

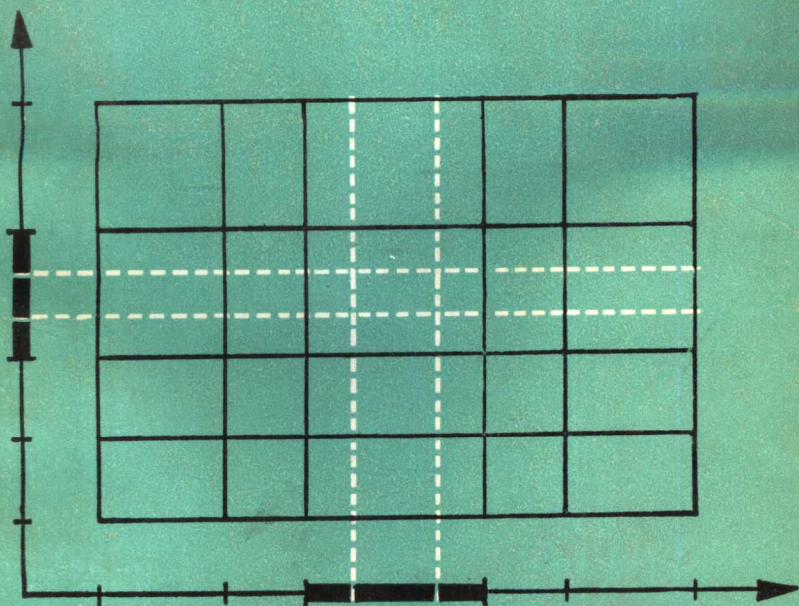
W·托奇克著

实分析基础

第二卷

邓立生 译 雷 垣 校订

6
1



实 分 析 基 础

第 二 卷

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订

人 民 教 育 出 版 社

实 分 析 基 础

第 二 卷

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.75 字数 139,000

1981年7月第1版 1981年2月第1次印刷

印数 00,001—9,000

书号 13012·0493 定价 0.52 元

序

眼前的这本“积分学”是与“微分学”相衔接的。如同那里一样，这里也将一维与多维的情形作了统一的处理，这样就避免了类似结果的重复。这书的各个章节是与微分学合并起来编号的。因而有关 1 至 7 章的引证是指“微分学”的。

如同我在“微分学”中已经提及的，这里我也要感谢为这书的底稿而作了极有裨益的指示的 Maruhn 教授。对于出版社和印刷所所付出的认真劳动我也要致以谢意。

W. Tutschke

柏林/哈勒 于 1970 年春

目 录

引言	1
8. 积分法	3
8.1. Riemann积分	3
8.2. 多维积分化归为一维积分	17
8.3. 一维积分的计算	22
8.4. 一维积分的近似计算	32
9. 可测集与可测集上的积分	46
9.1. Riemann可测集	46
9.2. R 可测集上的积分	54
9.3. 关于 k 维积分的定理	56
9.4. 像集的可测性与像集上的积分	66
9.5. 依赖于参变量的积分	89
10. Stokes-Cartan 定理	97
10.1. 定向·微分形式	97
10.2. 流形与流形上的积分	101
10.3. 微分形式演算中的 Ostrogradski-Gauss 定理	109
10.4. Stokes-Cartan 定理	115
10.5. 闭微分形式	126
10.6. 曲线积分的极限表示	135
11. 流形的测度问题	140
11.1. p 维流形的 p 维测度	140
11.2. 曲线长的极限表示	152
11.3. 流形上的第一类与第二类积分	155
11.4. 矢量分析	159
习题解答	168

引 言

本书以积分概念的论述开始. 如果 f 是定义于 R^k 中的一个区间 Q 上的(连续)函数, 那么我们可以将 Q 的分割对应于下列形式的和 σ : 将 f 在部分区间 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的任意一点 $x_{v_1, \dots, v_k}$ 处的函数值乘以该部分区间的测度 $mQ_{v_1, \dots, v_k}$, 然后就 Q 的这个分割的所有部分区间作出和

$$\sigma_n = \sum_{v_1, \dots, v_k} f(x_{v_1, \dots, v_k}) mQ_{v_1, \dots, v_k}$$

(这里一个区间的测度是它的棱长的乘积). 于是我们可以证明:

考虑一逐步变得更为细密的分割序列, 则相应的和 σ_n 趋于一确定的实数 I . 这个数既不与分割的特殊选择有关, 也不与点 $x_{v_1, \dots, v_k}$ 的选择有关. 我们称数 I 为 f 在 Q 上的积分.

关于积分将首先证明下面两个基本定理:

A. 一 m 维的积分可以化为 m 个一维的积分.

B. 在一维区间 $\{x: a \leq x \leq b\}$ 上将 f 积分, 则得 $F(b) - F(a)$, 于此 F 是 f 的原函数. 这是指 F 是一可微函数, 而它在每个点 x 处的导数 $\frac{dF(x)}{dx}$ 等于 $f(x)$.

这个定理(微积分学的基本定理)建立了积分与微分之间的关系.

积分问题是与下列问题紧密联系的: 我们要使尽可能多的集合(不仅是区间)得以定义其测度. 这个问题将以考虑区间网的方法来解决, 这些区间网一种是完全包含于 M 中的, 而另一种则完全包含了集合 M . 一个(可测)集合的测度于是可以表示为

$f(x)=1$ 在 M 上的 k 维积分. 在所谓柱形集合的情形 (例如球体就是过球心的一个圆域上的柱形集合), 我们可以借助于定理 A 将这测度表示为 $k-1$ 维的积分 (特别由这个方法可以得出用一维积分来表示介于一曲线与 x 轴之间的平面片的测度).

对于积分学的应用下列定理是特别重要的:

C. 如果 $y_1, \dots, y_k$ 空间中的集合 $\tilde{M}$ 是 $x_1, \dots, x_k$ 空间中集合 M 的一一对应的像集 $h(M)$ 并且 f 是在 $\tilde{M}=h(M)$ 上定义的 (连续) 函数, 则

$$\int_{h(M)} f dy_1 \cdots dy_k = \int_M f \left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} \right| dx_1 \cdots dx_k.$$

例如, 当我们要将二维的或三维的积分变换为极坐标时, 就需应用这个公式.

在第 10 章中将论述 Stokes-Cartan 定理. 这个定理表述了在 8.3. 中仅就一维积分而言的微积分学主要定理在多维情形下的推广. 它说明:

D. 如果将一微分形式 ω 在 R^k 的一 $p+1$ 维流形 B 的边缘 ∂B 上作积分, 则其结果与“求过导的”微分形式 $d\omega$ 在流形 B 上的积分是相同的:

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega.$$

于此 p 维积分的被积函数是 p 级的微分形式 (并且它总共确有 p 个符号 dx_j); $d\omega$ 是 $p+1$ 级微分形式.

在第 11 章中将研究下列问题: 一线段可以对应于例如一维的测度 (长度); 然而将这线段看作平面上的点集时, 那么我们也可使它对应于二维的测度. 这测度总是为零的. 类似地, 二维区间的三维测度都是零. 一般地我们可以指明, (在 R^k 中的) p 维流形的容积可以通过一 p 维的测度来度量. 这将在第 11 章中加以定义. 这个定义作为特例包含了曲线弧长之测度与曲面表面积之测度.

8. 积 分 法

如果为了使一物体沿一线段运动距离 s 需要作用常力 K (K 作用的方向为线段的方向), 则由此而作的功为 $A = Ks$. 如果作用的力不是常力, 那么 we 可用下列方法来近似地计算所作的功: 将线段分割为这样小的部分线段 (它们的长为 Δs_i), 使得在这些部分线段上 K 可以按预先指定的精确度用常力 K_i 来代替 (我们可以选择在所考虑的部分线段中某个点处的 K 的值作为 K_i). 从而所作的功就近似地等于 $\sum_i K_i \Delta s_i$.

在积分学中将证明, (在适当的假定下) 随着线段的愈分割愈细, 这个近似和具有一个极限. 此外, 我们还将给出这个极限与近似和之偏差的估值.

8.1. Riemann 积分

在 R^n 中考虑闭区间

$$Q = \{(x_1, \dots, x_k) : a_j \leq x_j \leq b_j, a_j < b_j, j = 1, \dots, k\}.$$

与它对应的测度为

$$mQ = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$$

(区间棱长的乘积). 如果 $x' = (x'_1, \dots, x'_k)$ 与 $x'' = (x''_1, \dots, x''_k)$ 是 Q 的二点, 则由于 $a_j \leq x'_j, x''_j \leq b_j$, 故 $|x''_j - x'_j| \leq b_j - a_j$, 而这二点的距离

$$d(x', x'') \leq \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_k - a_k)^2}.^{(1)}$$

令 $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_k - a_k)^2} = \phi(Q)$, 则 $d(x', x'') \leq \phi(Q), \forall x',$

1) 因为毋须担心引起混淆, 下面我们还是简单地以 $\sqrt{\quad}$ 来表示正根.

$\forall x'' \in Q$. 另一方面至少存在 Q 的一对点, 它们的距离等于 $\phi(Q)$ (即点 $x' = (a_1, \dots, a_k), x'' = (b_1, \dots, b_k)$). 数 $\phi(Q)$ 称为 Q 的直径. 它是 Q 的二点所能取得的最大距离.

Q 的分割: 首先, 将 k 个一维区间的第 i 个区间

$$\{x_i: a_i \leq x_i \leq b_i\}, \quad i=1, \dots, k \quad (1)$$

分割为 l_i 个部分区间 $\{x_i: x_i^{(\nu_i-1)} \leq x_i \leq x_i^{(\nu_i)}\}, \nu_i=1, \dots, l_i (x_i^{(0)}=a_i, x_i^{(\nu_i-1)} < x_i^{(\nu_i)}, x_i^{(l_i)}=b_i)$. 第 ν_i 个部分区间的长为 $\Delta x_i^{(\nu_i)} = x_i^{(\nu_i)} - x_i^{(\nu_i-1)}$. 我们有 $\sum_{\nu_i=1}^{l_i} \Delta x_i^{(\nu_i)} = b_i - a_i$. 通过所有 k 个一维区间 (1)

的这种分割, Q 就分割为 $l_1 \dots l_k$ 个 k 维的部分区间 (参看情形 $k=2$ 时的图 1).

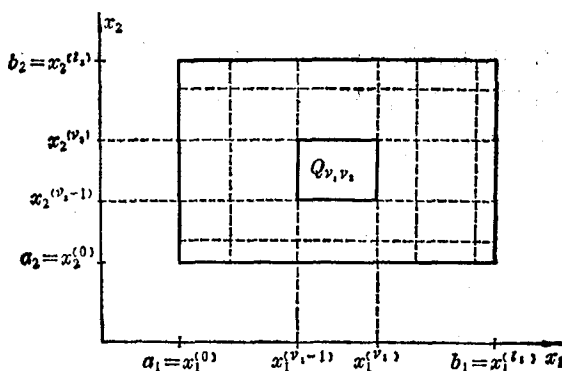


图 1

$$Q_{\nu_1, \dots, \nu_k} = \{(x_1, \dots, x_k): x_i^{(\nu_i-1)} \leq x_i \leq x_i^{(\nu_i)}, \quad i=1, \dots, k\}.$$

$Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}$ 的测度是

$$mQ_{\nu_1, \dots, \nu_k} = \Delta x_1^{(\nu_1)} \dots \Delta x_k^{(\nu_k)}.$$

Q 的全部 k 维部分区间 $Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}$ 的测度的总和当然就是 Q 的测度:

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_k} mQ_{\nu_1, \dots, \nu_k} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_k} \Delta x_1^{(\nu_1)} \dots \Delta x_k^{(\nu_k)}$$

$$= \sum_{v_1} \Delta x_1^{(v_1)} \cdots \sum_{v_k} \Delta x_k^{(v_k)} = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k) \\ = mQ. \quad (2)$$

现在假设在 Q 上定义了一个实值的有界函数 f . 相应于 Q 的一个分割, f 对应于由

$$s = \sum_{v_1, \dots, v_k} \inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k}$$

与由

$$S = \sum_{v_1, \dots, v_k} \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k}$$

所确定的所谓下和与上和 (因为 f 在整个 Q 上是上有界与下有界的, 故在部分区间 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 上也必定如此, 由此就保证了 $\inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f$ 与 $\sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f$ 的存在).

考虑 f 的图形, 就可得出下和与上和的几何意义 (于此假定 $f(x) \geq 0, \forall x$). 例如, 假如 f 是一个实变量的函数, 那么 $\inf f \cdot mQ$ 与 $\sup f \cdot mQ$ 就是图中给出的矩形长条的测度 (参看图 2a). 假如

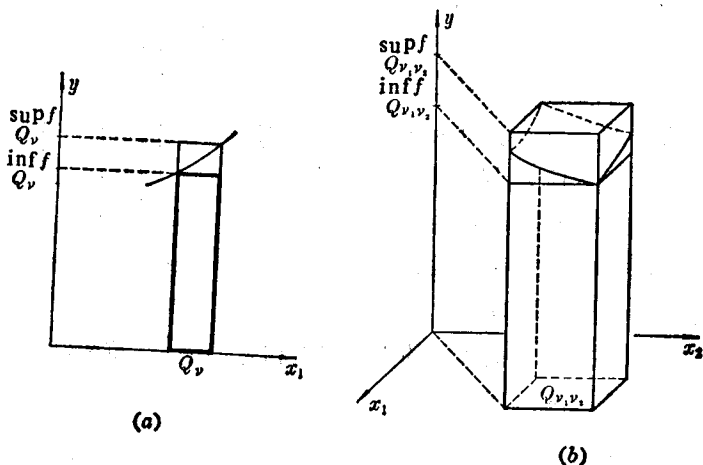


图 2

f 是两个实变量的函数, 那么 $\inf_{Q_{v_1, v_2}} f \cdot mQ_{v_1, v_2}$ 与 $\sup_{Q_{v_1, v_2}} f \cdot mQ_{v_1, v_2}$ 则是方形柱体的测度 (参看图 2b).

下和与上和的性质:

1. 将不等式

$$\inf_Q f \leq \inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \leq \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \leq \sup_Q f$$

乘以 $mQ_{v_1, \dots, v_k}$, 然后对于所有 $v_1, \dots, v_k$ ($v_j = 1, \dots, l_j$) 求和, 于是由 (2) 得

$$\begin{aligned} \inf_Q f \cdot mQ &\leq \sum_{v_1, \dots, v_k} \inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} \\ &\leq \sum_{v_1, \dots, v_k} \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} \\ &\leq \sup_Q f \cdot mQ, \end{aligned} \quad (3)$$

故根据下和与上和的定义有

$$\inf_Q f \cdot mQ \leq s \leq S \leq \sup_Q f \cdot mQ.$$

2. 将 $\{x_i: a_i \leq x_i \leq b_i\}$

的每个部分区间 $\{x_i: x_i^{(v_i-1)} \leq x_i \leq x_i^{(v_i)}\}$ 再进行分割, 于是每个 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 又分割为某些部分区间 $Q_{v_1, \dots, v_k | \mu_1, \dots, \mu_k}$. 将全部 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 作了这种分割之后, 我们就得到 Q 的一个新的分割. 这个分割称为原来的分割的加细 (参看图 3).

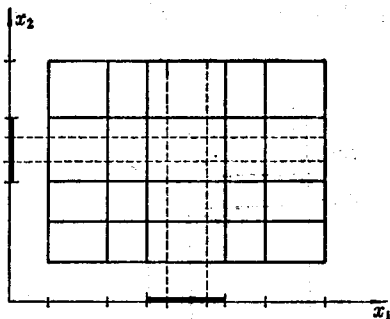


图 3

设相应于分割的加细的下和与上和为 $\tilde{s}$ 与 $\tilde{S}$. 将 (3) 应用于 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的分割, 我们得到

$$\inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} \leq \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \inf_{Q_{v_1, \dots, v_k | \mu_1, \dots, \mu_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k | \mu_1, \dots, \mu_k}$$

$$\leq \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \sup_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k} | \mu_1, \dots, \mu_k} f \cdot mQ_{\nu_1, \dots, \nu_k} \leq \sup_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f \cdot mQ_{\nu_1, \dots, \nu_k}.$$

对于所有 $\nu_1, \dots, \nu_k$ ($\nu_j = 1, \dots, l_j$) 写出这些不等式, 然后将它们相加, 则得

$$s \leq \tilde{s} \leq \tilde{S} \leq S. \quad (4)$$

3. 由一维区间 $\{x_i: a_i \leq x_i \leq b_i\}$ 的两个不同的分割得出 Q 的两个不同的分割. 由 $\{x_i: a_i \leq x_i \leq b_i\}$ 的这二分割的诸分点我们得出 $\{x_i: a_i \leq x_i \leq b_i\}$ 的一个新的分割, 从而也就得出 Q 的一个新的分割. 由于它是原来的两个分割的加细, 它就称为它们的公共的加细 (参看图 4). 如果 s, S 与 s', S' 分别表示 f 相应于原来二分割的下和与上和, 而 $\tilde{s}, \tilde{S}$ 表示 f 相应于它们的公共的加细的下和与上和, 那么由 (4) 有

$$s \leq \tilde{s} \leq \tilde{S} \leq S \text{ 与 } s' \leq \tilde{s} \leq \tilde{S} \leq S'.$$

由此特别得到

$$s \leq S' \text{ 与 } s' \leq S. \quad (5)$$

4. 关于 (5) 的说明: 取定一个分割, 其相应的下和与上和设为 s' 与 S' . 于是由 (5) 对于任意另一下和 s 均有

$$s \leq S'.$$

从而所有下和所成的集合是有上界的. 因此下和所成的集合的上确界存在, 记它为 $\sup s = I_{\text{下}}$. 因而对于每个下和 s 均有 $s \leq I_{\text{下}}$.

类似, 由 (5) 对于所有上和 S 若再固定 s' 则均有

$$s' \leq S.$$

所以上和所成的集合是有下界的, 从而存在 $\inf S = I_{\text{上}}$. 因而对于每个上和 S 均有 $S \geq I_{\text{上}}$.

我们分别称 $I_{\text{下}}$ 与 $I_{\text{上}}$ 为 f 在 Q 上的下积分与上积分.

如果我们使 s 遍取所有下和各值, 那么由 $s \leq S'$ 即得 $I_{\text{下}} = \sup s \leq S'$. 由此令 S' 遍取所有上和各值, 即得 $I_{\text{下}} \leq \inf S' = I_{\text{上}}$. 因此对于任意下和 s 与上和 S 均有

$$s \leq I_{\overline{f}} \leq I_{\underline{f}} \leq S. \quad (6)$$

定义. 如果 $I_{\overline{f}} = I_{\underline{f}}$, 则称 f 在 Q 上是 Riemann 可积的. 于是 $I_{\overline{f}}$ 与 $I_{\underline{f}}$ 的公共值 I 称为 f 在 Q 上的 Riemann 积分 (R 积分). 函数 f 称为被积函数.

由于 $mQ_{v_1, \dots, v_k} = \Delta x_1^{(v_1)} \cdots \Delta x_k^{(v_k)}$, 故

$$s = \sum_{v_1, \dots, v_k} \inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot \Delta x_1^{(v_1)} \cdots \Delta x_k^{(v_k)},$$

$$S = \sum_{v_1, \dots, v_k} \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot \Delta x_1^{(v_1)} \cdots \Delta x_k^{(v_k)}.$$

下和与上和的这个形式引出了表示 I 的下列符号写法:

$$\begin{aligned} I &= \int_Q f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k = \iint_Q \cdots \int f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_Q f(x) dx = \int_Q f dx. \end{aligned}$$

如果 $Q = \{x: a \leq x \leq b\}$ (一维区间), 则替代 $\int_Q f(x) dx$ 我们也写成 $\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

下面我们假定 f 在 Q 上是连续的. 因为 Q 是紧致的, 于是 f 也是一致连续的 (参看 4.3.). 即有

给定 $\varepsilon > 0 \implies \exists \delta_\varepsilon > 0: |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall x_1, \forall x_2, d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon$.

定理 1. 如果 Q 的一个分割的所有 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}} \delta_\varepsilon$, 则相应于这个分割的下和与上和适合:

$$S - s < \varepsilon \cdot mQ.$$

注意. 如果 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的棱长小于 $\frac{1}{\sqrt{k}} \delta_\varepsilon$, 则 $\phi(Q_{v_1, \dots, v_k}) < \delta_\varepsilon$. 因为对于 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的任意二点 $x' = (x'_1, \dots, x'_k)$ 与 $x'' = (x''_1, \dots, x''_k)$ 就有

$$d(x', x'') = \sqrt{\sum_i (x''_i - x'_i)^2} < \sqrt{k \cdot \frac{1}{k} \delta_\varepsilon^2} = \delta_\varepsilon.$$

定理 1 的证明. 根据 4.2. 的定理在 $Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}$ 中存在点 x_* 与 x_{**} , 使得 $f(x_*) = \sup_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f$ 与 $f(x_{**}) = \inf_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f$. 由上面所提注意的证

明我们有 $d(x_*, x_{**}) < \delta_i$, 所以 $|f(x_*) - f(x_{**})| < \varepsilon$, 从而

$$\sup_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f - \inf_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f < \varepsilon.$$

现在

$$S - s = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_k} (\sup_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f - \inf_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} f) m_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}},$$

故

$$S - s < \varepsilon \sum_{\nu_1, \dots, \nu_k} m_{Q_{\nu_1, \dots, \nu_k}} = \varepsilon \cdot m_Q.$$

证完.

推论 1. f 在 Q 上连续 $\Rightarrow f$ 在 Q 上 R 可积.¹⁾

1) 还存在 Riemann 可积的不连续函数. 例如, 每个在区间 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上定义的实值单调增(或减)函数就是 R 可积的. 因为, 将 I 划分为 n 个等长的部分区间

$$Q_\nu = \left\{ x: a + (\nu-1) \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + \nu \frac{b-a}{n} \right\}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

那么(设 f 是单调的) $\inf_{Q_\nu} f$ 与 $\sup_{Q_\nu} f$ 就分别等于 f 在 Q_ν 的起点与终点处的函数值:

$$\inf_{Q_\nu} f = f\left(a + (\nu-1) \frac{b-a}{n}\right), \quad \sup_{Q_\nu} f = f\left(a + \nu \frac{b-a}{n}\right).$$

因而相应的下和与上和是

$$s = \sum_{\nu=1}^n f\left(a + (\nu-1) \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n},$$

$$S = \sum_{\nu=1}^n f\left(a + \nu \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n},$$

故

$$S - s = f(b) \frac{b-a}{n} - f(a) \frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n}.$$

这表示: 当 n 选择得充分大时, 则 $S - s$ 就可变得任意地小. 假如 f 不是 R 可积的, 则 $I_+ - I_- = d > 0$. 然而由于(6), 则也有 $S - s > d$; 因而 $S - s$ 就不可能变得任意地小.

这个例子指出, 存在 R 可积的不连续函数, 然而下面我们仅只积分连续的函数(应用 Lebesgue 积分来作某些不连续函数的积分是最为适宜的, 然而对于这种积分这里不拟论及).

证明. 设给出了 $\varepsilon > 0$. 于是对于其所有部分区间 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta$. 的每一种分割便有 $S - s < \varepsilon \cdot mQ$. 由 (6) 得 $I_+ - I_- \leq S - s$. 故 $I_+ - I_- \leq \varepsilon \cdot mQ$. 由于 $\varepsilon > 0$ 可任意选择, 故必 $I_+ - I_- = 0$. 证完.

还是假定 f 在 Q 上定义并且连续. 对于 Q 的每个分割, 它的所有 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 的棱长均小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta$. 者, 推论 2 成立:

推论 2. 在定理 1 的假定下有

$$\left| \int_Q f(x) dx - \sum_{v_1, \dots, v_k} f(x_{v_1, \dots, v_k}) mQ_{v_1, \dots, v_k} \right| < \varepsilon \cdot mQ,$$

于此 $x_{v_1, \dots, v_k}$ 是 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 中任意选择的一点 (参看图 5).

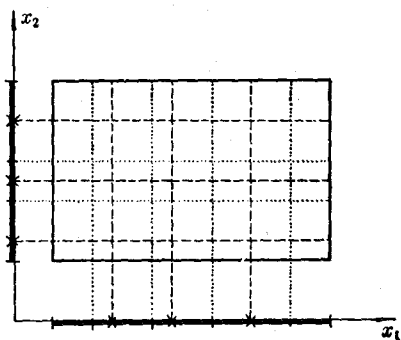


图 4

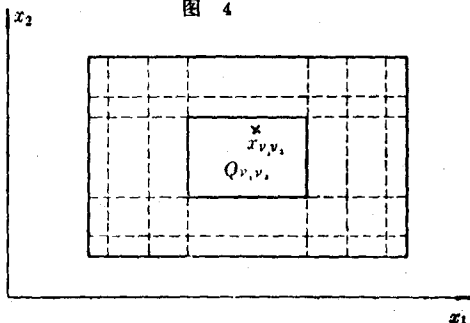


图 5

证明. 我们有

$$\inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \leq f(x_{v_1, \dots, v_k}) \leq \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f,$$

故

$$\inf_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} \leq f(x_{v_1, \dots, v_k}) \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} \leq \sup_{Q_{v_1, \dots, v_k}} f \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k}.$$

对于所有 $v_1, \dots, v_k$ ($v_j = 1, \dots, l_j$) 来求和并令

$$\sum_{v_1, \dots, v_k} f(x_{v_1, \dots, v_k}) \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k} = \sigma,$$

则由最后一个不等式得

$$s \leq \sigma \leq S. \quad (7)$$

根据推论 1 有 $I_F = I_\pm = I$. 因而(6)就呈形式

$$s \leq I \leq S. \quad (8)$$

由(7)与(8)得

$$|I - \sigma| \leq S - s.$$

因而根据定理 1 有 $|I - \sigma| \leq S - s < \varepsilon \cdot mQ$. 证完.

定义. 量

$$\sigma = \sum_{v_1, \dots, v_k} f(x_{v_1, \dots, v_k}) \cdot mQ_{v_1, \dots, v_k}$$

称为相应于所考虑的分割的近似和.¹⁾

定义. 一个由分割所组成的序列称做是优越的分割序列, 如果它满足:

若 λ_n 是第 n 次分割的诸部分区间 $Q_{v_1, \dots, v_k}^{(n)}$ 的最大棱长, 则 $\lambda_n \rightarrow 0$.

例 1. 若是我们将一区间的所有的棱逐次地二等分, 我们就得一个优越的分割序列(正规分割序列, 参看图 6).

推论 3. 设已给一个优越的分割序列, 而 σ_n 是相应于第 n 次

1) 近似和的值是与 $Q_{v_1, \dots, v_k}$ 中点 $x_{v_1, \dots, v_k}$ 的选择有关的.

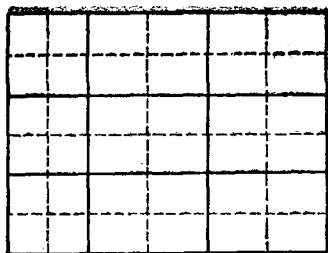


图 6

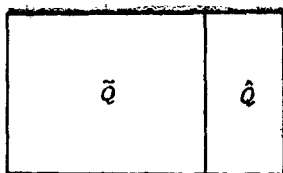


图 7

分割的近似和, 则

$$\sigma_n \rightarrow I.$$

证明. 设给定了 $\varepsilon > 0$. 对此(由于一致连续性)对应地有 $\delta_.$. 由于已给的分割序列是优越的, 故存在一个 N , 使得对于 $n \geq N$, 则相应的分割的所有部分区间的棱长都小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}\delta_.$. 因而根据推论 2 有

$$|I - \sigma_n| < \varepsilon \cdot mQ, \forall n \geq N.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意选择, 故 $\sigma_n \rightarrow I$. 证完.

假设区间 Q 剖分为二部分区间 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$ (参看图 7).¹⁾ 假定 f 在 Q 上定义并且连续. 于是有

推论 4. 下式成立:

$$\int_Q f(x) dx = \int_{\tilde{Q}} f(x) dx + \int_{\hat{Q}} f(x) dx.$$

证明. 考虑 Q 的如下的优越分割序列: 将 Q 剖分为 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$, 构成 Q 的第一次分割. Q 的进一步的分割则由 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$ 的逐次正规分割来求得(因而 $\tilde{Q}$ 与 $\hat{Q}$ 的第 $n-1$ 次正规分割合起来就给出 Q 的第 n 次分割).

因此对于相应于 Q 的第 n 次分割的近似和 σ_n 成立

1) 相应的开区间不具有公共点.