北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

寿险精算基础

杨静平　编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

寿险精算基础

杨静平　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算基础/杨静平编著.—北京:北京大学出版社,2002.10
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 7-301-05371-1

Ⅰ.寿… Ⅱ.杨… Ⅲ.人寿保险-精算学-高等学校-教材
Ⅳ.F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036466 号

书　　　名:寿险精算基础
著作责任者:杨静平　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05371-1/O·0525
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科部 62752021
　　　　　　出版部 62754962
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
　　　　　　890×1240　A5 开本　12.25 印张　335 千字
　　　　　　2002 年 10 月第 1 版　2006 年 8 月第 3 次印刷
印　　　数:7101—10100 册
定　　　价:17.00 元

前　言

一、精算学(Actuarial Sciences)介绍

精算学是通过对未来不确定性事件的分析,研究不确定性对未来可能造成的财务影响的学科。精算学中的不确定性,包括人的寿命的不确定性或患病的不确定性、车辆因发生事故而造成的损失程度的不确定性,以及房屋建筑由于火灾造成的损失的不确定性等。诸如此类的事件,可能发生,也可能不发生。精算学是依据数学(主要是概率统计)、金融学和计算机技术等,对这些不确定性进行数量分析与预测,从而为实际的运作提供科学的依据。

传统的精算学,主要讨论保险中的不确定性。下面我们对于实际的保险分类做一初步的介绍。

通常将保险分为人寿保险(一些书中又称其为人身保险，这里使用的是一种广义的说法)和非人寿保险。人寿保险是以人的寿命、身体或健康为保险标的的保险。按照保障的范围来划分,人寿保险可分为生存保险、死亡保险、生死合险、人身意外伤害保险和健康保险。

生存保险,是指被保险人生存至保险期满,由保险人按保险合同的规定给付保险金的险种,若在保险期内被保险人死亡,则保险人不承担保险责任。

死亡保险是提供死亡保障的险种,若被保险人在保险期限内死亡则保险人支付保险金,否则保险人不予支付。

生死合险,是指被保险人无论在保险期限内死亡还是生存至保险期满,保险人都负责给付保险金的保险。生死合险同时提供生存保障和死亡保障,其中一个主要的类别是年金保险,如养老保险。

人身意外伤害保险,是指被保险人在保险期限内因意外的、外来的突发事故,使其身体遭受伤害而残废或死亡时，由保险人负责给付保险金的保险。

健康保险，是指被保险人在保险期限内因疾病等所致残疾或死亡时，由保险人负责给付保险金的保险。

非人寿保险(简称非寿险)包括汽车保险、屋主保险、运输保险、责任保险、信用保险、保证保险等。其中，汽车保险和屋主保险是非寿险中业务量较大的险种。汽车保险是指对由汽车事故带来的损失(车主、第三者的身体伤害及财产的损失等)进行部分或全部保障的保险险种。屋主保险(homeowners insurance)是一种复合的保险，这种保险承保多种风险事故(如火灾、暴风雨、偷窃等)造成的损失。

相对于保险的分类，传统的精算学又分为寿险精算学和非寿险精算学。寿险精算学主要是以人寿保险中的不确定事件为对象，建立数理模型，综合考虑被保险人的寿命因素及保险人的投资收益状况，从而为实际的寿险操作提供理论的依据。其中，关于生存保险、死亡保险、生死合险的精算理论与关于人身意外伤害保险、健康保险的精算理论有较大的差别。前者的保险事故为个体的死亡或生存期满，可以直接基于被保险人的生存规律和保险人的投资状况等来讨论。而人身意外伤害保险考虑的是意外事故是否发生，这些意外事故包括如飞机失事、火车碰撞等，人身意外伤害保险的精算理论接近于非寿险精算的范畴。健康保险不仅要考虑被保险人残疾的程度，还需要考虑医疗费用的支出等，与前两者也有较大的区别。

一般的，非寿险在保险标的、保险期限、保险事故方面与人寿保险有很大的不同。非寿险精算学，通过对不确定性发生的可能性，以及可能造成的损失额度的预测与分析，从而为实际的保险运作提供依据。由于非寿险的保险标的之间损失的可能性及损失的额度差异较大，所以需要针对不同的保险标的分别来讨论。在这种意义上来说，寿险精算学较非寿险精算学方法更规范，理论更成熟。

寿险精算学和非寿险精算学又有很大的联系，都是以数学、金融学、计算机技术为基础。相比而言，在寿险精算学中考虑投资收益的因素较非寿险重要。非寿险中，数理统计理论发挥着重要的作用。

现在，精算学的范围不仅仅局限于保险领域内，精算学与金融学的交叉渗透是精算学发展的一个特点。一些精算理论通常被用于解决金融学中的一些问题，如债券的违约、贷款人的提前还贷等。

精算学的起源，可以追溯到1530年。当时，伦敦有一个对淋巴腺鼠疫流行状况进行早期预报的系统。该系统每周一次给出所统计的死亡人数数据。当死亡人数上升时，表明鼠疫开始流行，富人们就会从城镇迁移到乡下躲避。1693年，英国著名的天文学家E. Halley编制了第一个较完整的生命表，并提出了一些精算的理念。因此，一些精算学者认为，精算学始于1693年。现今，精算学已经成为实用领域和研究领域所共同探讨的一门学科。

二、本书的内容

本书主要介绍寿险精算学的基本理论，我们主要针对死亡保险、生存保险、两全保险来进行。建立刻画这些险种的保险人给付与收入现金流的不确定性的数理模型，利用初等概率论、利息理论等工具，对模型的性质及模型之间的关系进行深入的讨论，最后给出不同险种的保费及准备金的理论及其在实务中的计算方法。本书的先修课程为初等概率论及利息理论。书末附录一给出了利息理论基础知识与概率论基本公式，供读者学习时参考。

本书第一部分介绍单生命生存模型、多生命生存模型和多元衰减模型，这一部分是通过概率分布来刻画个体寿命的不确定性。在此基础上，第二部分围绕死亡保险、生存年金、多生命模型和多元衰减模型，建立随机给付模型，并对模型的性质及给付现金流的精算现值来进行讨论。第三部分建立保险人的签单损失量模型，重点对用于保险人给付保险金的净保费来进行讨论，对考虑费用的费用负荷保费只做初步介绍。第四部分对有效的保单建立保险人未来损失量模型，讨论净准备金理论，并给出实务中净准备金的计算方法。本书的一些章节给出了精算的实例。

本书力求较准确地介绍寿险精算学的基础性知识，包括模型的建立、基本的概念及理论的推导，同时通过许多例题帮助读者理解本书的内容，并且每章都配备了习题。本书初步地介绍了精算理论在实际中的应用，如：精算实务中净保费和净准备金的计算方法。本书力求理论与实务相结合，是寿险精算学的基础。

本书可以作为高等院校应用数学、金融、保险专业精算方向的教

材及教学参考用书。本书的内容涵盖了北美精算协会(SOA)精算师考试的第三门课程的寿险部分,可以作为参加精算师考试的参考用书。

感谢国家自然科学基金重点项目“保险信息处理与精算数学理论和方法”(19831020)的资助。

杨 静 平

2002 年 3 月 30 日

于北京大学畅春园

补 充 说 明

本书在第二次印刷中新增了对原书习题中非选择题的解答,以供读者参考。并对初版中的若干不确切处重新做了修正。山东工商学院的罗文联老师和我的硕士研究生曾辉、王珊、江艳协助我完成了课后部分习题的解答,在此表示感谢。同时再次感谢编辑刘勇先生对本书所做的努力。

欢迎诸同仁及读者不吝指正。

杨 静 平

2004 年 6 月 1 日

于北京大学理科楼

目　录

第二部分　精算现值理论

第四部分 净准备金理论

第一部分　生存模型和多元衰减模型

人寿保险是以被保险人的生存或死亡为给付条件的，通常保险人所关注的是被保险人寿命的不确定性. 本部分便是通过生存模型：单生命生存模型和多生命生存模型，并利用随机的观点来研究这种不确定性. 其中，单生命生存模型讨论的是单个个体未来的生存状况，多生命生存模型讨论的是由多个个体组合成的一个群体的生存规律，这两种生存模型均只考虑死亡因素对个体寿命的影响，模型中的个体的终止是由单个死亡因素引起的.

而本部分中所介绍的多元衰减模型，同单生命模型、多生命模型的不同之处在于多元衰减模型中会考虑到单个个体受多种因素影响的情况. 这一模型在精算实务中有广泛的应用. 如：在费率厘定过程中，需要分别考虑被保险人死亡因素及退保的因素. 企业在设计养老金方案时，需要根据参加者退出计划的原因来确定其应该享有的退休金额度. 上述问题都可以通过多元衰减模型来处理.

本部分是本书的基础部分，由三章组成. 第一章介绍单生命生存模型，第二章介绍多生命生存模型，第三章介绍多元衰减模型.

第一章中所介绍的单生命模型，考虑了单生命个体的两种状态：生存状态和死亡状态. 这一章是以概率论为工具，讨论了个体从生存状态到死亡状态的转换规律. 其中一个重要的内容是生命表的结构和对不同类别生命表的介绍. 这一章中所涉及到的理论知识在保险产品定价及准备金提取中得到广泛的应用.

在保险实务中，有些保单的给付涉及多个被保险人. 因此，第二章针对由多个单生命个体组合成的群体进行了讨论，并对其中两种应用较广泛的模型：联合生存状态和最后生存者状态进行了较深入的讨论. 同时，这一章还介绍了与多个个体的死亡次序相关的概率的计算.

第一章中已讨论了单生命个体的生存和死亡两种状态. 但在保

险实务中，需要考虑个体的多种状态，如“健康”状态、“伤残”状态、“死亡”状态等. 第三章的多元衰减模型，便是在第一章的基础上，讨论了多种状态存在的单生命模型. 这一章的内容是研究有关养老金问题的精算理论基础.

本部分主要偏重于介绍寿险精算学中的基本生存模型，并为以后介绍保险定价及准备金提取等实务方面的内容做好铺垫工作. 如果读者只对单生命模型感兴趣，则可以在学完第一章后跳过第二章和第三章的内容，直接进入第二部分的第四章.

第一章　单生命生存模型

§1.1　引　　言

本章引入了生存分布和死亡力等概念来刻画单个个体的寿命分布，并介绍生命表.

§1.2 给出生存分布和死亡力等定义. §1.3 讨论 x 岁个体的生存分布，同时介绍一些精算表示法. §1.4 分别利用随机的观点和确定的观点来讨论生存群的死亡人数. §1.5 介绍生命表及表中变量的含义. §1.6 给出在分数年龄上的三种生存分布的假设. §1.7 介绍两种特殊的生命表：选择生命表和终极生命表. §1.8 是精算实例分析.

§1.2　生 存 分 布

一个刚出生的个体，其寿命用 X 来表示. 由于个体寿命的不确定性，X 为一随机变量. 本书除特别说明，恒假定 X 的分布函数连续，且分布函数的密度存在. 由于人的寿命有限，所以严格说来 X 是有界随机变量. 为便于读者练习，本书的一些例题与习题涉及到寿命 X 为无界的情况.

记 F_X 为 X 的分布函数，密度记为 f_X. 除特别说明，均假设 $f_X(t)(t>0)$ 为连续函数. 另外，记 $K(0)$ 为此新生儿的生存的整年数，即 X 的整数部分，$S(0)$ 为 X 的小数部分，则有

$$X = K(0) + S(0).$$

下面引入生存分布的概念. 称

$$s(t) = P(X > t), \quad t \in [0,\infty) \tag{1.2.1}$$

为寿命 X 的**生存分布**（或**生存函数**），它表示个体活过 t 岁的概率.

由(1.2.1)式知分布函数 $F_X(t)$ 和生存函数 $s(t)$ 有下面的关系：

$$s(t)=P(X>t)=1-P(X\leqslant t)=1-F_X(t).$$

寿命 X 的死亡力 $\mu(t)$ 定义为

$$\mu(t)=\frac{f_X(t)}{1-F_X(t)},\quad t\in(0,\infty). \tag{1.2.2}$$

注意，当 $F_X(t)=1$ 时，我们定义 $\mu(t)=\infty$，并且定义 $0\times\infty=0$.

当 f_X 为连续函数时，有

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t<X\leqslant t+\Delta t|X>t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t<X\leqslant t+\Delta t)}{P(X>t)\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\int_t^{t+\Delta t}f_X(s)\mathrm{d}s}{(1-F_X(t))\Delta t}=\frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}=\mu(t).$$

因此 $\mu(t)$ 可理解为一个活到 t 岁的个体恰在此年龄死亡的可能性.

(1.2.2)式可变为

$$f_X(t)=\mu(t)\times s(t), \tag{1.2.3}$$

即 X 在 t 点的密度函数值，等于 t 点的生存分布和死亡力的乘积.

前面定义的 $s(t)$，$\mu(t)$ 和 $f_X(t)$ 有下面的关系.

结论 1.2.1　生存函数 $s(t)$ 和密度函数 $f_X(t)$ 可由死亡力 $\mu(t)$ 来表示：

$$s(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s},\quad f_X(t)=\mu(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s}.$$

证明　由(1.2.2)式可得

$$\mu(t)=\frac{-s'(t)}{s(t)},$$

整理得

$$(\ln s(t))'=-\mu(t).$$

所以存在常数 C，满足

$$\ln s(t)=-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s+C.$$

取 $t=0$，由 $s(0)=1$，可得 $C=0$. 从而

$$s(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s}.$$

将上式代入(1.2.3)式，得

$$f_X(t)=\mu(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s}.$$

结论证毕.

例 1.2.1 设密度函数

$$f_X(t)=\frac{1}{w},\quad 0<t<w.$$

计算生存分布 $s(t)$和死亡力 $\mu(t)$.

解 对 $0<t<w$,有

$$F_X(t)=\int_0^t \frac{1}{w}\mathrm{d}t=\frac{t}{w} \quad 及 \quad s(t)=1-F_X(t)=\frac{w-t}{w}.$$

根据死亡力的定义,对 $0<t<w$,

$$\mu(t)=\frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}=\frac{1}{w-t}.$$

注 由结论 1.2.1 及死亡力的定义知,死亡力与生存分布之间存在一一对应关系.故由例 1.2.1 可知,当死亡力为 $\mu(t)=\dfrac{1}{w-t}$,$0<t<w$ 时,寿命 X 服从$[0,w]$上的均匀分布.

例 1.2.2 设生存分布

$$s(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,$$

其中 $\lambda>0$ 为参数.求死亡力 $\mu(t)$.

解 根据死亡力 $\mu(t)$的定义,有

$$\mu(t)=\frac{-s'(t)}{s(t)}=\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\lambda.$$

注 例 1.2.2 说明寿命 X 服从指数分布时,其死亡力为常数.

下面引入两个概念来刻画个体的期望生存时间.

寿命的期望 $\mathring{e}_0$ 与生存整年数的期望 e_0,分别定义如下:

$$\mathring{e}_0=E(X),\quad e_0=E(K(0)).$$

$\mathring{e}_0$ 是新生儿寿命的期望,e_0 是新生儿的生存整年数的期望.由定义立即得

$$e_0<\mathring{e}_0<e_0+1.$$

结论 1.2.2 (1) $\mathring{e}_0$ 和 e_0 与生存函数 $s(t)$有如下的关系:

$$\mathring{e}_0=\int_0^{\infty}s(t)\mathrm{d}t,\quad e_0=\sum_{n\geqslant 1}s(n);\tag{1.2.4}$$

(2) X 和 $K(0)$的二阶矩满足下面的公式: