_2)-F(x_1^-)$$

$$P\{x_1<x<x_2\}=P\{x_1<x\leqslant x_2\}-P(x=x_2)=F(x_2^-)-F(x_1)$$

$$P(X=x)=F(x)-F(x^-)$$

式中，$F(x^-)$与$F(x^+)$分别表示$F(x)$在 x 处的左、右极限。

实用中，X 只会有三种类型，由它们的分布函数反映出来:

① 连续型：$F(x)$是连续取值的。由于它有无限多种取值而所有取值的概率之和为 1，

显然，它取任何单个实数值的概率均为零，即$P(X=x)=0$。

② 离散型：$F(x)$仅含有跳跃型间断点。这些间断点是可列的，记为$\{x_i\}$；显然，X只能取这些点，或者说，X仅在这些点上具有非零的概率，记为$\{p_i\}$。因此

$$P(X=x_i)=p_i=F(x_i)-F(x_i^-) \quad (i\text{ 为整数})$$

称为X的**分布律**（或**分布列**）（Distribution Law）。并有$\sum_i p_i=1, p_i\geqslant 0$。

③ 混合型：这时$F(x)$既有连续的部分也有间断点，是上面两种形式的组合。

可见，分布函数可能含有间断点，但它们必定是跳跃型的。

X的**概率密度函数**（Probability Density Function）（简称密度函数）定义为其分布函数的导数，即

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \tag{1.8}$$

密度函数的基本性质为：

① 非负性与归一性：$f(x)\geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$

② 区间A上的概率计算公式：$P\{X\in A\}=\int_A f(x)\mathrm{d}x$

$f(x)$的定义涉及到求导运算，当$F(x)$不连续时，我们引入阶跃函数$u(x)$与冲激函数$\delta(x)$来表示$F(x)$和$f(x)$。定义

$$u(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases};\quad \delta(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) \tag{1.9}$$

这样，即使在$F(x)$的间断处，我们仍可认为其（广义）导数存在，于是，密度函数存在。

极端的情况是，分布律为$P(X=x_i)=p_i$的离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\sum_i p_i u(x-x_i) \quad (i\text{ 为整数}) \tag{1.10}$$

密度函数为

$$f(x)=\sum_i p_i \delta(x-x_i) \quad (i\text{ 为整数}) \tag{1.11}$$

式中，取值位置对应$u(\ )$与$\delta(\ )$自变量的偏移量，取值概率对应前面的幅值。

例 1.4 均匀骰子实验。定义随机变量X为骰子顶面的编号，取值为$\{1,2,3,4,5,6\}$。显然X是离散型的，其概率特性通常用分布律描述最为方便，即

$$P(X=i)=1/6 \quad (i=1,2,\cdots,6)$$

或者采用表1.1进行表示，直观、清楚。

表1.1 均匀骰子实验中，随机变量的分布律

状态：$\{x_i\}$	1	2	3	4	5	6
概率：$\{p_i\}$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

但使用分布函数与概率密度函数可以统一地描述各型随机变量的概率特性，由式（1.10）与式（1.11）可得

$$F(x)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}u(x-i),\quad \text{或}\quad f(x)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\delta(x-i)$$