漢譯世界名著

實數探原

R. Dedekind 著
朱言鈞譯註

商務印書館發行

漢譯世界名著

實　數　探　原

R. Dedekind 著

朱言鈞譯註

中華民國二十九年十二月初版

(53558)
漢譯世界名著 實數探原一册
Two Essays on the Concept of Numbers

每册實價國幣陸角 #2.928
外埠酌加運費匯費

原著者 Richard Dedekind
譯註者 朱言鈞
發行人 王雲五 長沙南正路
印刷所 商務印書館
發行所 商務印書館 各埠

H一七五二上

譯餘贅語

凡可證之理,不可置之不證而遽信之,此人人所共喻,不待言而自明者. 惟欲證一理,必有他理,爲其所據,而所據之理,又必有其所據以爲推. 循是以論,必有最後不可證之理而後證明之事始有可能. 然則何者可證,何者爲不可證,不可證者何以知其爲確切不易之眞理;諸如此類問題,切而言之,則係乎學術系統之嚴密,遠而論之,則有關人類認識之本原,其間層累曲折之關係,殊有幽渺而難明者. 數學之所本者爲實數之義; R. Dedekind 深追遠溯,窮其流而討其源,證其所可證,明其所不可證;其不朽之著作有二,一曰"連續性與無理數",二曰"數之意義",精微潔淨,發前人所未發,造端宏大,實開晚近研討數學基礎問題者之先河. 實數果何謂乎? 實數之起源何自乎? 讀此兩文,可以發人深思,哲學家之討論認識問題者亦當知所問津矣.

R. Dedekind 生於西曆一八三一年,卒於一九一六年,求學於德國之荷庭根 (Goettingen),掌教於 Zuerich 及 Braunschweig,爲一代之數學大師. 新義之發明,恆有歷數十年數百年而後一見,乃時會爲之,非可強求;若 Dedekind 之發明,誠可謂有史以來罕見之寶;文化先進之國無不刊有譯本,吾國豈能獨付闕如. 不佞譯此,在民國二十四五年之交,自

愧譾陋,不足達作者深旨;初意欲自撰一文,附於譯文之後,詳述數十年來數學基礎研究之進展,藉以闡明 Dedekind 影響之偉大,奈人事卒卒,迄未有成;茲承商務印書館諸公之熱心援助,先將譯文刊行,此願之償,惟有俟諸異日而已.

一

目　次

實數探原

連續性與無理數

余著此文之動機,遠在一八五八年之秋;時余承乏 Zürich 工業學院講席,爲諸生講授微分學,深覺解析之學,尙闕一美滿之基礎.如當說明一變數向一極限收歛,或證明任何變數,苟永遠趨大或趨小而其値始終有涯者必有一極限之類,非求助於幾何方法不爲功.幾何方法之應用,在初習微分學者,自有其教育上之意義,且爲節省講授之時間計,亦殊有不得已者.惟以幾何方法說明解析學中之概念或證明解析學中之定理,在學理上爲一絕大缺點,實爲無可諱言之事.余爲此常耿耿於心,乃反覆深思,期在必得一純粹論數之原則,爲解析學立一不拔之基礎.嘗思解析學中有論及連續變數,而所謂連續,其義何指,未嘗有一精密之定義;復觀當時所奉爲最嚴密之解析教本,其中定理之證明,亦多未能以連續性爲其應有之基礎,蓋不知不覺中常假定其他定理,而此種定理,又未能用純粹解析方法加以證明者也(註一).如上所舉之定

註一　解析學中所論,旣爲連續變數,則何謂連續,宜有一精密之定義.以此爲基,種種定理,可得而推,如是始得稱爲解析學之正軌.今不求基本概念之確立,反借助其他科學中之假定,以證此學中之定理,此 Dedekind 所引以爲憾者也.

理,卽爲其中之一例(註二).余旣詳加研討,認此項定理或與此有同等意義之定理可爲解析學之充分基礎,乃窮源竟委進而求其起源於解析學之中,因之而得一連續性之定義(註三).此事之發見,實在一八五八年十一月二十四日,後數日卽以告吾友 Durege, 因之而引起長時間之激烈討論.其後除與一二門弟子商榷外,曾在 Braunschweig 各教授之學術團體中作簡略之報告,惟稽延至今,尙未著文公之於世.今年正思發表此文之前數日,忽蒙 E. Heine 以其新著"函數論之基本" (Die Elemente der Funktionenlehre 載 Crell's Journal Bd. 74) 一文見示,其中所論,與本文不謀而合.惟自信此文對理論之關鍵所在,似有更嚴密之申述,不特形式較爲簡明而已.當余寫此序文之時,(一八七二年三月二十日)承 Cantor 賜寄其新著"三角級數理論中一定理之推廣" (Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, 載 Math. Annalen von Clebsch und Neumann Bd. 5), 接誦一過,彌覺感謝.所尤引以自慰者, Cantor 文第二節中所述之原理與余此文中第三節所

註二 連續性之義未定,欲證'一變數,苟永遠趨大或趨小而其値始終有涯者必有一極限',將自陷於循環推理之錯誤,否則亦無形中受吾人空間觀之束縛,認爲當然之理而不加以證明耳.

註三 吾人苟將上述未能證明之理作爲假定,或擇其他一理,意義與此相等者作爲假定,則解析學中種種定理或可由是而推,是卽所謂'解析學之充分基礎'.惟其如是,吾人必將此理之內容細加研討,窮其認識之起源,爲解析學求一純粹之數的基礎,此 Dedekind 自述其發明經過,足資吾人深省者也.

論之連續性,外貌雖有不同,按其實際則完全無異.至實數之集團既認爲有完備性之後,實數在概念上如復加以等次之分,究有何種利益,余此時尚不敢斷言也.

1. 有理數之特性

有理數理論之發展,當爲讀者所已知,無待本文之贅述;惟欲使立論之基礎透澈明瞭,特將有理數之起源及特性提要言之.凡屬人類,莫不知有所謂正整數.正整數者,前後相接,秩然有序,吾人既舉其居前之數,隨後之一數即追踪而至,如此相連相續,永無窮期.由居前之一數,進而至隨後之一數,此種動作爲人類本能之事;吾人無以名之,名之曰"計數之基本動作".此無窮多之正整數爲思想必要之工具,已爲世人所共認.吾人既具有此工具,復施以加減乘除四種法則以發見其間種種公例,於是吾人對正整數之認識,將隨之而益富.所謂加法,吾人苟細考其意義,不過將數次計數之基本動作相繼施行,併而爲一次動作而已(註四).乘法之意義亦然.加法與乘法在正整數範圍內雖可任意施用,惟其相逆法——加法之相逆法爲減法,乘法之相逆法爲除法——則不能暢行無阻.惟

註四 如無加法之應用,則由 5 至 8, 必先後實施三次基本動作而後可.用相加之法,將 3 加於 5 得 8, 則一次手續已足,是加 3 之事,實將三次計數之基本動作併爲一次手續.由是以觀,有加法則計數之工作可以省略.有乘法則加法之手續可以化簡;思想愈進步,時間與勞力將隨之而愈經濟;如是之例,言之甚多.

其如是,吾人不得不有他種數之創造;所謂負數,分數及零者遂因之而起.凡正整數,負整數,正分數,負分數及零統稱之謂有理數.有理數者,自成一完備獨立之系統,吾人以R之符號表之(註五).至其系統之所以得稱完備與獨立者,實由於如下之事實:吾人將R中任何兩數相加相減相乘相除,其結果必仍爲R中之一數;申言之,盡加減乘除四則之應用,其所創造者始終爲R中固有之數;緣此之故,R之系統謂之完備與獨立.惟應用除法之時,有不可不注意者,即以零除任何數爲無意義之事,故在嚴禁之列耳.

有理數之系統尙有一重要之特性,即其中之數均先後有序,排列於一單度空間 (eindimensionales Gebiet) 之內,向正負兩方向,相接相續直至無窮.此處吾人應用幾何學中之術語,以說明解析學中之事實,用意不過使意義可以益見顯明;非謂解析學中之理論,必非借用他種科學術語不可也.

吾人倘用兩種符號a與b以代表同一有理數,則$a=b$或$b=a$.所謂a, b爲兩不同之有理數,其意謂$a-b$爲一正數或爲一負數.苟其爲正數,則吾人稱a大於b:$a>b$;或b小於a:$b<a$.苟其爲負數,則$b-a$爲正,於是稱b大於a:$b>a$或a小於b:$a<b$.旣明何謂兩不同之有理數,則以下諸理之眞確,可以見矣.

註五　R之完備及獨立,Dedekind在他處已有詳盡之說明,參閱Dedekind所編之數論 (Vorlesungen ueber Zahlentheorie von P. G. L. Dirichlet. Zweite Auflage § 159).

I. 若$a>b$, $b>c$,則$a>c$(註六).無論何時,若有兩不同(或稱不相等)之數a與c,又有一數b小於a,c兩者之一數,大於其他之一數,則吾人可應用幾何術語,謂b處於a與c兩數之間.

II. 若a與c爲任何兩不相等之數,則必有無窮多不同之數如b者處於a與c兩者之間(註七).

III. 苟a爲一確定之數,則R中所含之數可由之而分爲前後兩段;兩段所含,均爲無窮;前段所含,均小於a,後段所含,均大於a.至a本身,可屬於前段,或屬於後段.苟其屬於前段,則爲前段中最大之數,苟其屬於後段,則爲後段中最小之數.但無論如何,前段中任何一數,必小於後段中之任何一數,凡此皆顯而易見之理也.

案數之起源,由於比較.比較之事,有賴於人類抽象之本能;蓋比較兩物之初,必先將其性質詳審而並觀之,苟其未爲兩者所共有則棄置之,其共有者始彼此比較之.抽其共有,去其獨有,然後可以從事於比較.常聞人言,陽貨貌似孔子,此就其容貌而比較言之.考'相似'兩字之意義,所以表示兩物間之關係,非形容一物所獨有之特性.類此之辭,不一而足.如'相親''相愛''相友'皆是;他如數

註六 此種性質,謂之序次性.

註七 假定$a>c$,則$\frac{a-c}{2}$亦爲R之中一數,且居於a,c兩者之間.每兩數之間,既有一數之可尋;由是以推,任何兩數之間.必有無窮多之數.此種性質,謂之稠密性.

學中'相似'(similar),'相合'(congruent),'相平行''相垂直'諸概念,無一不表達兩物間之關係者也.吾人試就此種關係而詳討之,亦有可得而論者.

兩物間之關係,有可易者,有不可易者.何謂可易?如陽貨貌似孔子,則孔子貌亦似陽貨;如嚴又陵爲伊藤博文之同學,則伊藤博文亦爲嚴又陵之同學,此其關係,謂之可易.數學中如平行,如垂直,如相合,如相似皆表示關係之可易者.至若中國向美國借款,而美國未嘗向中國舉債,故'舉債'所表示者爲不可易之關係.惟此不可易之關係,僅就事實言之耳;在論理上美國向中國借債亦未始不可能.其在論理上有萬不可易者如:孔子爲子思之祖父,子思則絕對非孔子之祖父;此種關係之不可易,吾人由推理可以斷定之.因此之故,乃稱之曰必不可易之關係.

復次,有可傳(transitiv)之關係,有不可傳之關係.何謂可傳?如江蘇爲中國之一部分,上海爲江蘇之一部分,則上海亦爲中國之一部分,如是者謂之可傳.他如數學中之相似、相合、平行、垂直皆表示關係之可傳者.要之,如甲與乙發生某種關係,乙與丙發生同一關係,則甲與丙亦發生同一關係者,其關係爲可傳,否則爲不可傳.如美國借款與中國及日本,但中國與日本未嘗因此之故而發生債務關係,故其關係爲不可傳.如是之例,不勝枚舉,

讀者可自思得之.

綜觀上述之定義,乃知有如下種種不同性質之關係可言:

(1) 可易而又可傳;例如數學中之相合相似平行及垂直是.

(2) 可易而不可傳;例如朋友關係.

(3) 可傳而不可易;例如全體與部分之關係.

(4) 不可易而又不可傳;例如父子之關係.

數學中所謂相等,其義無他,一可易可傳之關係是已.反之,惟關係之可易可傳者始可加以相等兩字.歷觀以上所舉之例,凡可易可傳者,其中必含一相等之物:平行之線,其方向相等;相似之圖形,其形狀相等;以此類推,他可知已.

凡可傳而必不可易之關係,吾人名之曰序次(Anordnung).反之,普通文字中所謂序次,如'先後''左右''全分''大小'等等皆表示關係之可傳而必不可易者.例如有甲乙兩多邊形於此,所謂甲之面積小於乙,其意卽謂甲可與乙之某部分相合.全體與部分之關係既爲可傳,則大小之關係自亦可傳;至大小關係之爲必不可易,乃顯而易見之事.吾人觀察事物,細加抽象,擇性質之可傳而必不可易者創一簡明之法以表達之,於是數之概念遂因之而起.

請先舉例言之,吾人苟無數之概念,如不知'五'之應用,則吾人兩手中有相等之手指未始不可認識.何以言之?將左手各指加於右手各指之上,如是則左手之各指必有右手之一指且僅有一指與之相配,右手之各指亦必有左手之一指且僅有一指與之相配.此種關係,謂之一一相應;其爲可易可傳,自是顯而易明.據同理,吾人不必藉數之應用,亦可知吾人所有之耳目少於吾人所有之手指.其法維何?將手指加於耳目之上,則每一耳及目,誠得一指與之相配,但每一手指則未能有一耳或目與之相配;故其間之關係,未能一一相應.由耳目所組成之集團僅能與手指所組成之集團之一部分相應而已;於此可知其關係爲可傳而不可易.復次,有兩盒棋子於此,其一所裝爲黑子,其他所裝爲白子.吾人以左手取黑子,同時以右手取白子,並規定每次進取時各取一子;其已取出者使之彼此相應,如是繼續爲之,直至其中之一空無所有而後已.苟黑盒先白盒而空,則黑子實與白子之一部分相應;換言之,黑子少於白子.苟其同時空無所有,則黑白一一相應;換言之,黑白子彼此相等.要而言之,兩集團所含之物苟一一相應,則其物之多相等;苟甲集團所含之物與乙集團之一部分相應,則甲所含少於乙,或乙所含多於甲.

吾人既將任何事物所組成之集團詳審而比較之,

其中有一一相應者,亦有僅與一部分相應者.一一相應者謂之相等,否則謂不相等.此'相等''多於''少於'諸字之用,所以表達關係之性質;惟其如是,此種表達方法必力求其精確;欲求其精確,必有一標準以計量之而後可.此計量之標準,凡屬人類莫不共有;其物維何,曰數而已矣.

凡有理性者無不能運用

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ……

等物,凡此種種,統稱之謂正整數.正整數本身,絕無意義可言,惟先後有序,秩然不亂,既舉其一,他即隨之,相隨相續,以至無窮.此種先後有序之數:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……

可自成一集團,謂之正整數之集團.明乎此,若有一盒黑棋於此,當吾人手取黑子之時,口中念一數字,使取出之黑子,各有一數且僅有一數與之相應;最後如得一61,則黑子之集團與正整數之集團之一部分對應,而61者即所以表示黑子之多寡.循是以論,吾人既有正整數之集團,凡有窮集團所含之多寡.均得以明顯之語表達之矣.

正整數之意義,略如上述.吾人倘將一正整數與一正整數相加,其結果必爲一正整數且爲唯一之正整數,換言之,在正整數之集團中,加法有唯一之結果,且可以暢行無阻,蓋此集團中任何兩數相加又爲其中之一數且爲其中唯一之數也.考加法之實施,實受種種法則之

束縛,如

$$a+b=b+a \qquad \text{(加法之交換原理)}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{(加法之結合原理)}$$

此法則之眞確,人人公認之而不疑;因此之故,遂以原理稱之.

今欲將b個相等之正整數a相加:

$$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{\text{共}\,b\,\text{個}\,a}$$

其結果與b乘a,即ba同;於是知乘法之用,所以使加法更見敏捷而已.乘法在正整數之集團中,亦有唯一之結果,且可暢行無阻,何則,任何兩正整數相乘必又爲一正整數且爲唯一之正整數故也.實施乘法之時,亦有不易之法則須遵守者,其內容如次:

$$ab=ba \qquad \text{(乘法之交換原理)}$$

$$(ab)c=a(bc) \qquad \text{(乘法之結合原理)}$$

$$(a+b)c=ac+bc. \qquad \text{(分配原理)}$$

數學中之法,常有一相逆法與之對峙;如甲爲乙之相逆法,則乙亦爲甲之相逆法,兩相逆法相繼應用之後,結果又回復原狀;加法之相逆法,減法是也.欲在正整數之集團內實施減法,有一必要之假定,即被減數必大於減數而後可.所謂由a減去b,其意即謂欲求一數c,加以b後復得a者.若被減數a不大於減數b,$a\leqq b$(此可讀作