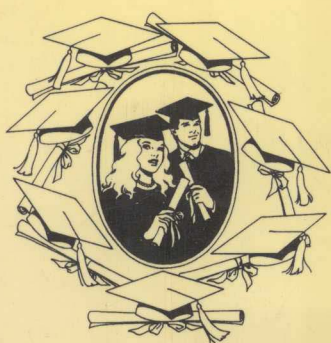




2 0 0 1

硕 士 研 究 生

人 学 考 试

数学解题方法点拨

[经济数学]

主 编 中国人民大学数学系 傅维潼
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

2001KAOYAN

硕士研究生入学考试 数学解题方法点拨

[经济数学]

主 编 中国人民大学数学系 傅维潼
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学解题方法点拨:理工类、经济类/傅维潼主编.

—北京:科学技术文献出版社,2000.5

ISBN 7-5023-3543-9

I. 硕... II. 傅... III. 高等数学—研究生—入学考试—解题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18784 号

出 版 者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)62579473-8100

图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119

门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201

图书发行部传真:(010)62579473-8002

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:胡东华

责 任 编 辑:赵 斌

责 任 校 对:赵 斌

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行

新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:保定市河北小学印刷厂

版 (印) 次:2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

开 本:787×1092 16 开

字 数:156 万字

印 张:56.9

全二册合计定价:62 元(本册 30 元)

©版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者),(010)62534708(著作权者)。

本丛书封面均贴有“读书新知”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物,盗版书刊因错漏百出、印刷粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。

前 言

笔者在中国人民大学研究生院历次为经济学硕士研究生入学考试所举办的数学辅导班进行辅导的过程中,深感多数考生在如何运用所学数学知识去分析数学问题,探索解题途径方面的能力是薄弱的,参加辅导班的考生也要求强化这方面的能力.要保证研究生入学考试的选拔性功能,试卷就应该有相应的区分度,这样,在试题中必然包含若干综合性的、具有相应难度的问题,要解答这类问题,就应当具备相应的分析问题和解决问题的能力.

本书是根据硕士研究生入学考试数学(三)、(四)新大纲的要求编写的,以考试的主要知识点为线索,常见的典型试题为重点,详细地分析解题的思考过程,帮助考生掌握解题思路和解题方法,达到举一反三,触类旁通的效果.

笔者希望能通过本书,启发和引导广大考生在复习数学的过程中,既注意考试大纲中规定的基本概念、基本性质、基本定理、基本公式和法则以及基本算法,又能关注自己的思维过程,经常分析自己思考的“成功”和“失败”的实例,学会调节和重新组织自己的思想,改进思维方式,提高运用数学语言的能力,从而尽快地找到适合于自己的提高解题能力的途径.

本书根据新考试大纲在每章之后编选了练习题及其解答.

本书也可作为全日制财经院校的大学本科生学习数学的参考书.

书中不当或错误之处,望广大读者不吝赐教.

目 录

绪 论

第一章 矛盾转移的基本思想.....	1
§ 1.1 转移问题的基本策略原则.....	1
§ 1.2 隐含条件的挖掘.....	6
第二章 寻求解题途径的搜索法	11
§ 2.1 正向搜索法	11
§ 2.2 反向搜索法	11
§ 2.3 双向搜索法	12

第一篇 微 积 分

第一章 函数	18
§ 1.1 函数的概念	18
§ 1.2 函数的简单几何特性	23
§ 1.3 基本初等函数与初等函数	28
§ 1.4 函数图形的凸向及拐点	29
§ 1.5 函数图形的描绘	30
§ 1.6 矛盾转移的基本思想运用于函数表达式	32
§ 1.7 在基本初等函数的运算性质中,搜索改变已知状态的手段	36
练习一	40
练习一解答与提示	40
第二章 极限与连续	43
§ 2.1 极限	43
§ 2.2 无穷小的基本性质与无穷小的比较	45
§ 2.3 极限的计算	49
§ 2.4 连续函数	53
§ 2.5 有关极限与连续的问题中矛盾转移的基本思路的运用	58
§ 2.6 在极限与连续的知识中,搜索改变已知状态的手段	61
练习二	63
练习二解答与提示	64
第三章 导数与中值定理	66
§ 3.1 导数的概念	66
§ 3.2 导数的运算	72

§ 3.3	微分的概念	75
§ 3.4	中值定理	76
§ 3.5	极值	83
§ 3.6	运用矛盾转移的基本思路将有关问题转移到与导数有关的问题中解决	85
§ 3.7	搜索有关知识解决有关运用中值定理的问题	87
练习三		89
练习三解答与提示		90
第四章	积分	93
§ 4.1	原函数和不定积分的概念	93
§ 4.2	定积分的概念	98
§ 4.3	定积分的基本性质	99
§ 4.4	变上限积分、牛顿-莱布尼兹公式	102
§ 4.5	换元积分法与分部积分法	104
§ 4.6	广义积分的概念及其计算	108
§ 4.7	应用定积分计算平面图形面积、旋转体体积	111
§ 4.8	矛盾转移的基本思路在求解积分问题的运用	113
§ 4.9	搜索积分的知识解决有关问题	115
练习四		116
练习四解答与提示		119
第五章	多元微积分	123
§ 5.1	多元函数的概念与二元函数的几何意义	123
§ 5.2	二元函数的连续性	123
§ 5.3	偏导数及其计算	124
§ 5.4	全微分的概念及其计算	126
§ 5.5	多元复合函数的导数与隐函数的导数	127
§ 5.6	多元函数的极值、条件极值、最大值和最小值及简单经济运用	129
§ 5.7	二重积分的概念及其计算	133
§ 5.8	无界区域上简单二重积分的计算	135
§ 5.9	解决多元函数问题过程中矛盾转移的基本思路	137
§ 5.10	在多元函数的知识中搜索解决有关问题的方法	139
练习五		141
练习五解答与提示		141
* 第六章	无穷级数	143
§ 6.1	常数项级数	143
§ 6.2	正项级数及其审敛准则	145

§ 6.3 任意项级数的敛散性的判别·····	147
§ 6.4 幂级数概念及其基本性质·····	150
§ 6.5 函数的幂级数展开·····	153
§ 6.6 解决无穷级数问题中的矛盾转移基本思路的运用·····	154
§ 6.7 搜索有关无穷级数的知识解决相关的问题·····	156
练习六·····	160
练习六解答与提示·····	160
* 第七章 微分方程与差分方程·····	161
§ 7.1 微分方程的概念·····	161
§ 7.2 变量可分离的微分方程与齐次微分方程·····	161
§ 7.3 一阶线性微分方程·····	163
§ 7.4 二阶常系数线性微分方程的解法·····	166
§ 7.5 差分与差分方程·····	171
§ 7.6 解微分方程、差分方程问题中,矛盾转移基本思路的运用·····	175
§ 7.7 解微分方程问题及差分方程的搜索·····	177
练习七·····	179
练习七解答与提示·····	179

第二篇 线性代数

第一章 行列式·····	181
§ 1.1 行列式的概念·····	181
§ 1.2 行列式的基本性质与计算·····	182
§ 1.3 克莱姆法则·····	190
§ 1.4 解行列式问题中的矛盾转移的基本思路·····	193
§ 1.5 在行列式的知识中搜索解题方法·····	196
练习八·····	198
练习八解答与提示·····	199
第二章 矩阵·····	200
§ 2.1 矩阵的概念·····	200
§ 2.2 矩阵的代数运算·····	201
§ 2.3 逆矩阵的概念与性质·····	206
§ 2.4 矩阵的初等变换与矩阵的秩·····	212
§ 2.5 分块矩阵及其运算·····	217
§ 2.6 有关矩阵问题解决过程中矛盾转移的基本思路·····	222
§ 2.7 在解决有关矩阵问题时的搜索法·····	223
练习九·····	224

练习九解答与提示.....!	226
第三章 向量	228
§ 3.1 向量的概念与运算.....	228
§ 3.2 向量组的极大线性无关组与向量组的秩.....	236
§ 3.3 解决有关向量问题过程中矛盾转移的基本思路.....	239
§ 3.4 解决有关向量问题过程中的搜索法.....	241
练习十.....	241
练习十解答与提示.....	243
第四章 线性方程组	244
§ 4.1 齐次线性方程组.....	244
§ 4.2 非齐次线性方程组.....	244
§ 4.3 解有关线性方程组问题过程中矛盾转移的基本思路.....	255
§ 4.4 解有关线性方程组问题过程中搜索法的运用.....	257
练习十一.....	258
练习十一解答与提示.....	261
第五章 矩阵的特征值与特征向量	263
§ 5.1 矩阵的特征值与特征向量.....	263
§ 5.2 相似矩阵及其性质.....	268
* § 5.3 实对称矩阵的相似对角化(实二次型正交变换化为标准形).....	272
§ 5.4 关于矩阵相似性问题解答过程中矛盾转移的基本思路.....	276
§ 5.5 解答相似矩阵问题过程中如何运用搜索法.....	277
练习十二.....	279
练习十二解答与提示.....	280
* 第六章 二次型	281
§ 6.1 二次型的矩阵及二次型的秩.....	281
§ 6.2 化二次型为标准形.....	282
§ 6.3 实二次型和实对称矩阵的正定性.....	289
§ 6.4 关于二次型问题解答过程中矛盾转移的基本思路.....	295
§ 6.5 解有关二次型问题过程中的搜索法.....	296
练习十三.....	300
练习十三解答与提示.....	300

第三篇 概率统计

第一章 随机事件及其概率	301
---------------------------	-----

§ 1.1 随机事件及其概率	301
§ 1.2 古典概型中概率的直接计算	303
§ 1.3 条件概率	304
§ 1.4 伯努里概型	310
§ 1.5 解有关古典概率问题过程中矛盾转移的基本思路	315
§ 1.6 解有关古典概率问题过程中的搜索法	316
练习十四	317
练习十四解答与提示	318
 第二章 随机变量及其分布	 321
§ 2.1 随机变量的概念	321
§ 2.2 随机变量概率分布的求法	321
§ 2.3 常见的随机变量的分布	326
§ 2.4 解决随机变量分布有关的问题过程中的矛盾转移的基本思路	332
§ 2.5 解决随机变量分布有关的问题过程中的搜索法	334
练习十五	335
练习十五解答与提示	337
 第三章 随机变量函数的分布(一个随机变量函数的分布)	 338
§ 3.1 离散型随机变量函数的分布	338
§ 3.2 连续型随机变量函数的分布	339
§ 3.3 解有关一元随机变量函数分布问题过程中矛盾转移的基本思路	344
§ 3.4 解有关一元随机变量函数分布问题的过程中的搜索法	345
练习十六	347
练习十六解答与提示	347
 第四章 数学期望与方差	 349
§ 4.1 数学期望	349
§ 4.2 方差	353
§ 4.3 解决有关随机变量期望、方差问题过程中矛盾转移的基本思路	359
§ 4.4 解决有关随机变量期望、方差问题过程中的搜索法	360
练习十七	363
练习十七解答与提示	364
 第五章 二元随机变量	 365
§ 5.1 联合分布与边缘分布	365
§ 5.2 二元随机变量的分布函数	369
§ 5.3 随机变量的独立性	370

§ 5.4 二维均匀分布和二维正态分布.....	373
§ 5.5 协方差和相关系数.....	376
* § 5.6 两个随机变量和的分布.....	379
§ 5.7 解有关二元随机变量问题过程中矛盾转移的基本思路.....	383
§ 5.8 解有关二元随机变量问题过程中的搜索法.....	386
练习十八.....	391
练习十八解答与提示.....	392
 * 第六章 大数定律和中心极限定理.....	393
§ 6.1 大数定律.....	393
§ 6.2 中心极限定理.....	395
§ 6.3 解有关概率问题时,如何运用大数定律,中心极限定理把问题转移为容易计算的概 率问题.....	397
§ 6.4 运用极限定理的似计算事件概率问题过程中的搜索法.....	398
练习十九.....	399
练习十九解答与提示.....	399
 * 第七章 数理统计初步.....	400
§ 7.1 总体、个体与简单随机样本	400
§ 7.2 抽样分布.....	400
§ 7.3 参数估计.....	403
§ 7.4 假设检验.....	409
§ 7.5 关于数量统计问题解决过程中矛盾转移基本思路和搜索法.....	415
练习二十.....	418
练习二十解答与提示.....	418
模拟试题(一).....	419
模拟试题(二).....	421
参考答案(一).....	423
参考答案(二).....	424

绪 论

第一章 矛盾转移的基本思想

做任何事情都应该讲究方法,方法不当,事倍功半;方法得当,事半功倍.

数学问题是千变万化的,解题方法也是灵活多样的,我们不可能归纳出题目的所有类型,更不可能找到包解各种数学问题的万能方法. 尽管如此,人们在长期解题实践中,总结了一些寻求解题途径的科学思维方法和模式,这些方法和模式在解决数学问题时,能指导和启发人们思考如何去探索解题途径. 因此,当你解答所面临的数学问题时,除了必须熟练掌握数学的基础知识之外,还应当学会科学的思维方法,这样才能提高你的解题能力,以适应经济学硕士研究生选拔性入学考试的要求.

人们不论在生活中还是在工作中,遇到较困难的问题或难以解决的矛盾时,往往要想办法创造条件将其转化为较易处理的问题或矛盾,以求得解决的方法. 这是一种非常普遍的思想方法——矛盾转移法.

不少学者认为:数学思维的一个重要特点,就是人们往往不是对问题进行正面攻击,而是不断地将它变形,直到把它转移到能够得到解决的问题时,也就是根据原来的问题的特点,发现一个或几个比原来问题简单、难度较低、易于解决的新问题,通过对新问题的考察,发现原问题的解题途径,最后达到解决原问题的目的.

莫斯科大学一位数学教授,更简明扼要地指出:“解题就意味着把要解的题转化为解过的题.”

如果问题 P_1 的解决有赖于问题 P_2 的解决,则我们说问题 P_1 可转移到问题 P_2 ;若问题 P_1 的解决有赖于若干问题 $P_1', P_2', \dots, P_n'$ 都得到解决,则我们说问题 P_1 可分解为 n 个子问题 $P_1', P_2', \dots, P_n'$.

§ 1.1 转移问题的基本策略原则

一、陌生问题尽量转移到熟悉的问题

如果能把陌生问题转移到我们所熟悉的问题,那么我们就可以充分利用已经掌握的知识和已有的解题经验.

例 1 计算积分: $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

[分析] 这个积分不能直接计算出来.

把被积函数改变成另一种形式:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy, \text{ 则有:}$$

$$I = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^y dx \right] dy$$

$$\therefore I = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \quad \text{这个积分是我们熟悉的.}$$

$$\therefore I = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

二、复杂问题应尽量分解为简单问题

若能把复杂问题,分解成几个简单的子问题,则可利用所学知识,个个击破,再按原问题的要求得出原问题的解答.

例2 选择题(1999,三、四)

设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围区域, 则 $f(x, y)$ 等于

(A) xy (B) $2xy$ (C) $xy + \frac{1}{8}$ (D) $xy + 1$ [C]

[分析] 关键是求出 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(u, v) du dv$ 的值. 它是常数, 设为 I , 因而应排除(B).

要求 I , 给定等式两边积分, 得:

$$I = \iint_D xy dx dy + I \iint_D dx dy$$

$$\therefore I \left(1 - \iint_D dx dy \right) = \iint_D xy dx dy \quad (*)$$

问题便分解为 (1) 求 $\iint_D dx dy$ (2) 求 $\iint_D xy dx dy$

两个问题. 个个击破:

$$(1) \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{1}{3}$$

$$(2) \iint_D xy dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} y dy = \frac{1}{12}$$

$$\text{代入} (*) \quad \therefore \frac{2}{3} I = \iint_D xy dx dy = \frac{1}{12}$$

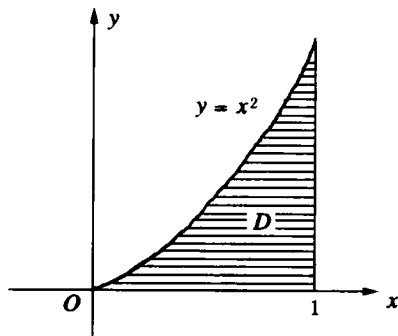
$$\therefore I = \frac{1}{8}$$

$$\therefore f(x, y) = xy + \frac{1}{8} \quad \text{选(C)}$$

三、抽象问题尽量直观形象化

如果能把抽象的问题直观形象地表现出来, 就可能形象地把握问题所涉及的对象之间的关系, 便于寻求解题的线索.

例3 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 中以 T 为周期的连续函数.



证明:对任何实数 a , 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

[分析] 画出周期为 T 的函数 $y = f(x)$ (如图 0-1), 表示出以上等式左、右两边的几何意义, 即要证明, 由 $x = a, x = T + a$ 及 x 轴, 曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积与由 y 轴, $x = T, x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积相等.

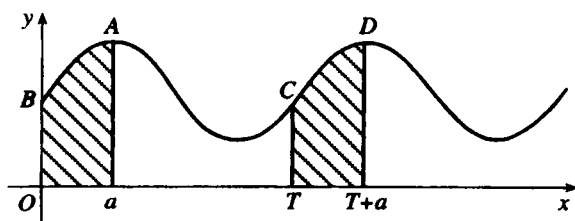


图 0-1

它们共同的部分是由 $x = a, x = T, x$ 轴及曲线 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. 因此, 只需证明曲边梯形 $OaAB$ 和 $T(T+a)DC$ 面积相等即可. 即只需证明: 对任何实数 a , 有

$$\int_T^{T+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \quad (2)$$

成立. 怎样证明? 用换元法:

设: $x = T + t$, 则 $dx = dt$, 当 $x = T$ 时 $t = 0$, 当 $x = T + a$ 时 $t = a$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_T^{T+a} f(x) dx &= \int_0^a f(T+t) dt \\ &= \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

有了(2) 成立,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx \\ &= \int_a^T f(t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^T f(x) dx \end{aligned}$$

式(1) 得证.

四、一般性的问题尽量先考虑其特殊情况

若一般性的问题的解题途径不明确, 可以先将其特殊化, 从特殊情况的解法中寻求一般性问题的解法.

例 4 填空题(1999, 三、四)

$$\text{设} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } n \geq 2 \text{ 为正整数}$$

则 $A^n - 2A^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: 0

[分析] 一般这种与自然数有关的问题,常常先从特殊情况入手:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$$

可得: $A^2 - 2A = 0$, 两边再乘 A^{n-2} :

$$A^{n-2}(A^2 - 2A) = A^{n-2} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore A^n - 2A^{n-1} = 0$$

[另法] 由于 $A^T = A$, 可知 A 为实对称矩阵, 可用相似的方法化成对角形这种特殊的简单的矩阵, 再求它的 n 次幂.

先求特征值:

$$\text{令 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \text{得 } \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

对实对称矩阵来说, 存在可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (P^{-1}AP)^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^n P$$

$$\text{即 } P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad A^{n-1} = P \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\therefore 2A^{n-1} = 2 \cdot P \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{即 } A^n = 2A^{n-1}$$

$$\therefore A^n - 2A^{n-1} = 0$$

五、特殊情形的问题尽量从其一般情形考虑

若把特殊问题一般化, 又能找到一般情形下的解题途径或已经知道了一般问题的解法, 那么, 特殊问题的解法是可以从中得到启示的.

例 5 填空题(1999, 三)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

答: 4

[分析] $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时的特殊情况.

先求这个幂级数的和函数:

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|x|^n}{n|x|^{n-1}} = |x| < 1 \text{ 时,}$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 绝对收敛, 其收敛域也是 $-1 < x < 1$, 设其和函数为 $S(x)$, 利用幂级数可逐项求导和逐项积分的性质, 可得:

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right]'_x \\ &= \left(\frac{x}{1-x} \right)'_x \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

六、注意条件与结论、形与数、内容与形式的和谐统一

这样才便于突出问题所涉及的对象之间的本质联系.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加.

证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi) \quad \text{①}$$

[分析] 式 ① 的几何解释, 依题意画出图形 (见图 0-2):

(1) 函数 $y = f(x)$ 的曲线连接点 $F(a, f(a))$ 和 $C(b, f(b))$, 从左向右上升, 且曲线是连续的.

(2) 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积为

$$\int_a^b f(x) dx$$

(3) $f(a)(\xi - a)$ 表示矩形 AGEF 的面积, 而 $f(b)(b - \xi)$ 表示矩形 BCDG 的面积.

(4) 等式 ① 的右边是这两个矩形面积之和, 它是阶梯形 ABCDEF 的面积

$$f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

(5) 若把 ① 式右端的 ξ 改成 x , x 在 $[a, b]$ 中变动, 就得到变动的阶梯形, 其面积为

$$F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$$

在这样的阶梯形中, 当 $x = a$ 时面积最大, 等于 $F(a) = f(b)(b - a)$; 当 $x = b$ 时, 面积最小, 等于 $F(b) = f(a)(b - a)$, 曲边梯形的面积在这两个面积之间, 即

$$F(a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq F(b)$$

(6) 等式 ① 表明: 存在一个阶梯形, 其面积恰好等于该曲边梯形的面积.

从以上图形的解释中, 明确了解决问题的关键在于作一个辅助函数

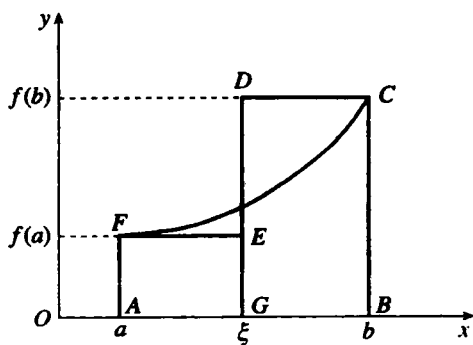


图 0-2

$$F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$$

使 $F(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq F(a)$

又 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 这样, 就能用闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的介值定理.

[证明] 设 $F(x) = f(a)(x - a) + f(b)(b - x)$. 它显然在 $[a, b]$ 上连续, 且由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 单调增加, 所以, 对任意 $x \in [a, b]$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\therefore f(a)(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(b)(b - a)$$

$$\text{即 } F(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq F(a)$$

由闭区间上连续函数的介值定理知: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(\xi) \\ &= f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi) \end{aligned}$$

注意: 在运用以上各策略原则时, 应从具体问题的特点出发, 灵活地结合起来运用, 才能启发我们发现解题线索.

§ 1.2 隐含条件的挖掘

若面临的数学问题较难, 则往往有一些条件隐含在问题中, 这时, 关键在于把隐含在问题中, 解题又需要的条件挖掘出来, 以便解决问题时使用.

下面总结挖掘数学问题中隐含条件, 突破关键问题的方法, 对于提高解题能力, 是很有意义的.

隐含条件可以从以下几方面挖掘.

一、从概念的特征中挖掘

有时, 解题所需要的条件, 要从理解、分析问题所涉及的主要概念的特征中入手来挖掘.

例 1 (1995, 四) 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 若各

向量组的秩分别为

$$r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$$

证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

[分析] 这一问题所涉及的主要概念是向量组的秩:

$r(I) = r(II) = 3$, 表明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组, 因而存在数 l_1, l_2, l_3 , 使:

$$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \quad (1)$$

要证明 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$

只需证, 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$ (2)

则必有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

这可以由 $r(III) = 4$ 推出: 把(1)代入(2)

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4[\alpha_5 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3] = 0$$

即 $(k_1 - k_4l_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4l_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4l_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$

$r(III) = 4$ 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关

$$\therefore k_4 = 0 \quad k_1 - k_4l_1 = k_2 - k_4l_2 = k_3 - k_4l_3 = 0$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关

$$\therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$$

二、从图形特征中挖掘

有时解题所需要的条件, 可以从几何解释的图形特征中挖掘出来.

例2 (1993, 四) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 中有二阶导数, 过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$f''(\xi) = 0$$

[分析] 从 $f(x)$ 所满足的条件知: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 中连续且可导, 只需能在 $(0, 1)$ 中找到两点 η_1 和 η_2 , 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2)$.

就可以在 η_1, η_2 之间找到一点 ξ , 使

$$f''(\xi) = 0$$

可以画出图形看一看(见图 0-3).

(1) 曲线 $y = f(x)$ 连接 $A(0, f(0)), B(1, f(1))$ 且与弦 AB 相交于 $C(c, f(c))$, C 在 A, B 两点之间.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 连续且除 A, B 两端点外, 每一点处都有不平行于 y 轴的切线, 而且切线的斜率 $f'(x)$ 也是可导的.

由拉格朗日中值定理, 在 AC 弧上有一点 $(\eta_1, f(\eta_1))$, 曲线在这一点的切线平行于弦 AB , 在 CB 弧上有一点 $(\eta_2, f(\eta_2))$, 曲线在这点的切线也平行于弦 AB .

弦 AB 的斜率为 $[f(1) - f(0)]$, 即

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = [f(1) - f(0)] \quad (4)$$