人教版新教材

黄冈

同步学案

高二数学 上

黄冈市教学创新课题组 编写

兵法

陕西师范大学出版社

黄冈

同步学案

兵法

同步学案

黄冈兵法

主　编　王宪生
编　者　肖平安　陈红明　李新潮
袁小幼　江　佳　申　诚
邹　华　董思远　李　喆

高二数学（上）

陕西师范大学出版社

图书代号:JF4N0377

图书在版编目(CIP)数据

黄冈兵法·高二数学(上)/王宪生编 .－西安:陕西师范大学出版社,2001

ISBN 7－5613－1781－6

Ⅰ.黄…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 25526 号

责任编辑 陈焕斌　　**责任校对** 李亚利　　**装帧设计** 徐　明

出版发行:陕西师范大学出版社

(西安市南郊　陕西师大 120 信箱　邮编 710062

http://www.snuph.com　　E－mail:if－centre@snuph.com)

印　　制:陕西安康天宝实业有限公司

开本 850×1168　1/32　　印张 13.375　　插页 2　　字数 411 千

版次印次:2004 年 6 月第 4 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷

定　　价:16.50 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070－00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

五年辉煌，见证你的每一步成长

——代出版说明

时光一进入初夏，在全国各大、中书店的教辅图书卖场里，你都能看到《黄冈兵法》这一醒目的书名，以及封面上三支射向靶标的箭；也会看到众多读者在《黄冈兵法》书架前流连、翻阅的身影。《黄冈兵法》几年来走遍大江南北，走进千万个重点中学，走进千百万个渴望成功与进步的学子的心田……雪片似的读者来信从全国各地飘至编辑部，学子们倾诉成长的烦恼、阐述学习的心得、奉献对图书进行修订和改正的建议和智慧……

我们感到自豪，我们共同拥有《黄冈兵法》，她是我们与千百万个学子进行交流的窗口与平台；

我们感到欣慰，《黄冈兵法》寄托了千百万个学子的期望，见证了你生活的每一天，成长的每一步……

《黄冈兵法》作为陕西师大出版社的品牌图书，自2000年面世，便以权威、系统、实用等特点倍受广大读者青睐，迅速成长为全国著名品牌。五年来，我们倾注了无数的心血和热情，始终致力于为孜孜以求的学子提供最系统、最科学的学习、应试方案。如今，我们仍在探索、创新，力求使丛书的使用功能更加完善，图书质量更上一层楼，以贴近教改形势、贴近学生发展实际而设计不同的内容和形式，满足读者千差万别的个性化需求。

“我是广州的学生，抱着试试看的心态买了本《黄冈兵法》初二数学。哇，书里的内容设计非常丰富，多为常考题目，我特别钟爱，于是向老师推荐。老师以A级评价这本书(被老师以A级评价的辅导书寥寥无几)，并在我们年级里热情推荐，所以全年级的同学人手一本。在期末的考试里，全年级数学科平均分奇迹般地突破学校6年的纪录(平均分为96分，最高分满分，最低分87分)，这个纪录在第二学期中得到了保持……”一位广州市海珠区的中学生朋友在信中如是说。五年来，《黄冈兵法》陪伴着无数学子们的日常学习、备考复习，像一位饱学的良师益友，为大家答疑解惑，清除学习道路上的障碍。正是由于这些实实在在的效果，

出版说明

《黄冈兵法》赢得了读者朋友们的认同和信赖，连年畅销，深受市场欢迎。

那么，《黄冈兵法》到底有什么独特之处呢？太原市山西大学附中的一位初三学生在信中这样评价："作为《黄冈兵法》的忠实读者，我很庆幸可以在每学期都拥有这样一本内容全面、质量很高的辅导书，它从启迪思维方法出发，精选例题，全方位、多角度地讲解知识点，为我打下了坚实的基础，特别是分级训练、思维延伸等板块，既巩固了课本知识，又深入解剖教材，全面提高了我的解题能力，使我从中等水平一跃成为班上前五名……"一位山东省临沂一中高二的学生在来信中写到："我对《黄冈兵法》的评价非常高，它最大的特点是针对性强，简洁实用，练习题有层次，答案详尽，重视思路提示，很适合像我这样理解能力较弱的中等生使用，我非常高兴，终于买到了物有所值的参考书……"

的确，《黄冈兵法》在编写中，一贯突出"知识、能力、素质"三元合一的教学模式，旨在建构全新的"实践、探究、创新"三位一体的教学理念，侧重学法指导，启迪思维方法。"实用"是《黄冈兵法》最大的优势，不仅因为丛书代表中国基础教育的发达地区——黄冈地区最高的教学水平，还体现在《黄冈兵法》的前瞻性上，中、高考试题的预测命中率相当高。以高考为例来说，《黄冈兵法》每年都有相当数量的原创题与当年高考题相同或相似，体现在分值上，2000 年有 18 分，2001 年有 51 分，2002 年有 131 分，2003 年有 107 分，几年下来，分值累计高达 307 分。而中考试题命中率更高，几年粗略估计，各地市试卷总计也有 500 多分。《黄冈兵法》凭借着特有的魅力和雄厚的实力，赢得了广大读者的青睐。

《黄冈兵法》出版几年来，先后荣获全国优秀教育图书奖和全国优秀畅销书奖。在一片赞誉声中，丛书策划人和作者们并没有丝毫的懈怠，而是积极搜集教改前沿信息，不断地推出最新教研成果，并迅速地转化为最新的栏目设计和内容设计，以求不断地提高丛书的质量和使用效果。我们的追求，是以《黄冈兵法》为火种，点燃全国中学生创新思维的火把，指引大家走进名牌大学的大门。

《黄冈兵法》策划组

MU LU 目录

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

6.1.1 不等式的性质(一)

知能转化导引 通过本节的学习,要求了解同向不等式与异向不等式的概念,理解并掌握实数运算的符号法则及两实数大小顺序之间的关系,熟练掌握比较两实数大小的基本方法——作差法.

本节的主要内容有:

(1) 不等式定义

用不等号(<、>、≤、≥、≠)表示的不等关系的式子叫不等式,用“ >”或“ <”号连结的不等式叫严格不等式;用“≤”或“≥”号连结的不等式叫非严格不等式.

(2) 同向不等式与异向不等式

对于两个不等式,如果每一个的左边都大于(或等于)右边,或每一个的左边都小于(或等于)右边,这样的两个不等式叫同向不等式. 如$f(x)>g(x)$与$S(x)>T(x)$是同向不等式,$f(x)\leq g(x)$与$S(x)\leq T(x)$也是同向不等式. 类似地可定义异向不等式.

(3) 实数的运算性质与大小顺序之间的关系

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

方法技巧规律 (1) 实数的运算性质与大小顺序之间的关系是建立不等式理论体系的基石,为实数的大小比较,不等式

的证明以及解不等式提供了依据，学习时要认真领会其性质，对命题中双向箭头“⇔”要正确理解，它表示两端的命题可以互相推出，具有等价性，与单向箭头“⇒”含义不同，应注意区别，不可混淆.

(2) 作差法比较两个实数的大小是本节的重点，学习时应结合实例了解套路，注意常用变形手法，其关键是作差后判定代数式的符号，一般采用因式分解、配方手段或根据函数的性质来判断.

能力升级捷径

【例1】 已知 $a \geqslant 1$，记 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$，$N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$，则 (C)

A. $M>N$ B. $M=N$ C. $M<N$ D. 不能确定

分析 采用作差比较法，为使差值符号便于判断，可考虑分子有理化.

解答 $M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}$$

∵ $a \geqslant 1$，

∴ $\sqrt{a-1}<\sqrt{a+1}$，即 $\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}<0$.

又∵ $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0$，$\sqrt{a-1}+\sqrt{a}>0$，

∴ $M-N<0$，即 $M<N$.

故正确答案为 C.

技巧点 对于差式的符号的判断，一定要观察差式的特点，采用合理的变形手段. 有些时候可直接比较，但更多的时候需进行等价转换. 譬如此题中 $M-N=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})-2\sqrt{a}$，而 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$ 与 $2\sqrt{a}$ 的大小容易通过比较二者的平方得到.

延伸点

2a 4a

1. 若 $a\neq 2$，$b\neq -1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 的值与 -5 的大小关系是 (A)

A. $M>-5$ B. $M<-5$ C. $M=-5$ D. 不能确定

分析 先作差，后配方判断差式的符号.

解答 $M-(-5)=a^2+b^2-4a+2b+5$

$=(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)$
$=(a-2)^2+(b+1)^2$

$\because\ a\neq2,b\neq-1,\quad\therefore\ (a-2)^2+(b+1)^2>0,$

$\therefore\ M>-5$,故选 A.

2. 设 $a>5$,则 $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}$ 与 $\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$ 的大小关系是______.

分析 转化为比较 $\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5}$ 与 $2\sqrt{a-4}$ 的大小,可先平方再作差比较.

解答 判断 $\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5}$ 与 $2\sqrt{a-4}$ 的大小,即比较 $(\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5})^2$ 与 $(2\sqrt{a-4})^2$ 的大小.

即 $a-3+2\sqrt{(a-3)(a-5)}+a-5$ 与 $4(a-4)$ 的大小. $2a-8$

只需比较 $2\sqrt{(a-3)(a-5)}$ 与 $2(a-4)$ 的大小, $4a-16$

只需判断 $a^2-8a+15$ 与 $a^2-8a+16$ 的大小, $2a-8$

容易得到 $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}<\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$.

【例 2】 若 $0<a<b$,且 $a+b=1$,则将 $a,b,\frac{1}{2},2ab,a^2+b^2$ 从小到大排列为 $a<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<b$

分析 首先容易得到 $a<\frac{1}{2}<b,a^2+b^2>2ab$,然后利用作差去比较两组之间的关系.

解答 $\because\ 0<a<b,a+b=1,$

$\therefore\ 0<a<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<b<1$,又 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0.$

$\therefore\ a<\frac{1}{2}<b,2ab<a^2+b^2,$

$(a^2+b^2)-b=a^2+(1-a)^2-(1-a)=2a^2-a=a(2a-1).$

$\because\ 0<a<\frac{1}{2},\quad\therefore\ 2a-1<0.\quad\therefore\ a^2+b^2<b,$

$$2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}=-2a^2+2a-\frac{1}{2}$$
$$=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0.$$

$\therefore 2ab<\frac{1}{2}.$

$a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$

故此，$a<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<b$

技巧点　三个、四个(或多个)实数的比较大小，一般是视具体情况先分组，然后分别比较组内与组间的数的大小，最后排定顺序.

延伸点

1. 若 $-1<a<b<0$，试比较 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，a^2，b^2 的大小关系. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<b^2<a^2$

分析　首先易判断 a^2，b^2 是正数，$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$ 是负数，只需分别比较 a^2 与 b^2 及 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

解答　$\because\ -1<a<b<0$，$\therefore\ -a>-b>0$

$\therefore\ a^2>b^2>0$

又 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，$\therefore 0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$\therefore\ a^2>b^2>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2. 设实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases} y+z=6-4x+3x^2 & ① \\ z-y=4-4x+x^2 & ② \end{cases}$$

$z>y>x$

试确定 x,y,z 间的大小关系.

分析　由②易得 z 与 y 的大小关系，由①、②两式消去 z 可得 y 与 x 的大小关系，x,y,z 的大小关系有望获得.

解答　$\because\ z-y=4-4x+x^2=(x-2)^2\geqslant 0$，

$\therefore\ z\geqslant y$.

又①－②得　$y=x^2+1$.

$\therefore\ y-x=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore\ y>x$，

$\therefore\ z\geqslant y>x$(当且仅当 $x=2$ 时取等号).

【例3】　设 $m>n>0$，$a>0$，比较 a^m+a^{-m} 与 a^n+a^{-n} 的大小.

分析　采用作差比较法，要注意运用幂的运算性质对差式进行化简，并

运用指数函数的性质判断差值与零的大小关系.

解答 $(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})$

$$=a^m+\frac{1}{a^m}-a^n-\frac{1}{a^n}$$

$$=(a^m-a^n)(1-\frac{1}{a^m a^n})$$

$$=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}$$

(1) 当 $a=1$ 时, $a^m=a^n=a^{m+n}=1$,

$\therefore\ (a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})=0$;

(2) 当 $a>1$ 时, $\because\ m>n>0$,

$\therefore\ a^m>a^n, a^{m+n}>1$,

$\therefore\ \frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}>0$, 即 $(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})>0$;

(3) 当 $0<a<1$ 时, $\because\ m>n>0$

$\therefore\ a^m<a^n, 0<a^{m+n}<1$,

$\therefore\ \frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}>0$, 即 $(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})>0$

综上可知, 当 $a=1$ 时, $a^m+a^{-m}=a^n+a^{-n}$; 当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时, $a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$.

技巧点 作差与变形后, 仍无法确定差的符号时, 需对参数分类讨论, 不等式的研究中, 分类讨论的思想极为重要, 应从头开始, 用心体会.

延伸点

1. 设 $x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq-1$, 比较 $\frac{1}{1+x}$ 与 $1-x$ 的大小.

分析 作差变形到最简形式后, 对字母的取值分类讨论, 确定符号.

解答 $\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$

(1) 当 $x=0$ 时, $\frac{x^2}{1+x}=0$, $\therefore\ \frac{1}{1+x}=1-x$;

(2) 当 $1+x<0$, 即 $x<-1$ 时, $\frac{x^2}{1+x}<0$, $\therefore\ \frac{1}{1+x}<1-x$;

(3) 当 $1+x>0$ 且 $x\neq0$, 即 $-1<x<0$ 或当 $x>0$ 时, $\frac{x^2}{1+x}>0$,

高二数学

$\therefore\ \dfrac{1}{1+x}>1-x.$

2. 已知 $f(\lg x)=\lg\dfrac{x+x^{-1}}{2}$，又设 $A=f(x+1)$，$B=f(x)+f(1)$，试比较 A 与 B 的大小.

分析　先求出 $f(x)$，化简 A、B，然后再设法比较 A、B 的大小.

解答　令 $t=\lg x$，则 $x=10^t$，由已知得

$$f(t)=\lg\frac{10^t+10^{-t}}{2}，即 f(x)=\lg\frac{10^x+10^{-x}}{2}$$

$$\therefore\ A=f(x+1)=\lg\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2},$$

$$B=f(x)+f(1)=\lg\frac{10^x+10^{-x}}{2}+\lg\frac{10+10^{-1}}{2}$$

$$=\lg\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}+10^{-x+1}+10^{x-1}}{4}$$

$$\because\ \frac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}-\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}+10^{-x+1}+10^{x-1}}{4}$$

$$=\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}-10^{-x+1}-10^{x-1}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(10-10^{-1})(10^x-10^{-x})\begin{cases}>0 & (x>0),\\ =0 & (x=0),\\ <0 & (x<0).\end{cases}$$

又 $y=\lg x$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的增函数，

$\therefore\ x>0$ 时，$A>B$；$x=0$ 时，$A=B$；$x<0$ 时，$A<B$.

综合能力测试

基础能力测试

$x^2-2x+1\geq 0$

一、选择题

1. 设 $a=3x^2-x+1$，$b=2x^2+x$，则　　　　(C)

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a\geq b$　　D. $a\leq b$

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$x=a^3+b^3$，$y=a^2b+ab^2$，则 x 与 y 的大小关系为　$x-y=(a+b)(a-b)^2$　　(A)

A. $x>y$　　B. $x=y$　　C. $x<y$　　D. 不能确定

3. 若 $x>1$，则下列不等式中恒成立的是　　　　(D)

新教材同步学案

A. $(\frac{1}{2})^{x-1}>1$　　B. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geqslant 0$

C. $\log_{\pi}(x-1)\geqslant 0$　　D. $2^{x-1}>1$

4. 已知 $a+b>0, b<0$，那么 $a,b,-a,-b$ 的大小关系为　　(C)

$a>-b>b>-a$

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$　　D. $a>b>-a>-b$

$b>-a$

5. 设 $0<x<1$，那么下列各式中成立的是　　(B)

A. $x^{\frac{1}{3}}<\lg x<3^x$　　B. $\lg x<x^{\frac{1}{3}}<3^x$

$0<x^{\frac{1}{3}}<1$　$3^x>1$

C. $\lg x<3^x<x^{\frac{1}{3}}$　　D. $x^{\frac{1}{3}}<3^x<\lg x$

6. 若 $a>0$，且 $a\neq 1$，$M=\log_a(a^3+1)$，$N=\log_a(a^2+1)$，则 M,N 的大小关系为　　(C)

$a>1$时 $a^3+1>a^2+1$

$0<a<1$时 $a^3+1<a^2+1$

A. $M<N$　　B. $M\leqslant N$　　C. $M>N$　　D. $M\geqslant N$

二、填空题

7. 若 $a^2+4a>-4$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ~~$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$~~ .

$a\neq -2$

8. 若 $T=3+\sqrt{7}$，$Q=1+\sqrt{15}$，$P=\sqrt{17}$，按从小到大的顺序排列 T、Q、P 为 $P<Q<T$

9. 若 $m>1, n<1$，则下列两式的大小关系为 $mn+1$ $<$ $m+n$.

$mn+1-m-n$

$(1-m)(1-n)<0$

三、解答题

10. 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

11. 已知 $a>0, b>0$，且 $a\neq b$，比较 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小.

12. 设 $a,b,m,n\in\mathbf{R}^+$，且 $m+n=1$，试比较 $\sqrt{ma+nb}$ 与 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小.

发展思维训练

1. 设 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$，其中 $x>0$ 且 $x\neq 1$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

2. 甲、乙两车从 A 地沿同一路线到达 B 地，甲车一半时间的速度为 a，另一半时间的速度为 b，乙车用速度为 a 行走一半路程，用速度为 b 行走另一半路程，若 $a\neq b$，试判断哪辆车先到达 B 地.

6.1.2　不等式的性质(二)

知能转化导引

通过本节的学习，要求能理解并掌握不等式的5个性质定理及其3条推论，要会对上述性质进行严格的证明，会对不等式性质进行初步的运用.

本节的主要内容有：

定理1　(对称性) $a>b\Leftrightarrow b<a$

定理2　(同向传递性) $\left.\begin{matrix}a>b,\\ b>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a>c$

定理3　$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

推论　(同向相加法则) $\left.\begin{matrix}a>b,\\ c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d.$

定理4　$\left.\begin{matrix}a>b,\\ c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bc,\left.\begin{matrix}a>b,\\ c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc.$

推论1　(非负数同向相乘法则) $\left.\begin{matrix}a>b>0\\ c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd.$

推论2　$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$　($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).

定理5　$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$　($n\in\mathrm{N}$，且 $n>1$).

其中证明不等式的性质及推论是重点，掌握不等式性质定理的条件与应用是本节的难点.

方法技巧规律

1. 学习不等式的性质时，可将不等式的性质与等式的性质进行类比，要特别注意它们之间的区别，这样可加深认识，避免解题中的一些错误. 譬如等式两边同乘一个非零的数仍为等式，而不等式中则需明确此数的符号以确定不等号是否变向.

2. 不等式的性质及其证明方法，是学习不等式证明的基础，为了达到深刻理解、准确记忆不等式性质的目的，学习时，要紧紧抓住不等式性质的条件，认真分析它们的相同点、不同点，并能通过反例加深理解与记忆. 在学习性质的证明时，要仔细体会各性质的证明思路，逐步养成用逻辑推理进行数学证明(特别是代数证明)的习惯与能力.