Probability theory and Mathematical statistics

概率统计

大专高等数学丛书 3

何仁杰 陈恒瑾编著

南京大学出版社

概率统计

何仁杰　陈恒瑾　编著

（苏）新登字第 011 号

内容简介

本书包括概率论和数理统计的基本概念，基本理论和基本运算，全书共八章：概率的基本概念，随机变量及其分布，二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，数理统计的基本概念，假设检验，方差分析与正交试验设计，一元线性回归分析。力求概念清楚，通俗易懂，基本公式和重要方法的推导顺序渐近比较容易自学。

本书适合作为学时较多的大专教材，也可作为本科简明教材，并可供自学。

概　率　统　计

何仁杰　陈恒瑾 编著

*

南京大学出版社出版发行

（南京大学校内）

南京农业大学第二印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32 印张 5.5 字数 138 千

1993 年 3 月第 1 版　　1993 年 3 月第 1 次印刷

印数 1－3000

ISBN7－305－01994－1/O·100

定价 2.75 元

前　　言

本书作为大专教材，高等数学丛书第三本。

本教材曾 1991 年 1 月以《线性代数与概率统计》为书名由东南大学出版社出版。由于是两门不同的工程数学合并一书，使用中多有不便之处，故在第一版的基础上修改并分成《线性代数》和《概率统计》两本书出版。

这次出版，首先对照国家教委颁发的关于大专教材的指导性文件作为基础，并根据二年多教学实践，并征求兄弟院校意见，作了大幅度修改。增加直方图，大数定律，中心极限定理，方差分析，正交试验设计等等内容，增加一些习题，许多细节也作了大量修改。

为了力求概念清楚，运算方法明确，尽量达到少而精，并适当照顾到内容的完整性，组织教材的系统性，并留有选择余地，可供各专业不同要求组织教学。

本书第一版《线性代数与概率统计》由南京航空学院许有信教授主审，这一次《概率统计》由东南大学韦博成教授主审，对此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中定有许多不妥之处，恳请读者批评指正。

作　　者

1993 年 3 月

目　　录

绪　　言……………………………………………………………… 1
第一章　概率的基本概念……………………………………………… 4
　§1　概率的定义 ………………………………………………… 4
　　1.1　随机事件 ………………………………………………… 4
　　1.2　概率的古典定义 ……………………………………… 5
　　1.3　概率的统计定义 ……………………………………… 7
　§2　概率的运算…………………………………………………… 10

第二章　随机变量及其分布 ………………………………………… 23
　§1　离散型随机变量……………………………………………… 23
　§2　连续型随机变量及其累积分布函数……………………… 36
　§3　连续型随机变量的统计分布……………………………… 46
　§4　随机变量的函数的分布…………………………………… 51

第三章　二维随机变量及其分布 ………………………………… 56
　§1　二维随机变量的基本概念………………………………… 56
　§2　边缘分布……………………………………………………… 59
　§3　二个随机变量的独立性的概念…………………………… 61
　§4　二个连续型随机变量的和的分布………………………… 62

第四章　随机变量的数字特征 …………………………………… 66
　§1　数学期望……………………………………………………… 66

§2　方差……………………………………………………………… 71
§3　二维随机变量的数字特征……………………………………… 76

第五章　数理统计的基本概念 ………………………………… 86
§1　随机样本和统计量……………………………………………… 86
§2　参数的点估计…………………………………………………… 89
*§3　概率统计的基本定理…………………………………………… 92
§4　正态总体统计量的分布………………………………………… 96
§5　参数的区间估计 ……………………………………………… 102

第六章　假设检验……………………………………………… 108
§1　假设检验的基本概念 ………………………………………… 108
§2　正态总体的假设检验 ………………………………………… 110
§3　两个正态总体的假设检验 …………………………………… 113

第七章　方差分析与正交试验设计…………………………… 118
§1　单因素的方差分析 …………………………………………… 118
*§2　正交试验设计 ………………………………………………… 126

第八章　一元线性回归分析…………………………………… 140
§1　一元线性回归分析的基本概念 ……………………………… 140
§2　线性回归方程 ………………………………………………… 142
§3　回归方程的显著性检验 ……………………………………… 147

习题解答……………………………………………………………… 150

常用表格……………………………………………………………… 156

绪　言

概率统计是由概率论和数理统计两个部分组成的，两者有着密切的内在联系，概率论是数理统计的理论基础，而数理统计是概率论的发展和最重要的实际应用。

人们在长期的实践过程中，发现在一定的条件下，有些现象必然会发生。例如一年四季冬冷夏热，月亮的圆缺规律等等，这类现象具有确定的因果关系，称为确定性现象；也有一些现象是不可能发生的，人们用“太阳从西方升起”形容这类事件，这两类现象仅仅作为常识，不属于数学研究的范畴。另有一类现象，在一定条件下，有可能发生，也有可能不发生，如买一张奖卷，有中奖可能，也可能不中奖；篮球比赛时投篮，无论运动员技术高低，总有投中与不进这两种可能。在工厂中生产的每一个产品可能是正品，也可能出现次品与废品。研究这类偶然性现象中是否有一定的规律性，这就促使概率论和数理统计理论的创建和发展。

当然，有许多偶然发生的事件并没有一定的规律性，如地震，火山爆发，两架飞机在空中相撞等，这类自然和社会现象谈不上有多大的规律性，这类偶然事件不是数学研究的对象。

但是，还有许多偶然性事件的发生具有确定的规律性，正如恩格斯所说：“凡表面上看去是偶然性在起作用的地方，其实这种偶然性本身始终是服从于内部的隐藏着的规律的。”（《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》）

最先找到规律性的是等概率事件，投抛一枚硬币，如果这枚硬币是均匀的，那么这两个面向上的机会均等，可以认为这两种情况发生的可能率都是50%，而投抛一颗均匀的骰子，六个面向上的

机会均等，可以认为得到1点到6点的每个机会都是1/6，这不仅是出自人们的主观分析，而且在实践中确实接近这个可能率，例如历史上就有不少人投抛硬币作试验，试验结果证明这个判断是正确的，任意投抛 n 次，两个面向上次数都是接近 $n/2$，为了探讨这类事件发生的可能率，在实践中产生了古典概率论，随着社会和生产的发展，经验的积累和总结，概率论得到了逐步完善。

如果说古典概率的研究年代久远，那么，相对来说数理统计是比较年轻的数学理论，随着生产和科技的发展，开始讨论许多不等概事件，如产品的合格率，运动员的投篮命中率等，都是无法用等概率理论所能推断的。某地区的平均降雨量，年平均温度，炮弹的射程等，这些数字的产生是通过调查、测量、实验，长期记录和资料积累等方法取得，这就是统计的方法，尽管每次统计或实验会有些差异，但是在大量统计材料中平均数通常是比较稳定的，接近于某个常数，这类现象有两个特点，一是有偶然性，即在一定条件下，或一次试验中，可能发生，也可能不发生；二是有必然性，即在大量相同的条件下，或重复多次实验的结果具有一定的统计规律性，具有以上两个特点的现象称为随机现象，概率论和数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门学科。

从概率论和数理统计的产生与发展的历史来看，是科技与生产的需要促使这一数学理论产生与发展。17世纪初，伽利略在物理测量的误差看成随机的以估计其概率。17世纪中叶，巴斯加与费马等研究随机博弈，逐步建立了概率、数学期望等等重要概念及其基本性质与运算法则。但是数理统计尽管是概率论的自然发展与扩充，但长期为概率论学者所忽视，看来究其原因是当时科技与生产还比较低下，还没有对数理统计提出迫切需要的原因。

18世纪成为概率论的全盛发展时期，19世纪40年代后许多学者完成了理论探讨，奠定了现代概率论的基础。许多新的学科在数理统计的基础上发展起来，如里尔的地质学原理，达尔文也在里

尔的著作启发而提出进化论，孟德尔关于豌豆杂交的研究，也是一个数理统计问题。而现代工业中生产中出现大量的随机事件，必须建立可靠的产品质量的检验程序，完善的管理制度，都需要概率统计的科学理论指导，生产与科技的发展，也促使概率统计进一步的发展，产生了许多新的分枝，目前常用的数理统计方法，就在 20 世纪中发展起来的。

第一章　概率的基本概念

§1　概率的定义

1.1　随机事件

随机事件是概率统计的研究对象，必须进一步对此作出讨论。由于随机事件的发生总有几种可能，并且每一种可能发生的比例常常并不相同，概率统计的首要任务是要了解该问题会发生哪些可能，并判断每种可能发生的比例，为此常常要做一些试验，称之为随机试验，简称试验。

例如，弄清某一药品对某种病的治疗效果就要作临床试验，试验结果可以用四个结果表示，一是治愈，二是病情减轻，三是无效，四是有副作用，这药的效果就依据这几种情况发生的比例作出判断。

衡量产品的质量可以用合格品、次品、废品说明，判断一批产品的质量优劣可以通过检验，根据合格品占有的比例作出结论。

不同问题的随机试验方式方法不同，产品检验、调查、测量、实验等都属于随机试验。而试验结果用以下言语说明。

〔**样本空间**〕　某试验结果一切可能发生的情况的总体叫做样本空间，用 Ω 表示。其中每个发生的结果称为是 Ω 的一个元素，而 Ω 就是这些元素的集合。设其中包含 n 个元素用 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 表示。

$$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

当元素总和 n 很大时，用以上方法全部列出是不方便的，通常

这 n 个元素可以归类成为 k 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，样本空间 Ω 可写成

$$\Omega = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$$

这归类是根据需要进行的，归类所得的每个子集称为一个事件。

例 1　投抛（试验）一枚分币，有两种可能，国徽向上或向下，样本空间就包含两个元素。

例 2　投抛（试验）一枚骰子一次，有六种可能，得 1 点到 6 点都是一个基本事件，样本空间可写成

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

样本空间的写法不是唯一的，可根据需要写成不同形式。

设 $A_1 = \{1, 3, 5\}$单数点，　$A_2 = \{2, 4, 6\}$偶数点，

$$\Omega = \{A_1, A_2\}$$

例 3　某有奖储蓄规定 10000 户中设头奖一个，二等奖 2 个，三等奖 100 个，四等奖 5000 个，那么样本空间有 10000 个元素，归类成五个事件：

A_0＝不得奖，A_1＝得头奖，A_2＝得二等奖，A_3＝得三等奖，A_4＝得四等奖。

$$\Omega = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

例 4　一次临床试验，100 名患某种病的病人服同一种药，一个月后有 43 名病人痊愈，32 名病人明显好转，25 名病人维持原状。那么，样本空间包含 100 个元素，归类成三个事件，A_1 包含 43 个元素（痊愈），A_2 包含 32 个元素（好转），A_3 包含 25 个元素（无效）；也可以归类成二个事件，A_1 表示有效，A_2 表示无效。

1.2　概率的古典定义

用通俗的言语表达，概率就是随机事件发生的“可能率”。例如

说某种奖券的“中奖率”为 0.4，就是中奖的概率为 0.4，含义为 10 张奖券中有四张能得奖。

最早探讨的随机事件是等概率事件，设样本空间由 n 个元素构成

$$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

其中任一元素发生的可能性都相同，称为是等概的。

例如，若分币和骰子是均匀的，那么哪一面向上的机会都是相等，而 1 万户有奖储蓄中每一户的机会均等。以上各例都是等概事件，但是例 4 不是等概的，参与临床试验的每个人病情与体质都不同，治疗的效果不可能相同，而且换上另外 100 个人结果也不会相同。

〔**概率的古典定义**〕

定义　如一个样本空间由 n 个等概元素组成，而事件 A 由其中 m 个等概元素组成，那么比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$。即

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所含的元素}}{\Omega\text{中的元素总数}}$$

这个定义又称古典概率

显然，$P(A)$ 具有下列性质，由于 $0\leqslant m\leqslant n$

1. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

2. $P(\Omega)=1$

3. $P(\varnothing)=0$，　$\varnothing$ 为空集，不含元素。

由此定义，1.1 节中三个等概例子中各事件的概率可表成

例 1　设 A_1=国徽向上，A_2=国徽向下

则　$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}=0.5$$

例 2　设 P_i=点 i 向上，　$i=1,2,3,4,5,6$

则　$P(A_i)=1/6$，　$i=1,2,3,4,5,6$

例 3 $P(A_0)=\frac{4897}{10000}=0.4897$ $P(A_1)=\frac{1}{10000}=0.0001$

$P(A_2)=\frac{2}{10000}=0.0002$

$P(A_3)=\frac{100}{10000}=0.01$ $P(A_4)=\frac{5000}{10000}=0.5$

〔古典概率的计算〕

以上一些例子都比较简单，因为 n 和 m 是显然的，不必为计算 n 和 m 费心，但多数问题中需要计算 n 和 m。

例 4 设 100 个零件中混入 10 个次品，问如从中随机地取出两个零件所构成样本空间及其中每个事件的概率。

解 设 A_1＝取得两个正品， A_2＝取得两个次品， A_3＝取得一个正品和一个次品。

$$\Omega=\{A_1, A_2, A_3\}$$

此时样本空间中元素的总和是 100 个中取 2 个的组合，$n=C_{100}^{2}=4950$

A_1 是 90 个正品中取 2 个的组合 $m_1=C_{90}^{2}=4005$

A_2 是 10 个次品中取 2 个的组合 $m_2=C_{10}^{2}=45$

A_3 是 90 个正品中取 1 个在 10 个次品中取一个的组合 $m_3=90\times10=900$

$$P(A_1)=\frac{4005}{4950} \quad P(A_2)=\frac{45}{4950} \quad P(A_3)=\frac{900}{4950}$$

容易验证 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，与 $P(\Omega)=1$ 一致，结果可以作为后文概率运算中加法法则的验证。

1.3 概率的统计定义

古典概率只能解决等概事件的讨论，但在实际问题中经常出现的是不能用等概解释的事件。

度而因人而异；工厂中产品合格率是根据设备的先进程度与工人的技术经验等多因素决定；前文提到的药品对某种病的有效率等都不是等概事件。

非等概事件的概率讨论都通过试验，如投篮记录，产品检验，临床试验等，试验过程又称统计。这样的试验叫随机试验，今后一般称简试验。

通常，非等概率事件的样本空间包含的元素总数较大，很难逐个检查，只能随机选择一部分进行试验，如工厂的产品成千上万而又源源不断地产生，要求精确的判断合格率很不容易，只能随意抽取一个部分（有限个）来测试，称为抽样，这是数理统计的基本方法，本书从第五章后将系统介绍。

非等概事件的概率准确值很难找到，一般用随机试验所得频率作近似值。

〔**频率**〕 若在 N 次试验中，某个事件 A 发生了 M 次，则比值 $\frac{M}{N}$ 称为事件 A 在这 N 次试验中发生的频率，记作 $\omega_N(A)$

$$\omega_N(A)=\frac{M}{N}=\frac{\text{事件 }A\text{ 发生的次数}}{\text{试验次数}}$$

例如抽样 32 个产品后发现 2 个次品，那么频率就是 2/32，这 6.25%就近似地认为是这批产品的次品率（次品发生的概率）。

〔**频率的稳定性**〕

历史上有些人抛硬币作试验，其中四次试验的结果是：

1. 抛 2048 次，正面向上 1061 次，频率 0.518；
2. 抛 4040 次，正面向上 2048 次，频率 0.5069；
3. 抛 12000 次，正面向上 6019 次，频率 0.5019；
4. 抛 24000 次，正面向上 12012 次，频率 0.5005。

从以上四次试验可以看出，试验次数越多，频率越接近 0.5，而这 0.5 正好是均匀分币按等概事件的古典概率，经验证明，任何

一个随机事件 A 在 N 次重复试验中发生的频率 $\omega_N(A)$，随着 N 的增大而在某个确定数值左右波动的幅度就越小，这种性质称为“频率的稳定性”。容易理解，频率所稳定的这个固定值，定量地衡量了事件 A 发生的可能性的大小，并被理解为该事件的概率，记作 $P(A)$。当 N 增大时

$$\frac{M}{N} \to P(A)$$

因此，当某个事件的概率在理论上难以确定时，实用上就将频率作为概率的近似值。

由此，非等概事件的概率通过试验(抽样也是试验的方法之一)用频率近似值代替，试验次数越多(抽样个数越多)，这近似值就越准确，但试验的次数也不可能无穷尽下去，通常是根据要求估计，这估计在本书第六章说明方法(统计中常把研究对象的全体称为总体)。

〔思考题〕

1. 概率的古典定义与统计定义的区别与研究对象有什么不同？

2. 样本空间表示方法是否唯一，如把一副扑克牌作样本空间，可以有多少表示方法？

〔习题 1—1〕

1. 口袋中有大小相同的 5 个白球，3 个红球，2 个黑球，现任意摸出一球，求以下事件的概率：(1)摸到白球；(2)摸到红球；(3)摸到黑球；(4)如摸出一球放回口袋，再摸一球，以上概率有没有改变；(5)如摸出一个白球，不放回去，再摸一球，问此时摸出白球、红球、黑球的概率。

2. 在一副桥牌(52 张)中任意抽出 k 张($k\leqslant 13$)，问：

(1) k 张都是红心的概率；

(2) 抽两张刚好是一红一黑的概率。

3. 10 把形状相同的钥匙，能开某把锁的有两把，问任取 2 把钥匙时下列事件的概率：

(1) 都能打开锁；(2) 内有一把能打开锁；

(3) 两把都打不开锁。

4. 有 3 把类似的锁各配有 2 把钥匙，保管员把它们放乱了，有人领去一把锁，两把钥匙，问：

(1) 两把钥匙都对的概率；

(2) 两把钥匙都错的概率；

(3) 只有一把钥匙对的概率。

5. 两名旅客各交两件行李由旅馆保管，临走时粗心的服务员任意各取两件分送给他们，问正好送对的概率。

6. 两个班均有 30 人参加元旦联欢，每人拿出一张贺年片混放在一个包内，各人任意抽一张，问：

(1) 每个同学刚好把自己的贺年片抽回去的概率；

(2) 每个同学刚好抽到另一班同学的贺年片的概率。

7. 2 套相同的书，每套有上、中、下三册，一个同学在匆忙中拿了三本就走，问正是一套的概率？若是两套不同的书，概率是多少？

8. 某人有两张有奖储蓄中奖，已知有头奖一个，二等奖 10 个，三等奖 50 个，问他中奖的各种情况的概率。

9. 抛两颗均匀的骰子，已知可以得到 2—12 点，问得各点的概率。同时讨论以下情况的概率：(1) 都是 6 点；(2) 点数相同。

10. 运输两种产品，共 $n+m$ 件，运到时损坏两件，求损坏的是不同产品的概率和相同产品的概率。

11. 从 1,2,3,…,10，九个数字中任取两个数，这两个数构成的分数可以约简的概率是多少？

§2 概率的运算

对于某个含 n 个元素的样本空间

$$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

常常可以把这 n 元素归类成若干个独立的基本事件

$$\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$$

而这些独立的基本事件又因问题的需要组成一些较复杂的事件 $A,B,\cdots$。于是，产生了事件与事件的运算。

〔**事件之间的运算**〕

事件与事件间最基本的运算有如下三种：

1. **事件之和**——或是事件 A 发生，或是事件 B 发生的事件（事件 A 与事件 B 同时发生的情况也在内）。记号

$$A+B \text{ 或 } A\cup B$$

推广到 n 个事件之和为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 所包含的全部元素组成的集合，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

2. **事件之积**——事件 A 与事件 B 同时发生的事件，记号

$$AB \text{ 或 } A\cap B$$

推广到 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之积为它们所共同包含的元素组成的集合，记作 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

3. **事件之逆**——发生了属于样本空间 Ω 且不属于事件 A 的事件，称为事件 A 之逆，事件 A 的逆事件记号 $\overline{A}$。即 $A+\overline{A}=\Omega$

例如，在临床试验中事件 A,B,C 分别表示痊愈、好转、无效，则 $A+B$ 表示有效，其逆事件为 $C=\overline{A+B}$表示无效。

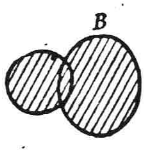

图1－1　$A+B$

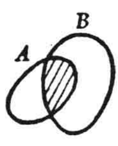

图1－2　AB

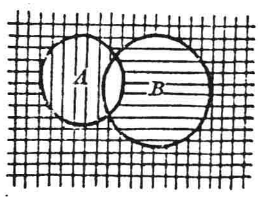

图1－3　$\overline{A+B}$

〔**事件之间的关系**〕

在一样本空间中发生的事件 A 与 B 间通常有以下关系：

1. **包含关系**