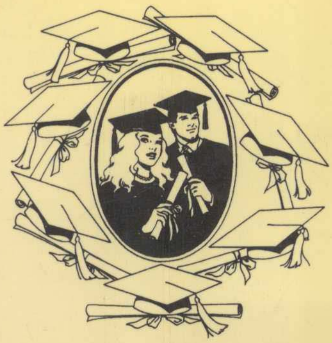
2001KAOYAN 2001KAOYAN 2001KAOYAN 2001KAOYAN 2001KAOYAN 2001KAOYAN



# 2001 硕士研究生入学考试

## 数学解题方法点拨

[经济数学]

主编 中国人民大学数学系 傅维潼
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

2001KAOYAN

# 硕士研究生入学考试
# 数学解题方法点拨

## [经济数学]

主　编　中国人民大学数学系　傅维潼
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

**图书在版编目(CIP)数据**

硕士研究生入学考试数学解题方法点拨:理工类、经济类/傅维潼主编.
-北京:科学技术文献出版社,2000.5
ISBN 7-5023-3543-9
Ⅰ.硕... Ⅱ.傅... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.013-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18784 号

**出　　版　　者**:科学技术文献出版社
**邮 购 部 电 话**:(010)62579473-8100
**图书发行部电话**:(010)62534708,62624508,62624119
**门 市 部 电 话**:(010)62534447,62543201
**图书发行部传真**:(010)62579473-8002
E-mail:stdph@istic.ac.cn
**策　划　编　辑**:胡东华
**责　任　编　辑**:赵　斌
**责　任　校　对**:赵　斌
**封　面　设　计**:胡东华
**发　　行　　者**:科学技术文献出版社发行
新华书店总店北京发行所经销
**印　　刷　　者**:保定市河北小学印刷厂
**版　(　印　)　次**:2000 年 4 月第 1 版　2000 年 4 月第 1 次印刷
**开　　　　　本**:787×1092　16 开
**字　　　　　数**:156 万字
**印　　　　　张**:56.9
**全二册合计定价**:62 元(本册 30 元)

# 前　言

笔者在中国人民大学研究生院历次为经济学硕士研究生入学考试所举办的数学辅导班进行辅导的过程中，深感多数考生在如何运用所学数学知识去分析数学问题，探索解题途径方面的能力是薄弱的，参加辅导班的考生也要求强化这方面的能力．要保证研究生入学考试的选拔性功能，试卷就应该有相应的区分度，这样，在试题中必然包含若干综合性的、具有相应难度的问题，要解答这类问题，就应当具备相应的分析问题和解决问题的能力．

本书是根据硕士研究生入学考试数学(三)、(四)新大纲的要求编写的，以考试的主要知识点为线索，常见的典型试题为重点，详细地分析解题的思考过程，帮助考生掌握解题思路和解题方法，达到举一反三，触类旁通的效果．

笔者希望能通过本书，启发和引导广大考生在复习数学的过程中，既注意考试大纲中规定的基本概念、基本性质、基本定理、基本公式和法则以及基本算法，又能关注自己的思维过程，经常分析自己思考的“成功”和“失败”的实例，学会调节和重新组织自己的思想，改进思维方式，提高运用数学语言的能力，从而尽快地找到适合于自己的提高解题能力的途径．

本书根据新考试大纲在每章之后编选了练习题及其解答．

本书也可作为全日制财经院校的大学本科生学习数学的参考书．

书中不当或错误之处，望广大读者不吝赐教．

# 目　　录

## 绪　论



## 第一篇　微积分

## 第二篇 线性代数

# 绪　论

## 第一章　矛盾转移的基本思想

做任何事情都应该讲究方法，方法不当，事倍功半；方法得当，事半功倍．

数学问题是千变万化的，解题方法也是灵活多样的，我们不可能归纳出题目的所有类型，更不可能找到包解各种数学问题的万能方法．尽管如此，人们在长期解题实践中，总结了一些寻求解题途径的科学思维方法和模式，这些方法和模式在解决数学问题时，能指导和启发人们思考如何去探索解题途径．因此，当你解答所面临的数学问题时，除了必须熟练掌握数学的基础知识之外，还应当学会科学的思维方法，这样才能提高你的解题能力，以适应经济学硕士研究生选拔性入学考试的要求．

人们不论在生活中还是在工作中，遇到较困难的问题或难以解决的矛盾时，往往要想办法创造条件将其转化为较易处理的问题或矛盾，以求得解决的方法．这是一种非常普遍的思想方法——矛盾转移法．

不少学者认为：数学思维的一个重要特点，就是人们往往不是对问题进行正面攻击，而是不断地将它变形，直到把它转移到能够得到解决的问题时，也就是根据原来的问题的特点，发现一个或几个比原来问题简单、难度较低、易于解决的新问题，通过对新问题的考察，发现原问题的解题途径，最后达到解决原问题的目的．

莫斯科大学一位数学教授，更简明扼要地指出："解题就是意味着把要解的题转化为解过的题．"

如果问题 $P_1$ 的解决有赖于问题 $P_2$ 的解决，则我们说问题 $P_1$ 可转移到问题 $P_2$；若问题 $P_1$ 的解决有赖于若干问题 $P_1'$，$P_2'$，…，$P_n'$ 都得到解决，则我们说问题 $P_1$ 可分解为 $n$ 个子问题 $P_1'$，$P_2'$，…，$P_n'$．

### §1.1　转移问题的基本策略原则

**一、陌生问题尽量转移到熟悉的问题**

如果能把陌生问题转移到我们所熟悉的问题，那么我们就可以充分利用已经掌握的知识和已经有的解题经验．

例 1　计算积分：$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$

[**分析**] 这个积分不能直接计算出来．

把被积函数改变成另一种形式：

$\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \mathrm{d}y$，则有：

$$I = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_0^1 x^y \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

$\therefore \quad I = \int_a^b \dfrac{1}{y+1} \mathrm{d}y$ 　这个积分是我们熟悉的．

$\therefore \quad I = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\dfrac{b+1}{a+1}$

**二、复杂问题应尽量分解为简单问题**

若能把复杂问题，分解成几个简单的子问题，则可利用所学知识，个个击破，再按原问题的要求得出原问题的解答．

例 2　选择题（1999，三、四）

设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 $D$ 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于

(A) $xy$　　(B) $2xy$　　(C) $xy + \dfrac{1}{8}$　　(D) $xy + 1$　　[C]

[**分析**] 关键是求出 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 的值．它是常数，设为 $I$，因而应排除(B)．

要求 $I$，给定等式两边积分，得：

$$I = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + I\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\therefore \quad I\left(1 - \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (*)$$

问题便分解为　(1) 求 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$　(2) 求 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

两个问题. 个个击破：

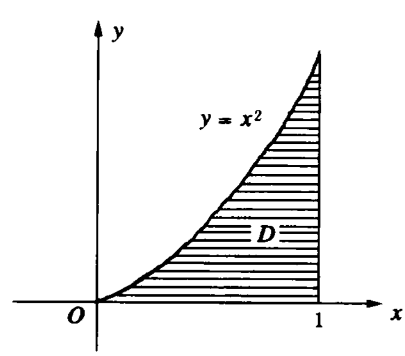
(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}$

(2) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{x^2} y\mathrm{d}y = \dfrac{1}{12}$

代入(*)　$\therefore \dfrac{2}{3}I = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{12}$

$\therefore I = \dfrac{1}{8}$

$\therefore f(x,y) = xy + \dfrac{1}{8}$　　　选(C)




**三、抽象问题尽量直观形象化**

如果能把抽象的问题直观形象地表现出来，就可能形象地把握问题所涉及的对象之间的关系，便于寻求解题的线索．

例 3　设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 中以 $T$ 为周期的连续函数．

证明:对任何实数 $a$,有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

[**分析**]画出周期为 $T$ 的函数 $y = f(x)$(如图 0-1),表示出以上等式左、右两边的几何意义,即要证明,由 $x = a, x = T + a$ 及 $x$ 轴,曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积与由 $y$ 轴,$x = T$,$x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积相等.

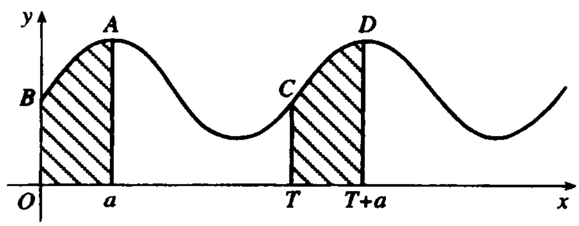



图 0-1

它们共同的部分是由 $x = a, x = T$,$x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积.因此,只需证明曲边梯形 $OaAB$ 和 $T(T + a)DC$ 面积相等即可.即只需证明:对任何实数 $a$,有

$$\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

成立.怎样证明?用换元法:

设:$x = T + t$,则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,当 $x = T$ 时 $t = 0$,当 $x = T + a$ 时 $t = a$

于是

$$\begin{aligned}\int_T^{T+a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a f(T + t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

有了(2)成立,

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式(1)得证.

**四、一般性的问题尽量先考虑其特殊情况**

若一般性的问题的解题途径不明确,可以先将其特殊化,从特殊情况的解法中寻求一般性问题的解法.

例 4　填空题(1999,三、四)

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,而 $n \geqslant 2$ 为正整数

则 $\mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} =$ ____________. 答：0

[**分析**] 一般这种与自然数有关的问题，常常先从特殊情况入手：

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}$$

可得：$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = 0$，两边再乘 $\mathbf{A}^{n-2}$：

$$\mathbf{A}^{n-2}(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{n-2} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} = 0$$

[**另法**] 由于 $A^T = A$，可知 $A$ 为实对称矩阵，可用相似的方法化成对角形这种特殊的简单的矩阵，再求它的 $n$ 次幂．

先求特征值：

令 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0$ 得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$

对实对称矩阵来说，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而 $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = P^{-1}A^nP$

即 $P^{-1}A^n\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\therefore \quad 2\mathbf{A}^{n-1} = 2 \cdot P\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

即 $\mathbf{A}^n = 2\mathbf{A}^{n-1}$

$$\therefore \quad \mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} = 0$$

**五、特殊情形的问题尽量从其一般情形考虑**

若把特殊问题一般化，又能找到一般情形下的解题途径或已经知道了一般问题的解法，那么，特殊问题的解法是可以从中得到启示的．

例 5 填空题(1999，三)

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$ __________ 答：4

[**分析**] $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时的特殊情况．

先求这个幂级数的和函数：

$\because \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{n|x|^{n-1}} = |x| < 1$ 时，

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 绝对收敛，其收敛域也是 $-1<x<1$，设其和函数为 $S(x)$，利用幂级数可逐项求导和逐项积分的性质，可得：

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]_x' \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)_x' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1) \end{aligned}$$

$\because \quad x=\frac{1}{2} \in (-1,1)$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

**六、注意条件与结论、形与数、内容与形式的合谐统一**

这样才便于突出问题所涉及的对象之间的本质联系．

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加．

证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b-\xi) \qquad ①$$

[**分析**] 式 ① 的几何解释，依题意画出图形（见图 0-2）：

(1) 函数 $y=f(x)$ 的曲线连接点 $F(a,f(a))$ 和 $C(b,f(b))$，从左向右上升，且曲线是连续的．

(2) 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 $x$ 轴围成的曲边梯形的面积为

$$\int_a^b f(x)dx$$

(3) $f(a)(\xi-a)$ 表示矩形 AGEF 的面积，而 $f(b)(b-\xi)$ 表示矩形 BCDG 的面积．

(4) 等式 ① 的右边是这两个矩形面积之和，它是阶梯形 ABCDEF 的面积

$$f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

(5) 若把 ① 式右端的 $\xi$ 改成 $x$，$x$ 在 $[a,b]$ 中变动，就得到变动的阶梯形，其面积为

$$F(x) = f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$$

在这样的阶梯形中，当 $x=a$ 时面积最大，等于 $F(a)=f(b)(b-a)$；当 $x=b$ 时，面积最小，等于 $F(b)=f(a)(b-a)$，曲边梯形的面积在这两个面积之间，即

$$F(a) \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant F(b)$$

(6) 等式 ① 表明：存在一个阶梯形，其面积恰好等于该曲边梯形的面积．

从以上图形的解释中，明确了解决问题的关键在于作一个辅助函数

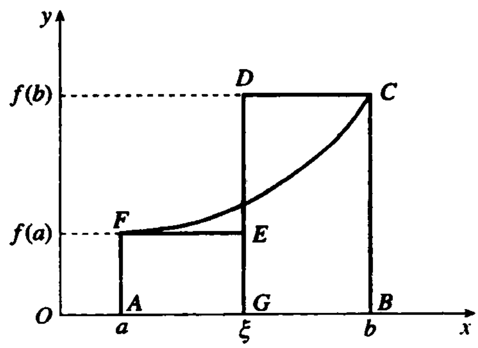



图 0-2

$$F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$$

使 $$F(b)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant F(a)$$

又 F(x) 在[a,b]上连续，这样，就能用闭区间[a,b]上连续函数的介值定理.

[**证明**] 设 $F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$. 它显然在[a,b]上连续，且由 f(x) 在[a,b]上连续，单调增加，所以，对任意 $x\in[a,b]$

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$$

$$\therefore f(a)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant f(b)(b-a)$$

即 $$F(b)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant F(a)$$

由闭区间上连续函数的介值定理知：存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx=F(\xi)=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

**注意**：在运用以上各策略原则时，应从具体问题的特点出发，灵活地结合起来运用，才能启发我们发现解题线索.

## §1.2　隐含条件的挖掘

若面临的数学问题较难，则往往有一些条件隐含在问题中，这时，关键在于把隐含在问题中，解题又需要的条件挖掘出来，以便解决问题时使用.

下面总结挖掘数学问题中隐含条件，突破关键问题的方法，对于提高解题能力，是很有意义的.

隐含条件可以从以下几方面挖掘.

**一、从概念的特征中挖掘**

有时，解题所需要的条件，要从理解、分析问题所涉及的主要概念的特征中入手来挖掘.

例 1　(1995,四) 已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$,若各

向量组的秩分别为

$$r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II}) = 3, r(\mathrm{III}) = 4$$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

[**分析**] 这一问题所涉及的主要概念是向量组的秩：

$r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II}) = 3$，表明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，因而存在数 $l_1$，$l_2$，$l_3$，使：

$$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \tag{1}$$

要证明 $\quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4) = 4$

只需证，若 $\quad k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5-\alpha_4) = 0 \quad (2)$

则必有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

这可以由 $r(\mathrm{III}) = 4$ 推出：把(1)代入(2)

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4[\alpha_5 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3] = 0$$

即 $\quad (k_1 - k_4l_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4l_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4l_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$

$r(\mathrm{III}) = 4$ 即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5$ 线性无关

$\therefore \quad k_4 = 0 \quad k_1 - k_4l_1 = k_2 - k_4l_2 = k_3 - k_4l_3 = 0$

$\therefore \quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

即 $\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关

$\therefore \quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4) = 4$

**二、从图形特征中挖掘**

有时解题所需要的条件，可以从几何解释的图形特征中挖掘出来．

例 2 (1993，四) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 中有二阶导数，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$.

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$f''(\xi) = 0$$

[**分析**] 从 $f(x)$ 所满足的条件知：$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 中连续且可导，只需能在 $(0,1)$ 中找到两点 $\eta_1$ 和 $\eta_2$，使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2)$.

就可以在 $\eta_1$、$\eta_2$ 之间找到一点 $\xi$，使

$$f''(\xi) = 0$$

可以画出图形看一看(见图 0-3).

(1) 曲线 $y=f(x)$ 连接 $A(0,f(0))$，$B(1,f(1))$ 且与弦 $AB$ 相交于 $C(c,f(c))$，$C$ 在 $A$，$B$ 两点之间．

(2) 曲线 $y=f(x)$ 连续且除 $A$、$B$ 两端点外，每一点处都有不平行于 $y$ 轴的切线，而且切线的斜率 $f'(x)$ 也是可导的．

由拉格朗日中值定理，在 $AC$ 弧上有一点 $(\eta_1,f(\eta_1))$，曲线在这一点的切线平行于弦 $AB$，在 $CB$ 弧上有一点 $(\eta_2,f(\eta_2))$，曲线在这点的切线也平行于弦 $AB$.

弦 $AB$ 的斜率为 $[f(1)-f(0)]$，即

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = [f(1)-f(0)] \tag{4}$$