# 特级教师

# 教学优化设计

# 高二

## 解析几何

JIEXIJIHE

南京师范大学出版社

系列丛书

特级教师教学优化设计

# 高二解析几何

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

特级教师教学优化设计:高二解析几何/《特级教师教学优化设计》编委会组织编著.—南京:南京师范大学出版社,1999.7

ISBN 7-81047-339-5/G·210

Ⅰ.特… Ⅱ.特… Ⅲ.解析几何课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 20539 号

南京师范大学出版社出版发行

(江苏省南京市宁海路 122 号 邮编 210097)

江苏省新华书店经销 如皋市印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 9.5 字数 228 千

1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷

定价:9.00 元

本系列丛书采用全息防伪覆膜

# 出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题。在学科教学中，如何减轻学生的负担，提高教与学的质量，增强学生的全面素质，又是实施素质教育的关键。为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物，让学生用最少的时间获得最大的学习收益，我们在大量调查和深入开展研讨的基础上，组织一批特级教师主持编写了这套“特级教师教学优化设计”系列丛书。

随着教改的不断深入，随着高考3+X方案的逐步落实，教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变。本套系列丛书的编写，力图充分吸收当前教改的成果，贯彻现代教育思想，充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用，尤其突出对学生的学法指导。本书对学科知识的辅导，既注意围绕各科的教学大纲，对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解，并安排相应的练习；又注意适应当前教改的要求，注意向3+X的考试内容靠拢，突出知识学习的迁移和综合。“学习指导”、“讲解设计”、“练习设计”是本系列丛书的基本栏目。“学习指导”梳理本课的知识要点或介绍学习方法，“讲解设计”对本课中的知识重点、难点进行阐释，“练习设计”根据本课的知识点安排相应的练习。练习又按“识记与理解”、“巩固与运用”、“拓展与迁移”三个层级进行设计。在语文中，还设计了“写作与欣赏”，题目强调典型性和少而精。

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色。一般的同类书都以单元为编写单位，虽与教材同步，但与课时不同步，操作上的缺陷是显而易见的。本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果，以课时为单位进行编写，并且每课时安排为一页两面，课时与课时之间不转页，这必将会给使用者带来很大的方便。

为了保证编校质量，本系列丛书设立了责任验题人制度。除加强正常的三审三校外，所有的题目都请专人责任验题，以确保题目以及解题过程和答案的准确性。

作为师范大学出版社，我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物。我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的“向45分钟要效益”丛书一样，得到广大读者的青睐；也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见，以便我们进一步修订，使其日臻完善，成为名牌产品。

# 前　言

依据中学各科教学大纲，配合现行教材和素质教育的要求，结合当前教学改革的实际需要，我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书。

高二解析几何分册的编写，力求做到体现和反映以下"优化"的特色：

教学进度与课时安排优化　将高二解析几何的教学内容按实际教学的需要拆分为57课时，概念精讲、例题演绎与练习设计合理安排穿插其中，重要章节及各章节内的重难点内容，进行了合理的分散处理。这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考。

知识内容与教法学法优化　每课时的知识内容突出重点，对概念与规律的介绍简洁明了，知识体系的梳理纲目清晰，注意前后承接过渡与迁移，覆盖相关的知识点。根据认知规律进行讲解设计，例题讲解循序渐进，先分析引导、详细解答，后提示思路与方法，放手让读者自行分析问题与解决问题。这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例，也可作为学生预习的主要内容。

练习内容与题量梯度优化　练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高，与社会生产、生活相结合的题较多，逐步向学科之外延伸。题型全面，新题较多，加大了主观题的份量。题量适中，难度梯度合理，有利于分类教学。每一课的练习设计均分为三个层次，教学使用时有了较大的选择余地，因而普适性就大大提高。

栏目设置与编排方式优化　全书栏目设置精当，一目了然。每课时的讲解与练习各占一页，便于进度的把握与对教学效果的实时反馈；书后的参考答案可供测评时灵活使用；大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯。

我们期望由江苏一线特、高级教师编写的这本高二解析几何的教学优化设计能为高中数学教学提供有益的参考。

编　者

# 《解析几何》目录

# 01　有向线段、两点的距离公式

**【概念与规律】**

1. 有向直线：规定了正方向的直线，叫有向直线。

2. 有向线段：规定了起点和终点的线段叫有向线段。以 $A$ 为起点，$B$ 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$，线段 $AB$ 的长度，就是有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度，记作$|AB|$。

3. 有向线段的数量：根据$\overrightarrow{AB}$与有向直线 $l$ 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量，用 $AB$ 表示。显然，$AB=-BA$，对于数轴上任意有向线段$\overrightarrow{AB}$，它的数量 $AB$ 和起点坐标 $x_1$，终点坐标 $x_2$ 之间的关系是：$AB=x_2-x_1$。

4. 两点的距离：

(ⅰ)数轴上两点 $A,B$ 的距离公式：

$|AB|=|x_2-x_1|$；

(ⅱ)平面上任意两点的距离：

已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

**【讲解设计】·重点与难点**

**例1**　设 $A$、$B$、$C$、$D$ 是同一直线上的四点，求证：不论它们的位置如何，都有：

(1)$AB+BC+CD+DA=0$；

(2)$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

**证明**　(1)取这条直线为数轴，设 $A,B,C,D$ 的坐标分别为$a,b,c,d$，则由有向线段的数量公式得：$AB+BC+CD+DA=(b-a)+(c-b)+(d-c)+(a+d)=0$

(2)左式$=(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)=bd+ac-ad-bc+cd+ab-bd-ac=cd-bc-ad+ab=(c-a)(d-b)=AC\cdot BD$。

**点评**　(1)证明此类问题时，要注意反复运用 $AB=x_2-x_1$ 这个数量关系式。用类似的方法可以证明更一般的结论，即 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$ 是数轴上的 $n$ 个不同的点，则一定会有：$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1=0$。

(2)注意数量公式的正、反运用。

**例2**　求与 $y$ 轴及点 $A(-4,2)$ 的距离都是 10 的点的坐标。

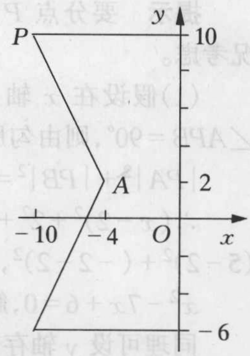
**解**　设点 $P$ 的坐标是$(x,y)$，点 $P$ 到 $y$ 轴的距离是$|x|$，$|PA|=10$，故

$$\begin{cases}|x|=10, & (1)\\ \sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=10。 & (2)\end{cases}$$

解这个方程组得：

$$\begin{cases}x=-10,\\ y=10\end{cases}$$

或$\begin{cases}x=-10,\\ y=-6。\end{cases}$




所以满足条件的点的坐标是$(-10,10)$和$(-10,6)$。

**点评**　点的横(纵)坐标与点到 $y(x)$轴的距离是两个不同的概念。距离要在坐标上加上绝对值。

**【讲解设计】·思路与方法**

**例3**　已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(5,5),B(-7\frac{3}{5},8\frac{1}{5}),C(2,1)$。

(1)判断此三角形的形状；

(2)在 $x$ 轴上找一点 $M$，使它满足：$|MA|^2+|MB|^2=2|MC|^2$。

**提示**　(1)利用两点距离公式分别求出各边的长，根据边长之间的关系来判断形状。本题可解得：

$$|AB|=\sqrt{(5+7\frac{3}{5})^2+(5-8\frac{1}{5})^2}=13,$$

$$|AC|=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$$

$$|BC|=\sqrt{(-7\frac{3}{5}-2)^2+(8\frac{1}{5}-1)^2}=12$$

$\because |AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形。

(2)由两点的公式直接计算，设 $m(x,0)$，

$\because |MA|^2+|MB|^2=2|MC|^2$，

$\therefore (x-5)^2+(0-5)^2+(x+7\frac{3}{5})^2+(0-8\frac{1}{5})^2=2[(x-2)^2+(0-1)^2]$，

即：$-10x+25+25+\frac{76}{5}x+(\frac{38}{5})^2+(\frac{41}{5})^2=-8x+8+2$。

$\therefore x=-12.5$，　$\therefore M(-12,5,0)$。

**例 4**　已知两点 $A(2,2)$ 和 $B(5,-2)$，试问能否在坐标轴上找一点 $P$，使 $\angle APB=90°$？

**提示**　要分点 $P$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上两种情况考虑。

(1)假设在 $x$ 轴上找到一点 $P(x,0)$，使 $\angle APB=90°$，则由勾股定理知：

$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$，

$\therefore (x-2)^2+2^2+(x-5)^2+(-2)^2=(5-2)^2+(-2-2)^2$，化简得：

$x^2-7x+6=0$，解得：$x_1=1$ 或 $x_2=6$。

同理可设 $y$ 轴存在一点 $P(0,y)$，由勾股定理列出的方程无解，故只能在 $x$ 轴上找到两点 $P(1,0)$或$(6,0)$，使 $\angle APB=90°$。

**【练习设计】·识记与理解**

1. 数轴上已知点 $B$ 的坐标为 5，$AB=4$，则 $A$ 点的坐标为 1或9 。

2. 已知 $A(6,0)$，$B(-2,6)$，则 $|AB|=$ 10 。 (6,-8)

3. 已知数轴上三点 $A,B,C$ 的坐标分别为 4，-2，-6，则有向线段 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{CB}$，$\overline{AB}$ 中数量最大的是________。

4. 直角坐标系中点 $P(x,y)$，到 $x$ 轴的距离是(　　)。

A. $x$　　B. $y$　　C. $|x|$　　D. $|y|$

5. 若 $x$ 轴上的点 $M$ 到原点及点 $(5,-3)$ 的距离相等，则 $M$ 的坐标是(　　)。

A. $(-2,0)$　　B. $(1,0)$

C. $(\frac{3}{2},0)$　　D. $(3.4,0)$

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 已知两点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$，则 $|PQ|$ 的最大值是(　　)。

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. 不存在

7. 设 $M,N,P,Q$ 为同一直线上的不同四点，下面四个关系式：① $MN+NP+PQ+QM=0$；② $MN+PQ=MQ+PN$；③ $PQ-PN=MQ-MN$；④ $QM=MN+NP+PQ$；其中正确的个数有(　　)个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知 $A(1,3)$，$B(-2,8)$，$C(7,5)$ 三点，则 $\triangle ABC$ 的形状是 钝角△ 。

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|BC|=5$，$|CA|=4$，$\angle C=\arccos\frac{1}{8}$，试求出有向线段 $AB$ 在有向直线 $AC$ 和 $CA$ 上的射影。

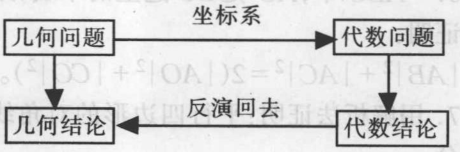
10. 在直角坐标系的 $y$ 正半轴上给定两点 $A(0,a)$，$B(0,b)$，$a>b>0$。试在 $x$ 正半轴上找一点 $C$，使 $\angle ACB$ 取得最大值，并求出这个最大值。

# 02 解析法与构造法

**【概念与规律】**

1. 解析法：在坐标系的基础上，利用代数方法来解决平面几何问题的方法称解析法。

2. 解析法的结构框图：




3. 解析法解题的一般步骤：

(1)建立适当的直角坐标系；

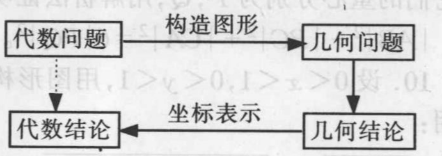
(2)设出点的坐标；

(3)通过代数计算得出某种代数结论；

(4)返回到几何问题的结论。

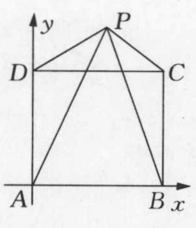
4. 图形构造法：

定义和思维模式与解析法相反。




**【讲解设计】·重点与难点**

**例1** $ABCD$ 为矩形，$P$ 为矩形所在平面内的任意一点，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$。




**证明** 如图：设 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$，$P(x,y)$。

则：$PA^2=x^2+y^2$；$PB^2=(x-a)^2+y^2$；$PC^2=(x-a)^2+(y-b)^2$；$PD^2=x^2+(y-b)^2$，所以，$PA^2+PC^2=2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2$；$PB^2+PD^2=2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2$。

故 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$

**点评** ①运用解析法证题的关键在于恰当地选择坐标系。直角坐标系的选择一般遵循以下原则：(ⅰ)原点取在定点，以定直线或定线段所在的直线为坐标轴；(ⅱ)尽可能利用图形的对称性和已有的直角；(ⅲ)设出各点坐标时，应尽可能减少参数(设定的字母)个数。

②此题也可设 $A(a,b)$，$B(-a,b)$，$C(-a,-b)$，$D(a,-b)$，同样可以得证。

**例2** 求证：对任意实数 $x_1,y_1,x_2,y_2$，都有下列不等式成立：

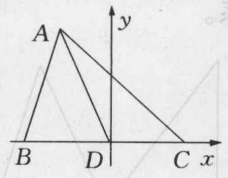
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}。$$

**证明** 在平面直角坐标系中，设 $P_1,P_2$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，$|OP_1|+|OP_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，∵连接两点 $P_1,P_2$ 的所有线中，以线段 $P_1P_2$ 最短。∴$|P_1P_2|\leqslant|OP_1|+|OP_2|$，即：$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$。

**点评** 这里使用了构造图形解决代数问题的方法。关键在于挖掘代数问题的几何意义，构造出适当的几何模型，使代数问题几何化。

**【讲解设计】·思路与方法**

**例3** 在△$ABC$ 的边 $BC$ 上取一点 $D$，使 $\frac{BD}{DC}=\frac{n}{m}$，求证：$m|AB|^2+n|AC|^2=(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2$




**提示** 建立如图所示的直角坐标系，以 $D$ 为原点，$BC$ 为 $x$ 轴，设 $A,B,C$ 各点的坐标分别为 $(a,b)$，$(-nc,0)$，$(mc,0)$。则 $m|AB|^2+n|AC|^2=m[(a+nc)^2+b^2]+n[(a-mc)^2+b^2]=(m+n)a^2+(mn^2+nm^2)c^2+(m+n)b^2=(m+n)(a^2+b^2+mnc^2)$，

$(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2=(m+n)(a^2+b^2)+m(nc)^2+n(mc)^2=(m+n)(a^2+b^2+mnc^2)$，

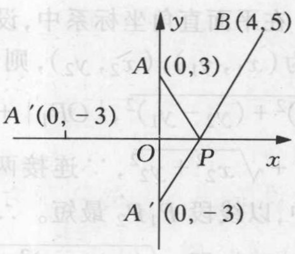
故 $m|AB|^2+n|AC|^2=(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2$。

**例 4** 求函数

$y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-8x+41}$的最小值。

**提示** 联想两点距离公式，由$\sqrt{x^2+9}=\sqrt{(x-0)^2+(0-3)^2}$，$\sqrt{x^2-8x+41}=\sqrt{(x-4)^2+(0-5)^2}$，知它们分别是 $P(x,0)$ 到 $A(0,3)$，$B(4,5)$的距离。

如图：作出 $A(0,3)$的对称点 $A'(0,-3)$，$|A'B|=4\sqrt{5}$即为所求。

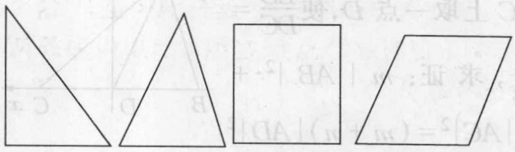



**【练习设计】·识记与理解**

1. 数轴上 $M$、$N$、$P$ 的坐标分别为 3，−1，−5，则 $MP+PN$ 等于(　　)。

A. −4　　B.4　　C. −12　　D.12

2. 在下列图形上，建立适当的直角坐标系。



3. 用解析法求证：矩形的对角线长相等。

4. 用解析法证明：三角形的中位线长等于底边长的一半。

5. 用解析法证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等。

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. $\triangle ABC$ 中，$AO$ 是 $BC$ 边上的中线，用解析法证明：

$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|CO|^2)$。

7. 用解析法证明：平行四边形的对角线互相平分。

8. 设 $A$，$B$，$C$，$D$ 是一直线上的四点，且 $\dfrac{AC}{CB}+\dfrac{AD}{DB}=0$，求证：$\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{2}{AB}$。

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. $C$ 为线段 $AB$ 上任意一点，以 $AC$，$BC$ 为边在直线 $AB$ 同侧作正$\triangle AEC$ 与正$\triangle CFB$，若它们的重心分别为 $P$，$Q$，用解析法证明：

$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2=6|PQ|^2$。

10. 设$0<x<1$，$0<y<1$，用图形构造法证明：

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}$。

# 03　定比分点(一)

**【概念与规律】**

1. 线段的定比分点：若 $P_1,P_2,P$ 是一有向直线上的三点，则有向线段 $\overline{P_1P}$、$\overline{PP_2}$ 的数量之比 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，称为点 $P$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的分比，点 $P$ 称为 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点。

2. 对定比分点概念的理解：

(1) $\lambda$ 是 $P$ 分 $P_1P_2$ 的数量 $(P_1P,PP_2)$ 之比，而不是长度 $(|P_1P|,|PP_2|)$ 之比。若遇到形如 $\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=2$ 的情形，则 $P$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 的比 $\lambda$ 的值应为 2 或 $-2$。

(2) 比值 $\lambda$ 的值是由起点、分点、终点的顺序确定的。其中分子是由有向线段的起点到分点，分母是分点到有向线段的终点，即：$\dfrac{\text{起点}\to\text{分点}}{\text{分点}\to\text{终点}}$。这个顺序不能颠倒，否则 $\lambda$ 的值就会随之改变。

3. 线段的定比分点坐标公式：

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，分点 $P(x,y)$ 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 $\lambda$，则分点 $P$ 的坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1)$$

特殊情况：当 $P$ 为线段 $P_1P_2$ 的中点时，$\lambda=1$，得中点坐标公式为：$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$。

**【讲解设计】·重点与难点**

**例 1**　已知点 $P$ 在线段 $AB$ 上，且有 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AB}{AP}$，求点 $P$ 分有向线段 $\overline{AB}$ 所成的比。

**解**　设 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}$，

$\because \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AP+PB}{AP}=1+\dfrac{PB}{AP}$

$\therefore \lambda=1+\dfrac{1}{\lambda}$　即：$\lambda^2-\lambda-1=0$，

得 $\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

$\because$ 点 $P$ 在线段 $AB$ 上，$\therefore \lambda>0$，$\therefore P$ 分 $\overline{AB}$ 所成的比是 $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。

**点评**　①确定了起点、终点、分点的定比 $\lambda$ 是一定值，反之，$\lambda$ 值确定时，起点、终点、分点的相对顺序也已确定。

②根据分点 $P$ 的位置，决定 $\lambda$ 的符号。

**例 2**　已知 $A(-2,-3)$，$B(4,1)$，延长 $AB$ 至 $P$，使 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=3$，求 $P$ 点坐标。

**解一**　设 $P(x,y)$，把 $P$ 视为分点，$A$ 为起点，$B$ 为终点时，$\lambda=\dfrac{AP}{PB}=-3$，$\therefore x=\dfrac{-2+(-3)\times4}{1-3}=7$，$y=\dfrac{-3+(-3)\times1}{1-3}=3$，

$\therefore$ 得点 $P(7,3)$。

**解二**　设 $P(x,y)$，把 $A$ 视为起点，$B$ 为分点，$P$ 为终点时，$\lambda=\dfrac{AB}{BP}=2$。由 $4=\dfrac{-2+2x}{1+2}\Rightarrow x=7$，由 $1=\dfrac{-3+2y}{1+2}\Rightarrow y=3$，$\therefore$ 得 $P(7,3)$。

**点评**　①一般来说，利用定比分点坐标公式求点的坐标时，起点、分点、终点可以任意确定。因确定的顺序不同，$\lambda$ 取值也不同，这对代入公式计算的繁简影响甚大，因此要恰当地选取。

②此题中如果去掉"延长 $AB$ 至 $P$"这个条件，求 $\lambda$ 值时要分点 $P$ 在线段 $AB$ 内和外两种情况考虑。

**【讲解设计】·思路与方法**

**例 3**　①求点 $A(a,b)$ 关于点 $P(\alpha,\beta)$ 的对称点 $B$ 的坐标。

②已知三角形顶点是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，求 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 的坐标 $(x,y)$。

**提示：**　①利用中点坐标公式，得 $B(2\alpha-a,2\beta-b)$。②设 $BC$ 边中点为 $D$，则点 $D$ 的坐标是：$(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_2+y_3}{2})$。又因为

$AD$ 是中线，且$\frac{AG}{GD}=2$，得点 $G$ 的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2},y=\frac{y_1+2\times\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}。$$

$$\therefore G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})。$$

**例 4** 求连结 $A(4,1)$和 $B(-2,4)$的直线与 $x$ 轴的交点$P$ 的坐标。

**提示** 设点 $P(x,y)$，

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{4-2\lambda}{1+\lambda} \quad ①$$

$$y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{1+4\lambda}{1+\lambda} \quad ②$$

$\because P$ 在 $x$ 轴上，$\therefore y=0$，即：$\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}=0$，

$\therefore \lambda=-\frac{1}{4}$，$\therefore x=6$。

$\therefore AB$ 与 $x$ 轴交点坐标为$P(6,0)$。

**【练习设计】·识记与理解**

1. 已知两点 $P_1(3,-2)$，$P_2(-9,4)$，点 $P(x,0)$分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda=$________；$x=$________。

2. 点 $M$ 分有向线段$\overline{M_1M_2}$的比为 $\lambda$，求下列点 $M$ 的坐标$(x,y)$：

①已知 $M_1(1,5)$，$M_2(2,3)$，$\lambda=\frac{1}{3}$，$M$ 的坐标($\frac{5}{4},\frac{9}{2}$)。

②已知 $M_1(1,5)$，$M_2(2,3)$，$\lambda=-3$，$M$ 的坐标($\frac{5}{2},2$)。

3. $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1,4)$，$B(x,-3)$，$C(-4,y)$，重心 $G(-2,1)$，则 $x=$ -3；$y=$ 2。

4. 设 $A(x_2,y_2)$是以 $B(x_1,y_1)$，$C(x,y)$为端点的有向线段$\overline{BC}$的中点，则点 $C$ 的坐标是(　　)。

A. $(2x_2-x_1,2y_2-y_1)$

B. $(2x_1-x_2,2y_1-y_2)$

C. $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

D. $(\frac{x_1-2x_2}{2},\frac{y_1-2y_2}{2})$

5. 已知点 $P$ 分$\overline{AB}$的比是$\lambda=\frac{AP}{PB}$，且 $P$ 在 $AB$ 的反向延长线上，则(　　)。

A. $\lambda\in(-\infty,0)$　　B. $\lambda\in(-\infty,-1)$

C. $\lambda\in(-1,0)$　　D. $\lambda\in(1,+\infty)$

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 若 $A(1,2)$，$B(-2,3)$，$C(4,y)$在同一直线上，则 $y$ 的值是(　　)。

A. 1　　B. −1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

7. 设 $P_1(-2,3)$，$P_2(4,-9)$，则 $y$ 轴分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的比是( D )。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. 2

8. $\triangle ABC$ 的三边的中点坐标分别为 $(2,-1)$，$(-1,4)$，$(-2,2)$，则$\triangle ABC$ 的重心坐标是________。

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 点 $P$ 是有向线段$\overline{AB}$的内分点，$A(2,3)$，$B(8,4)$，且$\frac{AP}{PB}=\frac{PB}{AB}$，求点 $P$ 坐标。

10. 在$\triangle ABC$ 中，已知顶点 $A(3,1)$，$AB$ 的中点$D(2,3)$，$\triangle ABC$ 重心$G$ 的坐标为$(3,4)$，试求顶点 $B$，$C$ 的坐标。

# 04　定比分点(二)

**【概念与规律】**

1. 定比分点定义：点 $P$ 分有向线段$\overline{P_1P_2}$成$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$两部分，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$称为 $P$ 分有向线段$P_1P_2$所成的定比。

2. 分点 $P$ 的位置，决定了 $\lambda$ 的正负，$\lambda$ 的值有内分为正，外分为负($\lambda\neq-1$)的规律。如下表：

| $P$ 点的位置 | $P$ 点名称 | $\lambda$ 取值范围 |
|---|---|---|
| 点 $P$ 在$\overline{P_1P_2}$两端点之间 | 内分点 | $\lambda\in(0,+\infty)$ |
| 点 $P$ 在$P_1P_2$的延长线上 | 外分点 | $\lambda\in(-\infty,-1)$ |
| 点 $P$ 在$P_2P_1$的延长线上 | 外分点 | $\lambda\in(-1,0)$ |

特别情况，若点 $P$ 与点 $P_1$ 重合，则有 $\lambda=0$，反之亦真；若点 $P$ 和点 $P_2$ 重合，则 $PP_2=0$，此时 $\lambda$ 无意义，$\therefore\lambda\neq-1$。

3. 定比分点坐标公式：$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$。特殊情况：中点坐标公式：$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$；$\triangle ABC$ 重心坐标公式：$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$。

**【讲解设计】·重点与难点**

**例1**　$\triangle ABC$ 中，$A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，求$\angle A$ 的内角平分线的长度及$\angle A$ 的外角平分线与$CB$ 延长线交点$E$ 的坐标。

**解**　(1)$|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5$，$|AC|=\sqrt{(-4-4)^2+(7-1)^2}=10$，设$\angle A$ 内角平分线交 $BC$ 于点 $D$，由角平分线性质知：$\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{10}{5}=2$，则：

$$\begin{cases}x_D=\frac{-4+2\times7}{1+2}=\frac{10}{3},\\ y_D=\frac{7+2\times5}{1+2}=\frac{17}{3}。\end{cases}$$

$$\therefore|AD|=\sqrt{(4-\frac{10}{3})^2+(1-\frac{17}{3})^2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}。$$

(2)$\because\frac{|CE|}{|EB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=2$　$\therefore E$ 分$CB$ 的比 $\lambda=\frac{CE}{EB}=-2$，故$\begin{cases}x_E=\frac{-4-2\times7}{1-2}=18,\\ y_E=\frac{7-2\times5}{1-2}=3,\end{cases}$

即 $E(18,3)$。

**点评**　①利用平面几何知识确定点分已知线段所成的比；②题设条件中是长度关系的，应确定 $\lambda$ 的值和符号，是内分点还是外分点，即注意分类讨论。

**例2**　设点 $C$ 内分$\overline{AB}$的比为 $m:n$，$D$ 外分$\overline{AB}$的比为 $-m:n$，求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$。

**证一**　$\because\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$，$\therefore\frac{AC}{AC+CB}=\frac{m}{m+n}$，即$\frac{AC}{AB}=\frac{m}{m+n}$，$\frac{1}{AC}=\frac{m+n}{m}\cdot\frac{1}{AB}$；$\because\frac{AD}{DB}=\frac{-m}{n}$，$\therefore\frac{AD}{AD+DB}=\frac{-m}{-m+n}$，即：$\frac{AD}{AB}=\frac{m}{m-n}$，$\frac{1}{AD}=\frac{m-n}{m}\cdot\frac{1}{AB}$，$\therefore\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=(\frac{m+n}{m}+\frac{m-n}{m})\frac{1}{AB}=\frac{2}{AB}$。

**证二**　设 $A,B,C,D$ 的坐标分别为 $a,b,c,d$，$\lambda=\frac{m}{n}$，则 $c=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$，$d=\frac{a-\lambda b}{1-\lambda}$

$$\frac{1}{AC}=\frac{1}{c-a}=\frac{1}{\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}-a}=\frac{1+\lambda}{\lambda(b-a)},$$

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{d-a}=\frac{1}{\frac{a-\lambda b}{1-\lambda}-a}=\frac{1-\lambda}{\lambda(a-b)},$$

$$\therefore\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{d-a}=\frac{1+\lambda}{\lambda(b-a)}+\frac{1-\lambda}{\lambda(a-b)}=\frac{2}{b-a}=\frac{2}{AB}。$$

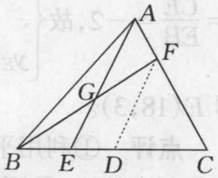
**点评**　证一直接利用点分有向线段的定比概念，用数量关系直接运算，注意比例性质的巧用。

证二利用数量公式 $AB=x_B-x_A$ 将数量关系转化成坐标关系，利用定比分点坐标公式来推导。

**【讲解设计】·思路与方法**

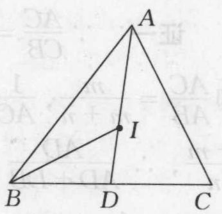
例3　在△$ABC$中，$F$点分$\overline{AC}$成定比1∶2，$G$为$BF$的中点，$E$是$AG$与$BC$的交点，又知$B(-1,5)$，$C(2,1)$，求$E$点坐标。

提示　如图，作$FD$ $/\!/ AE$交$BC$于$D$，则$\frac{ED}{DC}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，$\frac{BE}{ED}=\frac{BG}{GF}=1$，故$E$分$\overline{CB}$所成比为$\lambda=3$，由定比分点坐标公式得：$E(-\frac{1}{4},4)$。




例4　若△$ABC$的三边长$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，又三顶点的坐标分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$c(x_3,y_3)$，求△$ABC$内心$I$的坐标。

提示　先求∠$BAC$的平分线$AD$的端点$D$的坐标，再利用$\lambda=\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}$，求得：




$I(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$。

**【练习设计】·识记与理解**

1. 若点$P$分$\overline{AB}$所成的比为$\frac{2}{3}$，则$A$分$\overline{PB}$的比为______，$B$分$\overline{AP}$的比为______。

2. 若线段$AB$的端点为$A(\lg x,\lg y)$，$B(-6,3)$，中点为$M(-2,1)$，则$x=$______，$y=$______。

3. 已知$A(-2,4)$，$B(7,-1)$，则将线段$AB$三等分点的坐标为 $(1,\frac{7}{3}),(4,\frac{2}{3})$。

4. 点$P$分有向线段$\overline{P_1P_2}$成定比$\lambda$，若$\lambda\in(-\infty,-1)$，则$\lambda$所对应的点$P$的集合是(　　)。

A. 线段$\overline{P_1P_2}$　　B. 线段$\overline{P_1P_2}$的延长线

C. 射线$P_2P_1$　　D. 线段$\overline{P_2P_1}$的延长线

5. 已知△$ABC$的顶点$A(2,3)$，重心$G(2,-1)$，则$BC$边上中点$D$的坐标是( A )。

A. $(2,-3)$　　B. $(2,-9)$

C. $(2,-5)$　　D. $(2,0)$

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 已知两点$A(\frac{m+n}{a},-\frac{m-n}{a})$，$B(\frac{m-n}{a},\frac{m+n}{a})$，其中$a<0$，则$AB$的中点与原点间的距离为( D )。

A. $\frac{m+n}{a}$　　B. $-\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{a}$

C. $\frac{m+n}{|a|}$　　D. $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{a}$

7. 连接直角三角形的直角顶点和斜边的两个三等分点，所得两线段的长分别是$\sin\alpha$和$\cos\alpha$，$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则斜边的长为(　　)。

A. $\frac{4}{3}$　B. $\frac{3}{\sqrt{5}}$　C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$　D. $\sqrt{5}$

8. 已知一个平行四边形的三个顶点是$(4,2)$，$(5,7)$，$(-3,4)$，则第四个顶点不可能是( A )。

A. $(12,5)$　　B. $(-2,9)$

C. $(-4,-1)$　　D. $(3,7)$

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 在等腰△$ABC$中，∠$A$为顶角，$D$为腰$AB$上一点，$|AD|=\frac{1}{3}|AB|$，延长$AB$至$E$点，使$|AE|=3|AB|$，试用解析法证明：

$|CE|=3|CD|$。

10. △$ABC$中，三个顶点是$A(1,1)$，$B(6,6)$，$C(8,-2)$，点$M$分边$AB$为4∶1，$N$为$AC$边上一点，且△$AMN$面积等于△$ABC$面积的$\frac{1}{3}$，求$N$点分线段$\overline{AC}$所成的比。

# 05 直线的倾斜角和斜率

**【概念与规律】**

1. 直线的倾斜角：一条直线向上的方向与 $x$ 轴的正方向所成的最小正角叫这条直线的倾斜角($\alpha$)。

注意点：(1)概念中的三要素：1°直线向上的方向；2°与 $x$ 轴正方向；3°最小正角。三者缺一不可。

(2)规定平行于(或重合于)$x$ 轴的直线，它的倾斜角为 0°。

(3)直线倾斜角的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$。

2. 直线的斜率：直线的倾斜角 $\alpha$ 的正切值 $\mathrm{tg}\alpha$(倾斜角不为 90°时)，叫直线的斜率($k$)。

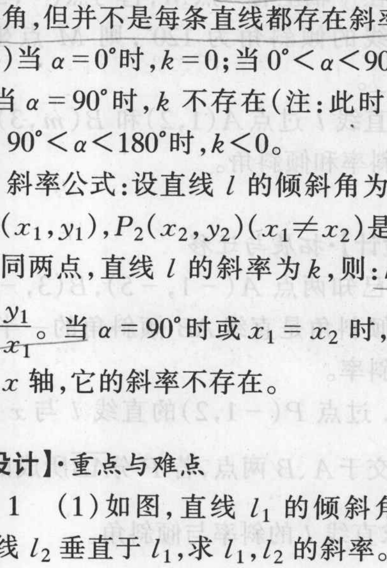
注意：(1)倾斜角为 90°的直线无斜率。(2)斜率 $k$ 是一个实数。每条直线都存在唯一的倾斜角，但并不是每条直线都存在斜率。

(3)当 $\alpha=0°$时，$k=0$；当 $0°<\alpha<90°$时，$k>0$；当 $\alpha=90°$时，$k$ 不存在(注：此时直线存在)；当 $90°<\alpha<180°$时，$k<0$。

3. 斜率公式：设直线 $l$ 的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq 90°)P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$是直线 $l$ 上的不同两点，直线 $l$ 的斜率为 $k$，则：$k=\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。当 $\alpha=90°$时或 $x_1=x_2$ 时，直线 $l$ 垂直于 $x$ 轴，它的斜率不存在。

**【讲解设计】·重点与难点**

**例 1** (1)如图，直线 $l_1$ 的倾斜角 $\alpha_1=45°$，直线 $l_2$ 垂直于 $l_1$，求 $l_1,l_2$ 的斜率。




(2)求过 $A(-2,0),B(-5,3)$两点的直线的斜率和倾斜角。

(3)若 $ab\neq 0$ 且 $m\neq 1$，求过点 $A(ma,mb),B(a,b)$的直线的斜率和倾斜角。

**解** (1)$l_1$ 的斜率 $k_1=\mathrm{tg}45°=1$，$\because l_2$ 垂直于 $l_1$(如图)$\therefore l_2$ 的倾斜角 $\alpha_2=90°+45°=135°$，$\therefore l_2$ 的斜率 $k_2=\mathrm{tg}135°=-1$。

(2)解：$k=\dfrac{3-0}{-5-(-2)}=-1$，即 $\mathrm{tg}\alpha=-1$，$\because 0°\leqslant\alpha<180°\ \therefore\alpha=135°$，即此直线的斜率为 $-1$，倾斜角是 135°。

(3)解：$k=\dfrac{b-mb}{a-ma}=\dfrac{b}{a}$，

(ⅰ)$a,b$ 同号时，$\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$；

(ⅱ)$a,b$ 异号时，$\alpha=\pi+\mathrm{arctg}(-\dfrac{b}{a})$。

**点评** ①已知直线的倾斜角 $\alpha$，可直接取 $\mathrm{tg}\alpha(\alpha\neq 90°)$为直线的斜率。②已知直线的斜率，可以求出直线的倾斜角，但要注意用反三角表示时的范围问题。

**例 2** (1)求经过两点 $A(2,-1)$和 $B(m,-2)(m\in\mathbf{R})$的直线 $l$ 的斜率。

(2)设直线的斜率为 $k$，且 $-2<k<3$，求直线倾斜角 $\alpha$ 的范围。

**解** (1)当 $m=2$ 时，$x_1=x_2=2$，此时 $l$ 垂直于 $x$ 轴，故斜率不存在，倾斜角为 90°；当 $m\neq 2$ 时，$k=\dfrac{1}{m-2}$，

$m>2$ 时，$k>0$，$\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{m-2}$，

$m<2$ 时，$k<0$，$\alpha=\pi+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{m-2}$。

**解** (2)当 $-2<k<0$ 时，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，故 $\pi-\mathrm{arctg}2<\alpha<\pi$；当 $0\leqslant k<3$ 时，$\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，故 $0\leqslant\alpha<\mathrm{arctg}3$。

**点评** ①通过讨论确定直线的斜率存在与否，是求斜率的前提条件。②当直线的斜率在某一区间内时，要注意对倾斜角范围的讨论。

**【讲解设计】·思路与方法**

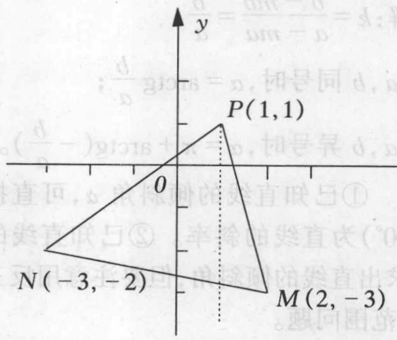
**例 3** 已知 $a,b,c$ 是三个互不相等的实数，又知三个点 $A(a,a^3),B(b,b^3),C(c,c^3)$，求证：$A,B,C$ 三点共线时，$a+b+c=0$；反之，若 $a+b+c=0$，则 $A,B,C$ 三点共线。

**提示** 利用 $k_{AB}=k_{AC}$。

**例4** 已知 $M(2,-3)$，$N(-3,-2)$，直线 $l$ 过点 $P(1,1)$，且与线段 $MN$ 相交，求直线 $l$ 斜率 $k$ 的范围。

**提示** 数形结合。

如图：$k_{PM}=-4$，$k_{PN}=\frac{3}{4}$，$k\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $k\leqslant-4$。




**【练习设计】·识记与理解**

1. 求经过下列两点的直线的斜率与倾斜角：

(1)$A(0,0)$，$B(-1,\sqrt{3})$

(2)$C(-\sqrt{3},\sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},\sqrt{3})$

(3)$P(10,8)$，$Q(4,-4)$

(4)$M(a,b)$，$N(a,b+1)$

2. 判断对错

(1)若直线的斜率存在，则必有倾斜角与之对应。

(2)若直线的倾斜角存在，则必有斜率与之对应。

(3)直线的斜率为 $k$，此直线倾斜角为 $\mathrm{arctg}k$。

(4)直线的倾斜角为 $\alpha$，此直线的斜率为 $\mathrm{tg}\alpha$。

3. 直线的倾斜角为 $\theta$，若 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，则此直线的斜率是(　　)。

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{4}{3}$

4. 等腰三角形 $ABC$ 中，底边 $BC$ 平行于 $x$ 轴，$AB$ 的斜率为 $k$，则边 $AC$ 的斜率为________。

5. 已知三点 $(2,-3)$，$(4,3)$ 及 $(5,\frac{k}{2})$ 在同一条直线上，则 $k$ 的值是 12 。

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 已知 $A(2,3)$，$B(1,5)$，直线 $AB$ 的倾斜角(　　)。

A. $\mathrm{arctg}2$　　B. $\mathrm{arctg}(-2)$

C. $\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}2$　　D. $\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$

7. 在 $y$ 轴上有一点 $M$，它与点 $(-\sqrt{3},1)$ 连成的直线的倾斜角为 $120°$，则 $M$ 点坐标为 (0,-2) 。

8. 直线 $l$ 过点 $A(1,2)$ 和 $B(m,3)$，求直线 $l$ 的斜率和倾斜角。

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 已知两点 $A(-1,-5)$，$B(3,-2)$，直线 $l$ 的倾斜角是直线 $AB$ 倾斜角的一半，求直线 $l$ 的斜率。

10. 过点 $P(-1,2)$ 的直线 $l$ 与 $x$ 轴和 $y$ 轴分别交于 $A$、$B$ 两点，若 $P$ 分 $\overline{AB}$ 所成的比 $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$，求直线 $l$ 的斜率与倾斜角。