数学名著译丛

〔美〕S. C. 克林 著

元数学导论

上册

科学出版社

数学名著译丛

元数学导论

上册

〔美〕S.C.克林 著

莫绍揆 译

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是数理逻辑方面的一本名著．它既概括了数学基础的主要内容，也概括了这方面的若干基本方向．本书既为数理逻辑和递归函数论提供一个系统的导论，也为更新的数学基础的探讨提供一个系统的导论．

本书可供高等学校数学系师生以及有关研究人员参考．

S. C. Kleene
INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS
Van Nostrand

数学名著译丛
元 数 学 导 论
上 册
〔美〕S. C. 克林 著
莫绍揆 译
责任编辑 杨贤英
科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1984 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1984 年 11 月第一次印刷 印张：7 3/4
印数：0001—10,200 字数：197,000

统一书号：13031・2717
本社书号：3741・13—1

定价：1.45 元
2.20

译 者 序 言

本书是数理逻辑方面的一本名著，自 1952 年出版至今已重版七次，直到现在仍然被数理逻辑工作者广泛地引用着，实在是一本值得我们仔细研读的重要著作.

正如作者所说（见为中文版的序言），本书对集合论与模型论写得少了一些，但对别的方面则是作了很适当而又很好的介绍.特别值得提出的是，作者深入研究过直觉主义逻辑多年，因此本书对直觉主义逻辑作了系统的详细的介绍，这是别的数理逻辑书所少有的. 本书还详细地讨论推演过程中的依赖性与变化性，这似乎使初学者觉得麻烦而难于运用，其实这两个概念非常重要，本书对它们作了系统的讨论，是很值得我们特别注意的.

本书虽经过七次印刷，但除改正一些刊误或小毛病外，只是在两处（原书第 65 页与第 316 页）添了两个注. 为便利读者阅读，我们把这两个注改为正文的脚注，其余的改动，全部依照新版改过来了，未作特别注明.

本书还有 1957 年的俄译本，它附有相当多的脚注和六个附录，文献也有一些增加.凡有助于读者的理解的脚注，都译了过来，文献也照样补入，以便于读者参考，但对六个附录，经考虑决定不译. 这些附录[1]大体上是有关证明论的，建议读者参看有关证明论的专著.

考虑到印刷方便，对原书使用的符号作适当的修改如下:

第一，凡人名之后继以年份的（如哥德尔 1932），有时指参见书末所附参考文献，有时则否（这时，书末并没有有关文献），原书使用两种关于年份字体表示这种区别. 考虑到读者未必注意字体

---

1) 附录 I 针对 §42，II 针对 §49，§74，III 针对 §72，IV 针对 §79，V 针对 §74，VI 针对 §79，VII针对 §42，都是由于篇幅太长本书未能详列而附录补足的.

而印刷又太麻烦，因而我们仿照俄译本，改用方括号表示．凡加了方括号的（如哥德尔［1932］）表示见书末文献，不加方括号的（如克伦涅客 1886）则并非书末参考文献．

第二，原书严格区分形式变元（用一种“扁斜体”）与非形式（内容的）变元（用通常的“斜体”），但这两种字体（尤其是小写的）极难区别，在我国的出版物中也未见有使用“扁斜体”的字母的．无论为便于读者区别或便于印刷起见，都应略作更改．现在改用“黑斜体”表示形式变元，似乎更便于读者．（斜体小写表示非形式变元．）

第三，本书对定理、引理、可证公式的编号办法非常复杂，而且编号贯串全书，读者查阅非常不便．我们特编制一张“定理、引理可证公式表”，以便读者查阅．

本书早在 1958 年便已译出，由于许多原因耽搁至今．现在除根据新版作了改正外，基本上仍是旧稿，如有不当之处，尚望读者批评指正．

莫 绍 揆

于 1980 年 1 月

著者为中文版写的序言

我感到很荣幸，由莫绍揆教授翻译的我1952年的书的中译本，现在就要出版了。

我相信，经过这许多年之后，本书所处理的课题，在数学基础方面，又重新获得了它的重要性了，当然别的课题，尤其是模型论的和集合论的，也获得了当本书正在执笔时它们还未曾获得的重要性。

从我在1936年秋季的讲学开始，我便花了很多的时间去考虑材料的安排，因此，当1952年本书终于出版时，我觉得，就它所包括的内容而论，它已经达到了我不能再行改进的地步。因此，本书每次再版时，我都没有重写或改写，而只是做了很少的简单的勘误或解释，以及（在1974年）增加两个注。我希望，中国的读者将会感到，这本书是值得一读的，正如我已经确信的，本书的英文版、俄文版与西班牙文版的读者已经有这样的感觉了。

S. C. 克林

俄译本序言

虽然作为一门科学来说，数理逻辑至少从上世纪中叶起就存在了，可是在这领域里专家并不多，其成果也未被广泛周知．然而，近几十年来，特别是从1930年起，在这领域中获得了好些最重要的发现，它的发展又这样地蓬蓬勃勃，以至现在很难用一部专著来囊括所取得的全部成果，无论如何，这样的专著迄今还没有谁把它写出来．但仍然有这样的两部专著：一部是希尔伯特和伯尔奈斯的《数学基础》(卷I，1934年，卷II，1939年)；另一部是现在向读者推荐的更近代的著作：克林的《元数学导论》(1952年)，它们在国际的数理逻辑文献中起着主导的作用．

克林是最著名的专家之一，他的书既概括了数学基础的现状，也概括了这方面所产生的若干基本方向．

这里并不要求读者对逻辑或数学有任何预备知识．可是，要把作者所遗漏的证明的全部细节再详细地作出就需要有某些训练了．(不过，在精心钻研这书的过程中可以获得这种训练．) 由此可见，可以把这书推荐给初学者——如果他不怕困难的话．对于已经熟识所阐述的材料的读者来说，不仅由于该书议论的独创性和大量精辟的意见而获得益处，而且还可把它作为合适的文献史料．

这专著的第三部分基本上可以独立于其余部分来读，并作为研究递归函数论的指导，它比较简要，因而也比之外文出版社不久前出版的罗莎·培特的《递归函数论》[1](1951年)较难读．(克林这书的第三部分对一般递归函数论以及培特的专著所完全没有提到的部分递归函数论有较完全的论述，但有关原始递归这部分的材

1) 罗莎·培特，递归函数论，科学出版社，1958——译者注．

料，培特的专著却甚为丰富.）

在某些地方，证明略去了，作者也许认为可以让读者从上述希尔伯特及伯尔奈斯的著作中去找. 在作者论述中所欠缺的这些环节我们都作了专门的附录来补足了.

如果注意到我们所作的附录和一系列的注解，那么与希尔伯特及伯尔奈斯所论述的材料相比，目前这书所缺少的是一元谓词理论与希尔伯特及伯尔奈斯书末两个补充中所论述的正形式理论（关于命题演算的）以及在变函元算术的基础上所作的数学分析的形式构造（不过，对于这构造来说，一直还不知道它的无矛盾性的任何证明）.

同时，这著作也详细地考察了直觉主义系统，一般递归函数和部分递归函数的一般理论，坚钦演算，可实现性等更近代的东西，显然这已超过了没有包括这些材料的上述希尔伯特及伯尔奈斯的著作.

我们衷心地感谢作者寄来有关英文版中个别小错误的勘误表. 在俄文版中已一一作了改正.

我们也向 A. A. 库尔密季斯表示感谢，他指出了作者一个不确切的地方（§27 附注1）.

A. C. 叶森宁-沃利平

著 者 序 言

十九世纪中数学基础研究的两个相继时代，导致了集论与分析算术化而达到了最高峰，到 1900 年前后出现了新危机，从而到了一个新时代，这是由罗素与怀特黑，希尔伯特与布劳维等人的规划所支配的新时代．

1931 年哥德尔的两个不完备性定理的发表，1933 年塔斯基的关于形式语言中“真”这一概念的著作的发表，1934 年厄勃朗-哥德尔的“一般递归函数”概念的提出，1936 年与前者有关的邱吉论题的提出，这就开始了一个更新的时代，在这时代中数学工具被应用到评价先前的规划和过去所无法预见的新方向上去．

本书的目的，特别地为数理逻辑和递归函数论提供一个有系统的导论，也为更新的数学基础的探讨提供一个有系统的导论．

对内容作某些选择是必要的．重点的选择就是：在第一部分以后，集中于初等数论的元数学研究所必需的数理逻辑上，而舍弃了高级谓词演算、解析学、类型论和集论．这样的选择是因为我们在数论中可以找到较新的方法和概念的一些初步的、最简单的应用的例证，尽管这些方法和概念已经推广到其它数学分支上去，并且还可以期望不久的将来会取得越来越大的重要性．

本书是为数学专业一年级研究生(和更高年级的)以及另一些有同样数学技巧的人作教科书而写的，对后一种人来说并不要求他们有任一特殊数学分支的知识．

当作教科书来使用这书的时候，迅速地(大约两周或三周，每周三节课的时间)介绍一下第一部分(第一章—第三章)就可以了，这一部分只提供了一些必要的基础．重点研究应该从第二部分(第四章)开始，在这里让学生集中于牢固地掌握元数学方法是有决定性的．

在初读时，带星号的章节可以略去或以粗略的方式浏览一下．但有时在后面需要时要回过来再细读前面带星号的章节(例如，在读 §72 之前应先细读 §37)．

哥德尔的两个著名的不完备性定理是在第八章叙述的，但有一个引理的证明是在第十章给出的．当作者在威斯康辛（Wisconsin）大学按这计划执教时，能够在一个学期的时间内教完这十章(有时还可以略为多一点)．

其余的五章可以作为第二个学期的教材，或者用作有关的讨论班的相应的阅读材料．

如果对具有某些数理逻辑的预备知识的学生而开设递归函数论课程，或者在一位掌握了这种知识的导师指导下，那末可从第三部分（第九章）开始．对材料的选择还有别的可能性：例如，如果学生主要是对数理逻辑发生兴趣，那末可以在学完第二部分以后或者甚至在学完第七章以后就直接学第四部分的大部分内容．

我应该感谢 S. 麦克兰尼对我写这本书所作的鼓励和对许多章节的初稿所作的有价值的批评．感谢 J. 阿迪逊单独地、十分细心地阅读了这著作第一次印刷时的全部校样．还有 E.毕特、R.布利奇、A. 海丁、N. 克林、L. 林斯基、D. 纳尔逊、J. 黎诺和 G. 罗斯等人都给了我帮助．科学方面的感谢已经由参考文献的引述而表示出来了，特别大量地引用了希尔伯特与伯尔奈斯在 1934 年与 1939 年写的《Grundlagen der Mathematik》(《数学基础》)的两卷著作．

S. C. 克林

于 1952 年 7 月

符号与记号表

集　论

1-1	1	$=$	7	$-$	8	$\aleph_0$	12
$\sim$	7	$<$	9,11	O	7	$\mathfrak{D}$	14
$\subset$	8	$>$	9	0	11	$\mathfrak{S}$	14
ε	7	$\leqslant$	11	$+1$	11	$\mathfrak{U}$	14
$\notin$	7	$+$	8,15	$\{a, b, \cdots\}$	7		
$=$	7	$\cdot$	8,15	$2^{\overline{M}}$	14		

数理逻辑与形式数论

$\vdash$	89	$\exists$	71	$\cdot$	71	$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	212
$\vdash^{x_1 \cdots x_n}$	101,106	$\exists!$	217	$'$	71	$A_p(\mathbf{p})$	226
$\sim$	118	$=$	70	0	71	c	190
$\supset$	71	$\neq$	76	$\circ$	105,150	f	133
&	71	$<$	76	$\boldsymbol{ab}$	197	Pr	208
$\vee$	71	$>, \leqslant, \geqslant$	202	A(x), B(x)	79	t	133
$\neg$	71	$\mid$	207	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$	71		
$\forall$	71,161	$+$	71	$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$	113,151		

定理、引理及可证公式表

本书中对定理、引理及各可证公式的编号是贯通全书的，而且编号系统非常复杂，当在后面而征引前面的结果时，查阅非常困难，故特制本表．“例”与“系”均在各节内自行编号，极易查索，故不列入．

（甲） 定理

（乙） 引理

（丙）可证公式表

目　　录

第一部分　数学基础问题

第二部分　数 理 逻 辑

第一部分　数学基础问题

第一章　集　论

§1. 可　数　集

在讨论我们的主要内容之前，最好先简单地介绍一下康托(Cantor)的集论.

四只羊的羊群与四株树的小林可以彼此用一种方式相联系，而它们和三块石头的石堆或者七株树的小林之间却绝不能用同样的方式来联系. 虽则在纸上叙述这一不说自明的事实的时候，我们已经用了数目这样的字眼，但我们所说的关系却是形成基数这个概念的基础. 人们可以不去计数羊和树，而把它们彼此配对，例如把羊扎到树去，使得每一羊每一树都恰巧只属于一对. 把含有客体的两个集的元素作这样配对的方式叫做一一对应.

1638 年伽里略(Galileo)注意到正整数的平方可以和正整数本身配成一一对应，即

$$1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$$
$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$$

尽管依照古老的公理，全体是大于它的任何一部分的. 在 1874 年与 1897 年之间，康托根据建立一一对应的可能性，有系统地对无穷集加以比较.

在伽里略"悖论"中的两个集以及自然数集[1]

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n-1, \cdots$$

都是"可数的"无穷集的例子. 若把最后这个集取作标准，我们可

1) 通常所谓自然数是指正整数，但本书所说的自然数兼包括 0(即非负整数)——译者注.

以定义说，如果一无穷集可以与自然数建立一一对应，则它便叫做可数的(或可排的，可枚举的).

要说明一无穷集是可数的，只须指出它的元素可以排成(不重复)一个'无穷表册'，然后，在表册中的第一个便对应于 0，第二个对应于 1，以此类推. 虽则表册本身是无穷的，但每一个元素在表册中都占一个有限的位置.

对一集的元素所作的一个特定的无穷表册(不重复的)，或这个集的元素与自然数之间的一一对应，就可叫做这个集的一个枚举；一元素所对应的自然数就叫做该元素在枚举中的指标.

有穷集的元素亦可以作成表册，即有穷表册. 因此，可数的这个字眼除指那些可数无穷集以外，有时亦兼用于有穷集.

整数集是可数的，只须依如下次序列成表册即可，

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

有理数集亦是可数的，如果我们依照通常的代数上的大小次序而把它和整数集相比较，这是一件很可惊异的事情. 在 x 轴上整数点是孤立的，而有理点则是'到处稠密的'，即不管两有理点如何相近，其间还有这种点. 但这个枚举却可以用一些方法完成，这里只就正有理数而作出，对全体有理数的情形，读者可自行为之. 设把正分数列成一个无穷方阵，如下

$$\begin{array}{ccccc}
1/1 & 1/2 \rightarrow & 1/3 & 1/4 \rightarrow & \cdots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & \cdots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & \cdots \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

然后顺箭头而枚举各分数. 正有理数是能够表成带有正整数分子和分母的分数形式的. 试枚举出所有的分数，若一分数的值与前面的相同，则把该分数删除. 这样，我们便得到正有理数的一个枚举如下：

$$1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, \ldots$$