数学（下）

主编 刘保平

武汉大学出版社

新编全国中职教育规划教材

数学（下）

主　编　刘保平
　　　　焦传魁
副主编　张西良

武汉大学出版社

前　　言

为贯彻国务院《关于大力推进职业教育改革与发展的决定》的精神，实现大力发展职业教育，服务经济社会发展的目标，我们编写了这套《数学》教材，供三年制中等职业学校试用。

这套《数学》教材在编写时，注意到了以下几点：

1. 与九年制义务教育三年制初中数学相衔接；

2. 精选传统的初等数学内容，知识面适当拓宽；

3. 从学生的实际出发，降低知识起点，简化论证过程，注重基础，讲究实用，努力做到生动有趣，通俗易懂；

4. 充实与从事幼儿教育工作有联系的教学内容和例题、习题；

5. 每章末附有阅读材料，供学生课外阅读，借以激发学生学习的兴趣。

这套《数学》教材共分上、下两册，本书为下册，内容包括简易逻辑、不等式、向量、直线、圆锥曲线、极限等六章。本书由刘保平老师、焦传魁老师主编，张西良老师副主编。商丘幼儿师范学校刘保平老师撰写了第八、九、十章，商丘幼儿师范学校焦传魁老师撰写了第十一、十二、十三章。

由于编者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免存在一些错误和不足之处，真诚欢迎使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

编　者

2013 年 5 月

目　录

第8章

简易逻辑

8.1 逻辑连接词

在七年级我们学习过命题，知道命题是可以判断真假的语句，并把判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题. 看下面的语句：

(1)等式两边加上同一个数，结果仍是等式.

(2)$12<3$.

(3)对顶角相等.

(4)$x+3=5$.

(5)17是质数吗?

(6)求证$\sqrt{2}$是无理数.

(7)20可以被2或3整除.

(8)矩形的对角线相等且互相平分.

(9)5非整数.

前三个语句是命题，而且容易判定真假，(1)、(3)是真命题，(2)是假命题. 中间三个语句不是命题，(4)不能判断真假，(5)、(6)不涉及真假. 后三个是较为复杂的命题，在命题中分别含有连接词“或”、“且”、“非”. 我们把“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑连接词. 把(1)、(2)、(3)这样不含逻辑连接词的命题叫做简单命题；像(7)、(8)、(9)这样的命题，它们由简单命题与逻辑连接词构成，叫做复合命题.

我们常用小写的拉丁字母 $p,q,r,s,\cdots$ 表示命题，这样，复合命题(7)的构成形式是“p 或 q”，其中：

p：20可以被2整除，是真命题，q：20可以被3整除，是假命题，所以命题(7)是真命题.

复合命题(8)的构成形式是“p 且 q”，其中，p：矩形的对角线相等，是真命题，q：矩形的对角线互相平分，是真命题，所以命题(8)是真命题.

复合命题(9)的构成形式是“非 p”，其中，p：5是整数，是真命题，所以命题(9)是假命题.

一般地，用“或”把命题 p 和命题 q 连接起来得到的复合命题，其构成形式是“p 或 q”. “或”的含义与并集 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 中“或”的含义是一致的，当 p、q 至少有一个为真命题时，p 或 q 为真命题；只有当 p、q 都为假命题时，p 或 q 为假命题.

用“且”把命题 p 和命题 q 连接起来得到的复合命题，其构成形式是“p 且 q”. “且”的含义与交集 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 中“且”的含义是一致的. 当 p、q 都为真命题时，p 且

q 为真命题;当 p、q 至少有一个为假命题时,p 且 q 为假命题.

"非"是否定的意思,对一个命题 p 的结论进行否定得到的复合命题,其构成形式是"非 p". 当 p 为真命题时,非 p 为假命题;当 p 为假命题时,非 p 为真命题.

例 8.1 指出下列复合命题的形式及其构成:

(1)12 是 48 与 36 的公约数.

(2)方程 $x^2+1=0$ 没有实根.

(3)10 或 15 是 5 的倍数.

(4)有两个角为 45°的三角形是等腰直角三角形.

【解】 (1)是"p 且 q"形式,其中,p:12 是 48 的约数;q:12 是 36 的约数.

(2)是"非 p"形式,其中,p:方程 $x^2+1=0$ 有实根.

(3)是"p 或 q"形式,其中,p:10 是 5 的倍数;q:15 是 5 的倍数.

(4)是"p 且 q"形式,其中,p:有两个角为 45°的三角形是等腰三角形;q:有两个角为 45°的三角形是直角三角形.

例 8.2 分别写出由下列命题构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题.

(1)p:π 是无理数,q:e 不是无理数.

(2)p:三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和,q:三角形的外角大于与它不相邻的任何一个内角.

解:(1)"p 或 q":π 是无理数或 e 不是无理数.

"P 且 q":π 是无理数且 e 不是无理数.

"非 p": π 不是无理数.

(2)"p 或 q":三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和或大于与它不相邻的任何一个内角.

"P 且 q":三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和且大于与它不相邻的任何一个内角.

"非 p":三角形的外角不等于与它不相邻的两个内角的和.

例 8.3 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q"、"P 且 q"、"非 p"形式的复合命题的真假.

(1)p:$2+3=6$, q:$5>4$.

(2)p:9 是质数,q:8 是 12 的约数.

(3)p:$1\in\{1,2\}$,q:$\{1\}\subseteq\{1,2\}$.

【解】 (1)因为 p 假 q 真,所以"p 或 q"为真,"p 且 q"为假,"非 p"为真.

(2)因为 p 假 q 假,所以"p 或 q"为假,"p 且 q"为假,"非 p"为真.

(3)因为 p 真 q 真,所以"p 或 q"为真,"p 且 q"为真,"非 p"为假.

例 8.4 命题"$5\geqslant2$"是简单命题还是复合命题,若是复合命题,请指出它的构成形式并判断真假.

解:"$5\geqslant2$"是"p 或 q"形式的复合命题,其中,p:$5>2$ q:$5=2$

因为 p 真 q 假,所以"$5\geqslant2$"是真命题.

习题 8.1

1. 判断下列语句是否为命题,若是,判断其真假.

(1)同位角相等.

(2)一个正整数不是质数就是合数.

(3)空集是任何非空集合的真子集.

(4)画线段 $AB=CD$.

(5)吸烟有害健康.

(6)这件衣服真好看!

(7)二次函数的图像是抛物线吗?

2. 指出下列命题是简单命题还是复合命题,若是复合命题,写出构成它的简单命题.

(1)平行线不相交.

(2)24 既是 8 的倍数,也是 6 的倍数.

(3)三角形的内角和等于 $180°$.

(4)如果 $xy<0$,则点 $P(x,y)$在第二、四象限.

3. 分别写出由下列命题构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题.

(1)p:正方形的四条边相等,q:正方形的四个角相等.

(2)p:$2>3$,q:$8+7\neq15$.

(3)p:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根符号不同,q:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根绝对值不同.

4. 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q"、"P 且 q"、"非 p"形式的复合命题的真假.

(1)p:集合中元素是确定的,q:集合中元素是互异的.

(2)p:2 是偶数,q:2 不是质数.

(3)p:梯形有一组对边平行,q:梯形有一组对边相等.

5. 判断下列命题的真假.

(1)$2\leqslant2$.

(2)方程 $x^2-3x-4=0$ 的判别式大于或等于 0.

8.2 四种命题

我们知道,命题由条件(题设)和结论两部分组成.条件是已知事项,结论是由已知事项推出的事项.如命题"对顶角相等",条件是"两个角是对顶角",结论是"这两个角相等".

命题常可以写成"如果……那么……"或"若……则……"的形式,如上面命题可以改写成"若两个角是对顶角,则这两个角相等".

看下面四个命题:

(1)两直线平行,同位角相等.

(2)同位角相等,两直线平行.

(3)两直线不平行,同位角不相等.

(4)同位角不相等,两直线不平行.

在命题(1)与命题(2)中,一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,这样的两个命题为互逆命题.如果把其中一个命题叫做原命题,则另一个叫做原命题的逆命题.命题(3)与命题(4)也是互逆命题.

在命题(1)与命题(3)中,一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定,这样的两个命题为互否命题.把其中一个命题叫做原命题,则另一个叫做原命题的否命题.命题(2)与命题(4)也是互否命题.

在命题(1)与命题(4)中,一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定,这样的两个命题互为逆否命题.把其中一个命题叫做原命题,则另一个叫做原命题的逆否命题.命题(2)与命题(3)也是互为逆否命题.

具体地说,设命题(1)为原命题,则:命题(2)为逆命题,命题(3)为否命题,命题(4)为逆否命题.

这就是命题的四种形式.

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

原命题:若 p 则 q,

逆命题:若 q 则 p,

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$,

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

它们之间的相互关系,如图 8-1 所示.

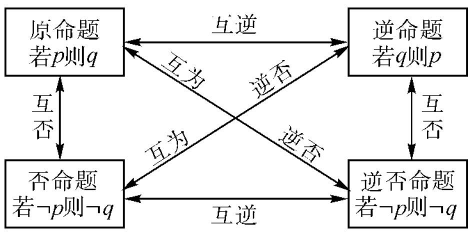

图 8-1

例 8.5 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式,并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

(1)实数的平方是非负数.

(2)末位是 0 的整数,能被 5 整除.

【解】 (1)原命题可以改写成:若一个数是实数,则它的平方是非负数.

逆命题:若一个数的平方是非负数,则这个数是实数.

否命题:若一个数不是实数,则它的平方是负数.

逆否命题:若一个数的平方是负数,则这个数不是实数.

(2)原命题可以改写成:若一个整数的末位是 0,则它能被 5 整除.

逆命题：若一个整数能被 5 整除，则它的末位是 0.

否命题：若一个整数的末位不是 0，则它不能被 5 整除.

逆否命题：若一个整数不能被 5 整除，则它的末位不是 0.

当两个命题互为逆否命题时，它们的真假之间有如下关系：

互为逆否的两个命题一定同为真或同为假，称它们是等价命题.

例如，原命题“若 $a=0$，则 $ab=0$”是真命题，它的逆否命题“若 $ab\neq0$，则 $a\neq0$”是真命题. 再如，原命题“菱形的对角线相等”是假命题，它的逆否命题“对角线不相等的四边形不是菱形”也是假命题.

说明：两个互逆命题不一定同真同假，两个互否命题不一定同真同假. 即原命题为真，它的逆命题不一定为真，它的否命题也不一定为真. 如原命题“若 $a=0$，则 $ab=0$”是真命题，它的逆命题“若 $ab=0$，则 $a=0$”是假命题，它的否命题“若 $a\neq0$，则 $ab\neq0$”是假命题.

例 8.6 设原命题为“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”，写出它的逆命题、否命题与逆否命题，并分别判断它们的真假.

解：逆命题：若 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$. 是假命题.

否命题：若 $m\leqslant0$，则 $x^2+x-m=0$ 没有实数根. 是假命题.

逆否命题：若 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 $m\leqslant0$. 是真命题.

习题 8.2

1. 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

(1)线段的垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

(2)到圆心的距离不等于半径的直线不是圆的切线.

(3)当 $a>0$ 时，函数 $y=ax+b$ 的值随 x 的增大而增大.

(4)等边三角形的三个内角相等.

(5)当 $x^2-2x-3=0$ 时，$x=3$ 或 $x=-1$.

(6)相切两圆的连心线经过切点.

2. 写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并分别判断它们的真假.

(1)全等三角形一定是相似三角形.

(2)若 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

(3)若 $x^2+y^2=0$，则 x、y 全为 0.

(4)$\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C=90^\circ$，那么 $c^2=a^2+b^2$.

(5)若 $a+5$ 是无理数，则 a 是无理数.

(6)若四边形的对角互补，则该四边形是圆的内接四边形.

8.3 充分条件与必要条件

上节我们讨论了“若 p 则 q”形式的命题，知道有的命题为真，有的命题为假. 当“若 p 则 q”为真时，我们记作 $p\Rightarrow q$，或者 $q\Leftarrow p$，意即由 p 成立可以推出 q 也成立；当“若 p 则 q”为假

时，记作 $p \nRightarrow q$，表示由 p 推不出 q.

例如，"若 $a \in \mathbf{Z}$，则 $a \in \mathbf{R}$"是真命题，可写成 $a \in \mathbf{Z} \Rightarrow a \in \mathbf{R}$

"若 $a \in \mathbf{R}$，则 $a \in \mathbf{Z}$"是假命题，可记为 $a \in \mathbf{R} \nRightarrow a \in \mathbf{Z}$

一般地，如果 $p \Rightarrow q$，我们既称 p 是 q 的充分条件，又称 q 是 p 的必要条件.

p 是 q 的充分条件，着眼点是 q，要使它(q)成立，具备条件 p 就足够了(充分).

q 是 p 的必要条件，着眼点是 p，要使它(p)成立，条件 q 必须具备(必要)；如果 q 不成立，p 一定不成立.

比如，$x=y \Rightarrow x^2=y^2$

这既可以理解为"$x=y$"可以保证"$x^2=y^2$"成立("$x=y$"是 $x^2=y^2$ 的充分条件)，又可以理解为要使"$x=y$"成立，"$x^2=y^2$"必须具备("$x^2=y^2$"是"$x=y$"的必要条件).

当 $p \nRightarrow q$，我们说 p 是 q 的不充分条件，q 是 p 的不必要条件.

例 8.7 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件？q 是 p 的什么条件？

(1)p：$x^2>0$； q：$x>0$.

(2)p：两直线平行； q：内错角相等.

【解】 (1)因为 $x^2>0 \nRightarrow x>0$，即 $p \nRightarrow q$

所以 p 是 q 的不充分条件，q 是 p 的不必要条件.

反过来，因为 $x>0 \Rightarrow x^2>0$，即 $q \Rightarrow p$

所以 q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

(2)因为两直线平行⇒内错角相等，即 $p \Rightarrow q$

所以 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

反过来，因为内错角相等⇒两直线平行，即 $q \Rightarrow p$

所以 q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

在例 8.7(2)中，"两直线平行"既是"内错角相等"的充分条件，又是"内错角相等"的必要条件，我们说"两直线平行"是"内错角相等"的充分必要条件，简称充要条件.

一般地，如果既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作 $p \Leftrightarrow q$

这时我们称 p 是 q 的充分必要条件，简称 p 是 q 的充要条件.

对于例 8.7(1)中的"$x^2>0$"与"$x>0$"，我们说"$x^2>0$"是"$x>0$"的必要不充分条件."$x>0$"是"$x^2>0$"的充分不必要条件.

一般地，就 p 和 q 之间的因果关系而言，有下列四种情况：

$p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，p 是 q 的充要条件；

$p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，p 是 q 的充分而不必要条件；

$p \nRightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，p 是 q 的必要而不充分条件；

$p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，p 是 q 的既不充分也不必要条件.

例 8.8 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件？

(1)p：$a>b$；q：$ac^2>bc^2$.

(2)p：三角形的三条边相等；q：三角形的三个角相等.

(3)p：$x \leqslant 5$；q：$x>2$.

(4)p：两个角是对顶角；q：两个角相等.

【解】 (1)$a>b \nRightarrow ac^2>bc^2$

$ac^2>bc^2 \Rightarrow a>b$

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

(2)三角形的三条边相等⇔三角形的三个角相等

所以 p 是 q 充要条件.

(3)$x \leqslant 5 \nRightarrow x>2$

$x>2 \nRightarrow x \leqslant 5$;

p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(4)两个角是对顶角$\nRightarrow$两个角相等

两个角相等$\nRightarrow$ 两个角是对顶角

所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

习题 8.3

1.举例说明:

(1)p 是 q 的充要条件;

(2)p 是 q 的充分而不必要条件;

(3)p 是 q 的必要而不充分条件;

(4)p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2.用适当的符号(⇒、$\nRightarrow$ 、⇔)填空:

(1)$x<4$ ____ $x<3$

(2)两个三角形相似____两个三角形面积相等

(3)$x-1=0$ ____ $x^2-1=0$

(4)四边形的四边相等____四边形是菱形

3.指出下列各组命题中,p 是 q 的什么条件(在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种)?

(1)p:$(x-2)(x-3)=0$, q:$(x-3)=0$.

(2)p:x 是无理数, q:x^2 是无理数.

(3)p:$x=-3$, q:$x^2=9$.

(4)p:$a<0$, q:方程 $ax^2+1=0$ 有一个负实根.

8.4 全称量词与存在量词

看下面几个命题:

(1)对所有的 $x \in \mathbf{R}$,$x>3$.

(2)对任意一个 $x \in \mathbf{Z}$,$2x+1$ 是整数.

(3)存在一个 $x \in \mathbf{R}$,使 $2x+1=3$.

(4)至少有一个 $x \in \mathbf{Z}$,x 能被 2 和 3 整除.

上面每个命题中都出现了表示数量的量词.短语“对所有的”、“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词.含有全称量词的命题,叫做全称命题.

常用的全称量词还有“对一切”、“对每一个”、“任给”、“所有的”等.

短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词.含有存在量词的命题,叫做特称命题,也叫存在性命题.

常见的存在量词还有“有些”、“有一个”、“对某个”、“有的”等.

例如,命题:

对任意的 $n\in\mathbf{Z}$,$2n+1$ 是奇数.

所有的正方形都是菱形.

这些都是全称命题.

又如,命题:

有的四边形是菱形.

有一个质数不是奇数.

这些都是特称命题.

例 8.9 判断下列命题是全称命题还是特称命题:

(1)至少有一个整数,它既能被 2 整除,又能被 5 整除.

(2)每个二次函数的图像都与 x 轴相交.

(3)有的实数是无限不循环小数.

(4)负数的平方是正数.

【解】 (1)中含有存在量词“至少有一个”,所以是特称命题.

(2)中含有全称量词“每个”,所以是全称命题.

(3)中含有存在量词“有的”,所以是特称命题.

(4)中省略了全称量词“都”,所以是全称命题.

例 8.10 判断下列全称命题和特称命题的真假:

(1)每个集合都有子集.

(2)任何实数都有算术平方根.

(3)存在无理数 x,x^2 也是无理数.

(4)有一个实数 x,使 $x^2+2x+3=0$.

解:(1)因为空集是任何集合的子集,所以全称命题“每个集合都有子集”是真命题.

(2)-4 是实数,但它没有平方根,所以全称命题“任何实数都有算术平方根”是假命题.

(3)$\sqrt[4]{2}$是无理数,$(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt[2]{2}$也是无理数,所以特称命题“存在无理数 x,x^2 也是无理数”是真命题.

(4)由于 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$,因此使 $x^2+2x+3=0$ 成立的实数 x 不存在.所以特称命题“有一个实数 x,使 $x^2+2x+3=0$”是假命题.

例 8.11 写出下列全称命题和特称命题的否定:

(1)对每一个实数 x,$x^2+x+1>0$.

(2)所有正方形都是矩形.

(3)存在整数 x、y,使 $3x-2y=10$.

(4)有的三角形是正三角形.

解:(1)是全称命题,它的否定是"并非对每一个实数 x,$x^2+x+1>0$",也就是说,命题(1)的否定是:

存在一个实数 x,$x^2+x+1\leqslant 0$.

(2)是全称命题,它的否定是"并非所有正方形都是矩形",也就是说,命题(2)的否定是:

存在一个正方形不是矩形.

(3)是特称命题,它的否定是"不存在整数 x、y,使 $3x-2y=10$",也就是说,命题(3)的否定是:

对所有整数 x、y,$3x-2y\neq 10$.

(4)是特称命题,它的否定是"没有三角形是正三角形",也就是说,命题(4)的否定是

每一个三角形都不是正三角形.

一般地,对于含有一个量词的命题的否定,有下面的结论:

全称命题的否定是特称命题,特称命题的否定是全称命题.

习题 8.4

1.判断下列命题是全称命题还是特称命题:

(1)所有末位数字是 0 或 5 的整数都能被 5 整除.

(2)每一个非负数的平方都是正数.

(3)存在一个三角形,它的内角和大于 $180°$.

(4)某些梯形的对角线互相平分.

2.判断下列全称命题的真假:

(1)所有的质数都是奇数.

(2)每一个四边形的四个顶点共圆.

(3)对任意整数 x,x^2 的个位数字不等于 3.

(4)线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

3.判断下列特称命题的真假:

(1)有些整数只有两个正因数.

(2)至少有一个整数,它既不是合数,也不是质数.

(3)存在实数 x,$x^2+x+1\leqslant 0$.

(4)有的四边形没有外接圆.

4.写出下列命题的否定:

(1)对所有整数 x,$x^3>x^2$.

(2)存在一个四边形,它的对角线互相垂直.

(3)有一个质数含三个正因数.

(4)任何能被 3 整除的整数都是奇数.

本章复习

本章简易逻辑主要介绍了逻辑连接词“或”“且”“非”、四种命题、充要条件、全称量词与存在量词.

1.逻辑连接词:“或”“且”“非”这些词叫做逻辑连接词.

简单命题:不含逻辑连接词的命题.

复合命题:由简单命题与逻辑连接词构成的命题.

复合命题“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”的真假性与 p、q 真假性之间的关系为:

当“p 真 q 真”、“p 真 q 假”、“p 假 q 真”时,“p 或 q”为真;当“p 假 q 假”时,“p 或 q”为假.

当“p 真 q 真”时,“p 且 q”为真;当“p 真 q 假”、“p 假 q 真”、“p 假 q 假”时,“p 且 q”为假.

p 真“非 p”假,p 假“非 p”真.

2.命题有四种形式,把形如“若 p 则 q”的命题的条件和结论作一些变换,就可以得到它的逆命题、否命题和逆否命题:

逆命题:若 q 则 p;

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

一个命题与它的逆否命题是等价的,真假性相同.

3.如果已知 $p \Rightarrow q$,那么就说 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

如果 $p \Leftrightarrow q$,就说 p 是 q 的充要条件.

4.命题中的“对所有”、“任意一个”等短语叫做全称量词,“存在”、“至少有一个”等短语叫做存在量词,含有全称量词的命题叫做全称命题,含有存在量词的命题叫做特称命题.

从命题形式上看,全称命题的否定是特称命题,特称命题的否定是全称命题.因此,我们可以通过“举反例”来否定一个全称命题.

复 习 题

1.判断下列命题的真假:

(1)27 是 3 的倍数或 27 是 9 的倍数.

(2)27 是 3 的倍数且 27 是 9 的倍数.

(3)平行四边形的对角线互相垂直且平分.

(4)平行四边形的对角线互相垂直或平分.

(5)1 是方程 $x-1=0$ 的根,且是方程 $x^2-5x+4=0$ 的根.

2.设原命题是“等边三角形的三内角相等”.把原命题写成“若 p 则 q”的形式,并写出它的逆命题、否命题和逆否命题,然后指出它们的真假.

3.已知 a、b、c 是实数,判断下列命题的真假:

(1)“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件.

(2)“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的必要条件.

(3)“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的充分条件.

(4)“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的充要条件.

4. 下列各小题中,p 是 q 的什么条件?

(1)p:a、b 是整数,

q:$x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解.

(2)p:$a+b=1$,

q:$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

5. 已知 p、q 都是 r 的必要条件,s 是 r 的充分条件,q 是 s 的充分条件,那么:

(1)s 是 q 的什么条件?

(2)r 是 q 的什么条件?

(3)p 是 q 的什么条件?

6. 下列命题是全称命题还是特称命题?并指出它们的真假:

(1)自然数的平方大于零.

(2)圆 $x^2+y^2=r^2$ 上任一点 P 到圆心 O 的距离是 r.

(3)存在一对整数 x、y,使得 $2x+4y=3$.

(4)存在一个无理数,它的立方是有理数.

7. 写出下列命题的否定.

(1)$3=2$.

(2)$5>4$.

(3)对任意实数 x,$x>0$.

(4)每个正方形都是平行四边形.

8. 求 $3x^2-10x+k=0$ 有两个同号且不相等实根的充要条件.

读 一 读

“且”“或”“非”与“交”“并”“补”

逻辑连接词“且”“或”“非”与集合的“交”“并”“补”之间有关系吗?

先看一个具体例子.

我们知道,由“2 是偶数”与“2 是质数”都是真命题,可以得到“2 是偶数且是质数”是真命题. 另一方面,由集合的“交”运算可以知道:由 $2\in\{$偶数$\}$,$2\in\{$质数$\}$,可以得到 $2\in\{$偶数$\}\cap\{$质数$\}$. 如果把“真”对应于“$\in$”,“且”对应于“交”,那么,“2 是偶数是真命题”可以对应于“$2\in\{$偶数$\}$”,“2 是质数是真命题”可以对应于“$2\in\{$质数$\}$”,“2 是偶数且是质数是真命题”就可以对应于“$2\in\{$偶数$\}\cap\{$质数$\}$”.

从上述例子得到启发,我们可以在逻辑连接词“且”与集合的“交”运算之间建立联系.

我们知道,对于逻辑连接词“且”有如下规定:

若 p、q 都是真命题，则 p 且 q 是真命题；若 p、q 中有假命题，则 p 且 q 是假命题.

对于集合的"交"有如下规定：

若 $a\in \boldsymbol{P}$，$a\in \boldsymbol{Q}$，则 $a\in \boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{Q}$；若 $a\notin \boldsymbol{P}$ 或 $a\notin \boldsymbol{Q}$，则 $a\notin \boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{Q}$.

把命题 p，q 分别对应于集合 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，"真""假""且"分别对应于"$\in$""$\notin$""$\cap$"，那么上述关于"且"与"交"的规定就具有形式的一致性.具体地说，就是"p 是真命题"对应于"$a\in \boldsymbol{P}$"，"q 是真命题"对应于"$a\in \boldsymbol{Q}$"，"p 且 q 是真命题"对应于"$a\in \boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{Q}$"，"$p$ 且 q 是假命题"对应于"$a\notin \boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{Q}$".

同类地，逻辑连接词"或"和集合的"并"运算的规定在形式上也具有一致性.请同学们类比"且"与"交"的关系，建立"或"与"并"运算之间的相应关系.

逻辑连接词"非"和集合的"补"又有什么关系呢？

再看一个具体例子.

若以整数集为全集，则偶数集和奇数集互为补集.由"2 是偶数"是真命题，可以得到"2 是奇数"是假命题；由"3 是偶数"是假命题，可以得到"3 是奇数"是真命题.用集合的方式则可表达为：由 $2\in\{$偶数$\}$，可以得到 $2\notin\{$奇数$\}$；由 $3\notin\{$偶数$\}$，可以得到 $3\in\{$奇数$\}$.如果把"非""真""假"分别对应于"补""$\in$""$\notin$"，那么，命题 p 和它的否定 $\neg p$ 可以对应于集合 P 和它的补集 $\complement_U P$，"p 是真命题"对应于"$a\in P$"，"$\neg p$ 是假命题"对应于"$a\notin \complement_U P$"，"p 是假命题"对应于"$a\notin P$"，"$\neg p$ 是真命题"对应于"$a\in \complement_U P$".

一般地，对于逻辑连接词"非"有如下规定：

若 p 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 是真命题.

对于集合的"补"有如下规定：

设 U 为全集，$P\subseteq U$，若 $a\in P$，则 $a\notin \complement_U P$；若 $a\notin P$，则 $a\in \complement_U P$.

把命题 p，$\neg p$ 分别对应于集合 P，$\complement_U P$，"真""假""非"分别对应于"$\in$""$\notin$""补"，则"p 是真命题"对应于"$a\in P$"，"p 是假命题"对应于"$a\notin P$"，"$\neg p$ 是真命题"对应于"$a\in \complement_U P$"，"$\neg p$ 是假命题"对应于"$a\notin \complement_U P$".

从上述讨论可以发现：命题与集合之间可以建立对应关系.在这样的对应下，逻辑连接词与集合的运算具有一致性，命题的"且""或""非"恰好分别对应集合的"交""并""补".因此，我们就可以从集合的角度进一步认识有关这些逻辑连接词的规定.