



# 經濟數學與統計

Mathematics and Statistics  
for Economists

Gerhard Tintner  
Charles B. Millham 著

高 翠 蓮 譯

經濟學名著翻譯叢書第一三五種

# 經濟數學與統計

中華民國六十八年十一月出版

|     |                             |   |
|-----|-----------------------------|---|
| 原著者 | G. Tintner<br>C. B. Millham | 著 |
| 翻譯者 | 高 翠                         | 蓮 |
| 編印者 | 臺灣銀行經濟研究室<br>臺北市重慶南路        |   |
| 發行者 | 臺灣銀行<br>臺北市重慶南路             |   |
| 經售者 | 中華書局<br>臺北市重慶南路             |   |
|     | 中央文物供應社<br>臺北市仁愛路           |   |
| 印刷者 | 臺灣省政府印刷廠<br>臺中縣大里鄉中興路       |   |

## 二版序言

本書爲1953年版之修訂本。於此修訂版中，我們自擴大的法文譯本 (*Mathématiques et statistiques pour les économistes*, Paris: Dunod, 1962)中摘錄頗多，並融合丁特勒氏(Tintner)之德文譯本(*Handbuch der Oekonometrie*, Berlin, Springer, 1960)中某些資料。本書也已有俄文譯本 (*Vvednie v ekonometriu*, Izdatel'stvo Statistika, Moscow, 1965)，而日文譯本之序言亦附錄於下文。韓文譯本且於1965年出版。

本修訂版新加各節爲：1. 基本的集合論；2. 成對的序對與卡蒂森乘積；3. 排列與組合，二項式定理；4. 關係；19. 以克魯特法對直線方程體系求其數字解；33. 不等式；34. 直線型規劃：圖形解；35. 直線型規劃：一般型；36. 單純形法；37. 投入—產出分析；38. 正方矩陣：加法與減法，與純量相乘；39. 兩正方矩陣之相乘；40. 向量，逆矩陣，克魯特法；42. 以克魯特法計算行列式；43. 虛數與複數；44. 二階有限差分方程；93. 微分方程；94. 變分學之要素；123. 複迴歸與相關；124. 認定；125. 直線型加總。而且，原來的許多章節也經部分修改，並在習題中加進新的問題。

由目次中，讀者應可了解，作者欲將本書編得更配合當前需要所花費之苦心，例如加入數理經濟學，作業研究與計量經濟學等之現代的數學方法。

本書原稿係由作者在Iowa State University(Ames Iowa), the University of Pittsburgh, the University of Southern California(Los Angeles)幾所大學教學之講義編成，期使一般經濟學系學生，不論大學部或研究所者，皆能具備某些數學及統計學方面的知識，以便了解現代經濟理論的發展，以及由計量經濟中導出之實證結果。本書包括在經濟學上運用之基本數學，以及討論一些有關微積分、

機率論、基本統計學之粗淺問題。文內所舉的例子都取自經濟學。一般經濟學系學生時常感覺沒有時間深入研習這些領域的問題，然而，本書實際上用到的數學觀念並不多，相信只需具有一些代數與基本三角學觀念便够了；惟對基本經濟學則需有深刻了解。我們希望，學生或讀者於深入研讀本書後，能獲得足夠的統計與數學知識，足以閱讀刊載在下列諸雜誌之文章，如 *Econometrica*, *International Economic Review*, *the Journal of the American Statistical Association*, *American Economic Review*, 等等。

本書旨在訓練未來的經濟學家，而非數學專家，故常用直接說明的方式來代替嚴謹的數學證明。詳盡的證明不在本書範圍內，相信它亦非多數讀者與學生之能力所及。想要深入研究之讀者，儘可參閱書末附錄中之書目。

本書習題部分包括很多實證例子，是由多位計量專家以具體的統計資料為基礎，再運用統計方法求得者，並具有經濟理論上之意義。例中之實證關係應予以小心解釋，它們僅表示變數間經估計而得到之關係。作者希望經由這些理論與實際相互配合之例子，激發經濟學家對數學、統計學之研究興趣，而在這個領域中作更深入之探討。

本書例子所用之數學圖表，見書末附錄，或 Harold D. Larsen 的 *Rinehart Mathematical Tables, Formulas and Curves*, 擴大版 (紐約: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1953)

本書之完成，得感謝下列諸位同仁之幫忙：Iowa State Univ. (Ames) 之 E. S. Allen, 已故的 D. L. Holl, B. Vinograde, W. G. Murray, 已故的 E. R. Smith, K. Fox 及 Pittsburgh 大學之 B. Chinitz, 南加大之 A. Morgner。以前的一名學生 F. Jarred (澳洲之 Adelaide 大學) 亦協助解答部分習題。

洛杉磯 1969 年 11 月

—G. T. —C. B. M.

愈少。又需求函數全部性質皆可以數理經濟方法說明之(第87節)。

由計量經濟可進一步導出，於某些情況下，存在於市場之實際需求函數近似值（第122節）。此種計量關係者有該商品的生產者與消費者，亦與交易市場的組織相關。至目前為止，我們所討論的人或組織均未將政府包括在內，亦即在一沒有任何政府干預的理想自由放任經濟體系中。計量經濟便是處理其中人物的關係，例如市場研究。

若考慮政府干預的情況，如限價政策，此時計量經濟結果若可靠的話，則具有相當重要性，設政府固定某項商品價格，則以統計方法導出之計量經濟關係，即需求函數，可給予如下問題有近似解值：其他情況不變時，價格固定，市場的銷售量若干？

我們可以想像，若價格訂得太高，以致商品之銷售量可能極少，也許因此對人們的健康有致命的影響。請注意，支持或反對限價政策絕非計量經濟的範疇，計量經濟只指出，若求得之計量關係成立的話，實行某政策結果大致如何。

政府可以經由多種形式干預經濟體系，如保護關稅、公共事業的控制，以至於計畫經濟中，幾乎完全地操縱整個經濟體系的運行皆是。在此，我們願意再強調，支持或反對任何經濟政策，並非計量經濟學家的事情。他們僅指出，基於所導出的計量經濟關係，某項經濟政策的效果為何。因此，設若制定多項財政和貨幣政策，凱因斯學派的計量模型可能很有用（習題42，8—11題）；至若更廣泛的經濟計畫，如戰時經濟體系，或聯合的經濟計畫，則李昂鐵夫的投入—產出分析可能較有用（習題18，第10題）。

有人認為，數學不能運用到社會科學、或經濟學，只因其基本關係不可數量化，除了某些有關效用或選擇的靜態理論外，作者懷疑此一敘述之一般性。數學，尤以當代數學，常與非數量的關係密切相關。例如，處理純粹序列性關係，見87節（習題87，第13題），其中對選擇或無差異分析處理有一簡短的介紹。當然，像本書這

## 日本譯版序言

作者深深慶幸本書能有日文譯版。日本學者最近在數理經濟、機率論、數理統計與計量經濟等方面均有相當的貢獻。本書致力使具有初級基本數學訓練之經濟學家，能在這些方面有初步的認識。

簡言之，本書旨在使熟悉當代經濟理論之經濟學者，對近年來日趨重要之計量經濟方法有初步了解。

根據Oskar Lange教授之定義：「經濟學為管理人類社會稀少資源之一門科學」。<sup>①</sup>

計量經濟係經濟學領域中之一種特殊方法，它融合數理經濟理論與數理統計學，目的在於得到某些數字結果，以證明經濟法則與定理。<sup>②</sup>

本人極願意利用這個機會，說明計量經濟對經濟政策之重要性。我們應注意，經濟學是「正反」的科學，至於「對錯」等道德上判斷之敘述不能適用於經濟學及計量研究。經濟政策的原則無法利用數學或非數學方法，經由經濟理論導出，而係基於倫理和道德上之考慮，或由此領域工作者之政治觀念導出。計量經濟對經濟政策的問題只能作如下貢獻：有時我們能由調查資料中導出與事實極為近似的數字關係，並指出，若我們的實證關係成立的話，此一近似的結果亦成立。

舉例說明之，假設我們考慮由實證資料導出需求函數，即某商品在市場上，其價格與數量間之關係（見本書11節）。於書中討論的某些情況下，我們可由市場上搜集的資料，以一些統計方法導出此需求函數之近似值（見第122節）。

由經濟理論可知，一般而言，需求函數為負斜率，即，在其它情況不變時，商品的價格愈高，市場上之需求量愈少。此一法則唯一的例外是劣等財——當所得愈高，價格不變時，對該商品消費數量

種介紹性的教科書，是無法深入探討這些問題的。有興趣的讀者請參閱附錄A [爲更深入研究者之建議] 中所提到之書目。

自古迄今，很多著名的數理經濟文獻，皆經過人爲的努力加以數量化，或至少特意予以數學化的。此處，僅提及馬克斯（Karl Marx）的資本論（Das Kapital）一書中有名的勞動價值論，和以後接着以數學加以討論之 Von Bortkiewicz<sup>③</sup> 及 P. M. Sweezy<sup>④</sup>。對馬克斯資本論之其他部分，應用數學方式加以討論者有 Shigeto Tsuru<sup>⑤</sup>。另一著名的例子，是由 Von Boehm-Bawerk 所著之“Positive Theorie des Kapitals”，續由 Knut Wicksell 以數學在其“Über Wert, Kapital und Rente”<sup>⑥</sup>一書重加討論並作分析。作者並不認爲，有名的經濟學家以非數學方式提出之理論，與其門徒日後所發展之數學模型，在本質上有任何基本的差異；只覺得數學能將其中邏輯與隱含之假定，闡明得更清楚而已。

許多當代的哲學家與邏輯學家認爲數學實在是邏輯學的一支；而且，沒有人否認當今的數學邏輯與數學之間有很密切之關係。因此，我無法了解，任何運用邏輯，亦即運用推論方法以建立經濟模型者，竟能否認數學在經濟學上之運用。

對極端的歷史學派或制度學派，上述結論並不爲真，然而，我們可看到，這些學派之影響正日趨式微。

當然，我們無法事前證明數學與計量方法必可成功，但，對任何科學方法亦然。希望讀者或學生以開放的心胸接受這些方法，在經濟學領域中，小心地運用計量方法，來對計量作實際而公平的評價。最後，作者惟願本書能引起經濟學系學生對這些現代方法之興趣，從而進一步激勵其對計量之研究。

① O. Lange: "The Scope and Method of Economics," *Review of Economic Studies*, 1945, Vol. 13, p. 19.

② G. Tintner: "The Definition of Econometrics," *Econometrica*, 1953, Vol. 21, pp. 31—40. Japanese translation: *Bulletin of the Bureau of Statistics, Office of the Prime Minister*, March 1954, Vol. 3, no. 6, pp. 57—69.

③L. von Bortkiewicz: *Wertrechnung und Preisrechnung in Marx'schen System*, "Archiv fuer Sozialwissenschaft und Sozialpolitik," 1906, Vol. 23, pp. 445—488.

④P. M. Sweezy: *The Theory of Capitalist Development*, New York: Oxford University Press, 1942, pp. 123—125.

⑤Shigeto Tsuru: "On Reproduction Schemes," Appendix A of P. M. Sweezy: *op. cit.*, pp. 365—374.

⑥K. Wicksell: *Ueber Wert, Kapital und Rente nach den neuen national-ökonomischen Theorien*, Jena: Gustav Fischer, 1893.

# 經濟數學與統計 目 錄

|           |     |
|-----------|-----|
| 二版序言..... | (I) |
|-----------|-----|

|             |       |
|-------------|-------|
| 日本譯版序言..... | (III) |
|-------------|-------|

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 第一編 經濟學常用到之一些基本數學<br>觀念 ..... | (1) |
|-------------------------------|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 第一章 集合、函數、圖形 ..... | (1) |
|--------------------|-----|

|                      |      |
|----------------------|------|
| 1. 基本的集合論 .....      | (1)  |
| 2. 序對與卡蒂森乘積 .....    | (4)  |
| 3. 排列與組合，二項式定理 ..... | (6)  |
| 4. 關係.....           | (10) |
| 5. 函數.....           | (11) |
| 6. 函數之例子與討論.....     | (12) |
| 7. 直角座標.....         | (13) |
| 8. 方程式之圖形.....       | (15) |

|                                  |      |
|----------------------------------|------|
| 第二章 有一個未知數之直線方程式，<br>二次方程式 ..... | (19) |
|----------------------------------|------|

|                   |      |
|-------------------|------|
| 9. 直線方程式.....     | (19) |
| 10. 直線方程式之圖形..... | (20) |
| 11. 直線型之需求函數..... | (24) |
| 12. 直線型供給函數.....  | (27) |
| 13. 市場均衡.....     | (30) |

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| 14. 租稅 .....             | (33)        |
| 15. 二次的需求和供給曲線 .....     | (36)        |
| <b>第三章 直線方程體系 .....</b>  | <b>(39)</b> |
| 16. 多於一個未知數的直線方程式 .....  | (39)        |
| 17. 多種商品之市場均衡 .....      | (42)        |
| 18. 設算 .....             | (44)        |
| 19. 以克魯特法解直線方程體系 .....   | (47)        |
| <b>第四章 對數 .....</b>      | <b>(53)</b> |
| 20. 巴萊圖的所得分配 .....       | (53)        |
| 21. 固定彈性的需求曲線 .....      | (57)        |
| <b>第五章 級數 .....</b>      | <b>(61)</b> |
| 22. 算術級數 .....           | (61)        |
| 23. 算術級數之和 .....         | (63)        |
| 24. 企業之成長 .....          | (64)        |
| 25. 幾何級數 .....           | (65)        |
| 26. 幾何級數之和 .....         | (67)        |
| 27. 人口 .....             | (68)        |
| 28. 複利 .....             | (69)        |
| <b>第六章 行列式 .....</b>     | <b>(73)</b> |
| 29. 二秩行列式 .....          | (73)        |
| 30. 以子式作行列式之展開 .....     | (75)        |
| 31. 以行列式解三個未知數之直線方程體系 .. | (78)        |
| 32. 以克魯特法，解行列式 .....     | (80)        |

---

|     |                            |       |
|-----|----------------------------|-------|
| 第七章 | 不等式、線型規劃，投入—<br>產出分析 ..... | (85)  |
|     | 33. 不等式 .....              | (85)  |
|     | 34. 線型規劃：圖解法 .....         | (89)  |
|     | 35. 線型規劃：一般型 .....         | (92)  |
|     | 36. 單純形法 .....             | (100) |
|     | 37. 投入—產出分析 .....          | (106) |
| 第八章 | 矩陣 .....                   | (115) |
|     | 38. 正方矩陣，加法和減法與純量相乘 .....  | (115) |
|     | 39. 兩個正方矩陣之相乘 .....        | (118) |
|     | 40. 向量、逆矩陣、克魯特法 .....      | (120) |
| 第九章 | 常數係數之直線差分方程式 .....         | (129) |
|     | 41. 一階齊次差分方程式 .....        | (129) |
|     | 42. 一階非齊次差分方程式 .....       | (131) |
|     | 43. 複數 .....               | (134) |
|     | 44. 二階有限差分方程式 .....        | (139) |
| 第二編 | 微積分 .....                  | (145) |
| 第十章 | 函數、極限與導來式 .....            | (145) |
|     | 45. 更進一步探討有關函數關係者 .....    | (145) |
|     | 46. 需求函數和總收益函數 .....       | (148) |
|     | 47. 總成本函數與平均成本函數 .....     | (151) |
|     | 48. 差分之商 .....             | (153) |
|     | 49. 極 限 .....              | (157) |
|     | 50. 導來式 .....              | (162) |

---

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 51. 邊際成本·····             | (166) |
| 52. 邊際收益·····             | (168) |
| <br>第十一章 微分之法則 ·····      | (173) |
| 53. 指數之導來式·····           | (173) |
| 54. 一常數倍數的函數之導來式·····     | (174) |
| 55. 函數和與函數差之導來式·····      | (176) |
| 56. 一常數的導來式·····          | (178) |
| 57. 一乘積之導來式·····          | (179) |
| 58. 兩函數商之導來式·····         | (182) |
| 59. 函數之函數的導來式·····        | (184) |
| <br>第十二章 對數與指數函數之導來式····· | (189) |
| 60. 數 $e$ ·····           | (189) |
| 61. 自然對數·····             | (190) |
| 62. 對數函數之導來式·····         | (192) |
| 63. 一般對數之微分·····          | (195) |
| 64. 指數函數之導來式·····         | (197) |
| <br>第十三章 導來式在經濟上之運用 ····· | (201) |
| 65. 彈性·····               | (201) |
| 66. 需求彈性·····             | (202) |
| 67. 邊際收益與需求彈性·····        | (204) |
| 68. 第一次導來式之更進一步的幾何意義····· | (206) |
| <br>第十四章 較高次之導來式 ·····    | (209) |
| 69. 較高次之導來式·····          | (209) |
| 70. 二次導來式之幾何說明·····       | (210) |

---

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| 71. 遞增與遞減的邊際成本·····              | (213) |
| <b>第十五章 一變數之極大與極小值，轉折點</b> ····· | (217) |
| 72. 具一個變數函數之極大與極小值·····          | (217) |
| 73. 獨 占·····                     | (221) |
| 74. 平均與邊際成本·····                 | (225) |
| 75. 轉折點·····                     | (227) |
| <b>第十六章 多個變數函數之導來式</b> ·····     | (231) |
| 76. 多個獨立變數之函數·····               | (231) |
| 77. 偏導來式·····                    | (232) |
| 78. 邊際生產力·····                   | (235) |
| 79. 需求之偏彈性·····                  | (237) |
| 80. 隱函數之微分·····                  | (241) |
| <b>第十七章 齊次性</b> ·····            | (247) |
| 81. 齊次函數·····                    | (247) |
| 82. 尤勒定理·····                    | (249) |
| <b>第十八章 高次偏導來式與其運用</b> ·····     | (253) |
| 83. 高次偏導來式·····                  | (253) |
| 84. 具多變數之極大與極小值·····             | (255) |
| 85. 聯合生產·····                    | (258) |
| 86. 有限制條件之極大值與極小值·····           | (260) |
| 87. 效用理論·····                    | (262) |
| 88. 於自由競爭下之生產·····               | (265) |
| <b>第十九章 積分之要素、微分方程、</b>          |       |

|                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 變分學 .....                  | (269)        |
| 89. 反導來式 .....             | (269)        |
| 90. 邊際成本、總成本、平均成本 .....    | (271)        |
| 91. 積分 .....               | (273)        |
| 92. 消費者剩餘 .....            | (277)        |
| 93. 微分方程式 .....            | (280)        |
| 94. 基本變分學 .....            | (285)        |
| <b>第三編 機率和統計學 .....</b>    | <b>(289)</b> |
| <b>第二十章 機    率 .....</b>   | <b>(289)</b> |
| 95. 機    率 .....           | (289)        |
| 96. 機率之法則 .....            | (291)        |
| 97. 機率分配 .....             | (296)        |
| <b>第二十一章 隨機變數 .....</b>    | <b>(303)</b> |
| 98. 數學期待值 .....            | (303)        |
| 99. 數學期待值之計算 .....         | (306)        |
| 100. 一些簡單的存貨問題 .....       | (312)        |
| <b>第二十二章 動    差 .....</b>  | <b>(321)</b> |
| 101. 對原點之動差 .....          | (321)        |
| 102. 關於數學期待值之動差 .....      | (323)        |
| <b>第二十三章 二項與常態分配 .....</b> | <b>(327)</b> |
| 103. 重複試驗與二項分配 .....       | (327)        |
| 104. 常態分配 .....            | (331)        |
| 105. 波氏過程 .....            | (340)        |

---

|                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 106. 排隊理論之要素 .....         | (342)        |
| <b>第二十四章 抽樣理論的要素 .....</b> | <b>(345)</b> |
| 107. 估 計 .....             | (345)        |
| 108. 次數分配 .....            | (354)        |
| 109. 樣本均數與變異數 .....        | (356)        |
| 110. 薛普氏修正 .....           | (362)        |
| 111. 信賴限 .....             | (363)        |
| <b>第二十五章 假設之檢定 .....</b>   | <b>(369)</b> |
| 112. 統計假設之檢定 (大樣本) .....   | (369)        |
| 113. 統計假設之檢定 (小樣本) .....   | (371)        |
| 114. 兩個樣本顯著性之測驗 .....      | (373)        |
| <b>第二十六章 各項分配之配合 .....</b> | <b>(381)</b> |
| 115. 常態分配之配合 .....         | (381)        |
| 116. 配適度之檢合 .....          | (384)        |
| 117. 列聯表 .....             | (387)        |
| <b>第二十七章 迴歸和相關 .....</b>   | <b>(391)</b> |
| 118. 最小平方法 .....           | (391)        |
| 119. 曲線之配合 .....           | (392)        |
| 120. 簡單迴歸 .....            | (401)        |
| 121. 簡單相關 .....            | (407)        |
| 122. 配合需求與供給曲線 .....       | (414)        |
| 123. 複迴歸與相關 .....          | (425)        |
| 124. 認 定 .....             | (440)        |
| <b>第二十八章 加總與指數 .....</b>   | <b>(449)</b> |

---

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 125. 直線加總 .....        | (449) |
| 126. 指 數 .....         | (454) |
| 附錄A 爲更進一步研究所作之建議 ..... | (461) |
| 附錄B 部分習題解答 .....       | (465) |
| 附錄C 附 表 .....          | (513) |
| 附錄D 數學與統計學術語索引 .....   | (519) |
| 表1. 普通對數表 .....        | (519) |
| 表2. 三角函數表 .....        | (521) |
| 表3. 自然對數表 .....        | (525) |
| 表4. 常態曲線下之面積 .....     | (527) |
| 表5. $t$ 分配表 .....      | (528) |
| 表6. $X^2$ 機率表 .....    | (529) |
| 表7. $F$ 與 $t$ 值 .....  | (530) |
| 附錄E 索引 .....           | (535) |
| 附錄F 經濟術語索引 .....       | (555) |