坐標幾何學

直線與圓

Briggs and Bryan著

劉鐵樓譯

商務印書館發行

劉鉄廛譯

坐標幾何學 直線與圓

熊慶來著

七年十月初版

⊕(54274·1)

坐標幾何學 直線與圓一冊

The Right Line and Circle
(Coördinate Geometry)

定價金圓壹元貳角
印刷地點外另加運費

原著者 Briggs and Bryan
譯述者 劉鐵樓
發行人 朱經農 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

平

敬以本書

獻給　雙親

並以

恭祝　父親六旬壽誕

譯者附言

原著就解析幾何學之立場，對"直線與圓"作詳盡之探討．釋義肯確，析理簡明；論質與量，允推善本．作教本（高級職業學校，高中師範科或高級師範學校適用）可，作參考書（高中普通科或理工科適用）可，作個人自修之材料亦無不可．原著者白里格（William Briggs，法學博士，民法博士，文學碩士，理學士英國皇家天文學會會員）及白里安（G. H. Bryan，理科博士，皇家學會會員前劍橋聖彼得學院給費研究生，斯密斯氏獎金之獲獎人.）二氏俱係英國科學界中之權威學者．原書問世以後，即大有不脛而走之概．是稿乃本其第十六版（修正第三版）而譯成者．［全書計分十八章，附列習題七百餘則，附圖 60 個，及卷首之方格插圖一大幅.］譯文力求信達：務使原著本意，宣表無遺，讀者閱之一目了然．譯筆工拙，非所計也．書中所有術語專詞，悉皆依據中國科學名詞審查會訂定曹惠羣先生編輯之"算學名詞彙編"爲準，期歸一律；非於萬不得已，無書可據時，決不願率爾杜撰也．［例如，原著第八章 §51 與第十章 §67 中，載有"origin side"與"non-origin side"二詞，非特"算學名詞彙編"中未曾將其列入，卽於其

他數學詞典中（如商務，中華諸書局所出版者），亦未見之. 於是，譯者乃不揣冒昧，案據原文之本意，擅自將該二詞各譯爲"原點同側"與"原點異側". 是否有當，倘希高明有以教之.]

爲使讀者明瞭內中概要起見，謹將原書特點摘述一二如次:

(i) 原著中關於命辭定理之證明，除用應有的解析 (analytical) 法而外，有時更兼舉交代 (alternative) 法以覆證之.

(ii) 原著前數章中，對"流動坐標系"之意義，常數與變數之區別，以及 (x, y); (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$; (x', y'), (x'', y''), $\cdots$ 之用法，均曾再三加以闡釋，隨時隨處促使讀者注意. 此點，在表面上觀之，固屬小節，但就事實而言，誠乃一般初學者所最易誤解與疑混者; 倘不及時予以必要之糾政，則入後必致錯誤百出，愈益莫明其所以然焉. 此乃原著者細心獨到之處，殆亦彼之教書經驗有以致之.

(iii) 關於"某點對於某直線之位置"，原著者對之頗具卓然獨特之見解. 彼曾於其原著第八章 §15 中，對若干其他教本中所引用之"正側"與"負側" (Positive side & Negative side) 二詞猛施抨擊. 彼主另以"原點同側"與"原點異側"二詞以代之. 言之有理，取之有據，縱令對方聞之，亦必爲之啞然心服也.

(iv) 第十一章中所論述之"二次方程式所表之直線",於其他解析幾何學教本中,殊少見之.

(v) "軌跡" 問題,在初等(歐氏)幾何學中頗佔重要位置;於解析幾何學中亦然. 原著對此,故曾特加注意,分設第三,第十八兩章以專論之.

(vi) 書中函題甚富,其中尤以試題及總試題(合計 319 則,佔全書習題三分之一強),誠乃不易多見之珍材,蓋以該等題材,乃係搜集昔時倫敦大學之文理科試卷而編成者;不特具有特殊的文化歷史價值,抑且類多精選之尤. 讀者於此,固未可等閑視之.

雖原著中之優點甚多,但恐譯者不敏,殊難盡彰其美耳. 倘蒙海內先進,不吝賜教,曷勝幸甚!

劉鐵樓識於雲南玉溪省立玉溪中學

民國三十五年青年節.

留空隙所致之清晰程度，必能深加體會.

大小不同之字體，乃用以表示材料之具有相當重要性者；又凡專爲有志對該科力求深造者所設之各節，概經用星號標出之.

[給與學子之暗示，概行置諸方括號中；此等暗示，於解答問題時，固毋必重行贅述也.]

所有公式，概經用大型字體顯彰之，並附列參考數目（學子每次於進讀新材料以前，必當將已述公式逐一牢記）：惟於本書前數章中，對習見公式，並不每次附註數字；蓋以其所佔篇幅有限，讀者殊不難自行發見其所在也.

初學者應予牢記，此科乃係幾何學之一種，理宜隨處儘量作圖求解. 職是之故，吾人切盼讀者慣於使用劃成糎粍之方格圖紙，以免臨時自己劃格之麻煩；蓋此亦惜省時間之一道也.

白里格
白里安 序於英國劍橋柏林敦大廈

代數學·三角術及幾何學中之重要公式與結果

（供 作 參 考 用）

二 次 方 程 式 之 性 質

令 α, β 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根.

1. 則，由解，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可得

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2. 若 $b^2-4ac=0$, 即 $b^2=4ac$,

則 α 與 β 二根相等，蓋二者各等於 $-\frac{b}{2a}$.

3. 若 b^2-4ac 爲正，二根實而不等.

若 b^2-4ac 爲負，α 與 β 俱爲虛根，又任何 x 之實值決不能滿足該方程式.

4. 不論 x 爲任何值，下列二次式必可成立：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

5. 二根之和，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$.

6. 二根之積，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

7. 若 b^2-4ac, 則式 ax^2+bx+c 爲 x 簡式之完全平方，其平方根爲

$$\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right).$$

（此處係數 $\sqrt{a}$ 不必爲有理者，但該平方根當可以無根號之 x 形式表之.）

註：吾人常用斜線置於分數之分子與分母之間，以節省地位；例如 a/b, 即 $\frac{a}{b}$.

三角術及幾何學

1. 用＋與－兩種符號以表方向.

2. 大小不拘諸角之量度.

3. 三角比之定義.

(至此等定義之解釋學者應予參考其教本.)

4. 今將在第一象限中諸特別角之比錄此以便記憶:

	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
餘弦	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$

5. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 又 $\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$.

6. $\tan(90°+A)=-\cot A=-\frac{1}{\tan A}$.

7. 若 $\tan\theta=\tan a$, 則在弧度法中 $\theta=n\pi+a$ 或以度表之 $\theta°=n.\,180°+a°$, 該處 n 爲任何整數.

"$A\pm B$ 公式", 尤以次三者爲最著:

8. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

9. $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 及 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$.

於 $\triangle ABC$ 中其三邊爲 a, b, c.

10. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ (或歐氏幾何學 II. 12, 13).

11. 若 C 爲直角, 則 $c^2=a^2+b^2$ (歐幾 I. 47).

12. 三角形之面積 $\triangle=\frac{1}{2}$ 底邊×高,

或 $\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$.

13. 相似三角形之性質歐幾 VI. 4 等.

14. 反函數之應用：若 $\tan\theta=x$,

則 $\theta=\tan^{-1}x$, 或 $\tan(\tan^{-1}x)=x$.

目　　錄

坐標幾何學

直線與圓

第一章　坐標系

1. 平面坐標幾何學(Plane Coördinate Geometry)乃代數學原理對於一平面內之點,線及圖形之幾何學方面的應用.

因其方法端賴應用諸數及代數字母以表線長,是故吾人必當愼予注意在一切場合內長度之若干確定單位,必需預爲選妥,俾可藉以表出一切其他長度.

例如,若取吋爲長度單位,則數 5 卽表 5 吋;若吾人取呎爲吾人之單位,則同數乃表 5 呎.

爲欲決定平面內一點之位置起見,概需經過二次量度.下列二例乃示其用法者.

示例.——(i) 若吾人欲將掛圖釘錘入牆上某特定點,吾人必當預爲量度該選定點遠隔該牆左隅之距離以及其隔離地面之高度.例如假設前者爲 7 呎又後者爲 6 呎.當量度時吾人必當予以指導使先沿地面自牆底左隅量度 7 呎然後鉛直向上繼量 6 呎,旋卽錘該釘於該處可矣.若吾人恆用此法而以呎爲單位,則結果必可得出該距離之量度(7, 6).

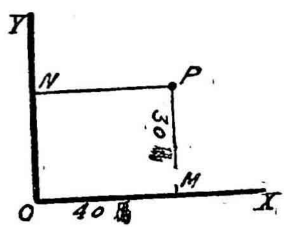

圖 1

(ii) 在圖 1 中,令 P 表矩形場地內一樹之位置,OX, OY 表圍場之籬.假設吾人量知該樹隔 OY 籬之距離 NP 爲 40 碼,又知該樹隔 OX 籬之距離 MP 爲 30 碼.既以碼爲單位,則此等數目(40, 30)自足使吾人在任何後時發見該樹所佔之

位置；蓋吾人僅需沿 OX 離自 O 至 M 步行 40 碼，然後更自之沿平行於 OY（即垂直於 OX）之方向繼續行進 30 碼而終來至 P. 若吾人先沿 OY 自 O 至 N 行進 30 碼，後更沿與 OX 相平行之方向繼行 40 碼，則如是吾人亦可同樣求得 P 點.

2. 由此等實例吾人可知——

若 OX, OY 爲平面內互成直角之任二固定直線，則在同一平面內任一點 P 之位置必可全予決定，但需確知沿 OX 及平行於 OY 所量得之距離 OM 及 MP 而已.

此等長度稱爲該點之笛卡兒*直角坐標系 (Cartesian rectangular coördinates)，或簡稱爲該點之坐標系 (coördinates). OM 曰 P 點之橫標(abscissa)，又 MP 曰 P 點之縱標(ordinate).

直線 OX 及 OY 稱爲坐標軸(axes of coördinates)，或簡稱曰軸(axes)，又其交點 O 名曰原點(origin).

就上述第二例中所釋示者而言，橫標爲 x 縱標爲 y 之點慣稱爲"(x,y) 點". † OX 稱爲 x 軸，OY 稱爲 y 軸.

該處若一點之坐標系爲未知者，則彼等幾恆用字母 x 與 y 表之；又若有若干不同點，則吾人慣加用撇點或附數以區別之；如 (x', y'), (x'', y''), (x_1, y_1), (x_2, y_2) 等是.注意橫標恆必先寫.

3. 代數符號之應用.——爲推廣坐標系對於非位於慣用象限 XOY 中諸點之使用計，吾人常予採用代數符號 $+$ 及 $-$ 以表量度坐標系所沿之方向，反號相當於反向. 坐標幾何學中所據之慣例一如三角術中者然；吾人慣視自左而右或由下而上

---

* 笛卡兒(Descartes)乃此種坐標系之發明者，故以名之.

† 學者對此必當愼予注意，蓋以此種略號吾人常使用之.

所量之長爲正，自右而左或由上而下者爲負．茲就吾人前述之二例而言，吾人假設 P 點之坐標系乃係自 O 點起自左至右繼而上達於 P 點所量得者，又此恆爲標準情形．是故吾人之慣例猶謂在 OY 右面諸點（如圖 2 中之 P 或 S 點）之橫標概視爲正，而視位於 OY 左面（如 Q 或 R 點）者爲負；又當諸點位於 OX 上部時（如 P 或 Q）則視其縱標爲正，若在 OX 以下（如 R 或 S）則視之爲負．

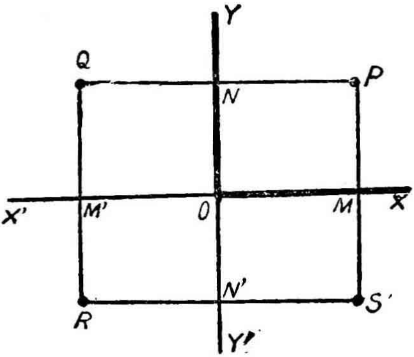

圖 2a

是故吾人可得下列一般的．

坐標系之定義.——若取［交成直角之］* 二定線爲軸，則任一點之坐標系乃爲由通過該點引作與坐標軸相平行之二平行線所構成之［直角］平行四邊形［即矩形］二隣邊之長，代數符號 + 及 − 乃用以表示自原點至該點量度此等長度時所沿之方向．

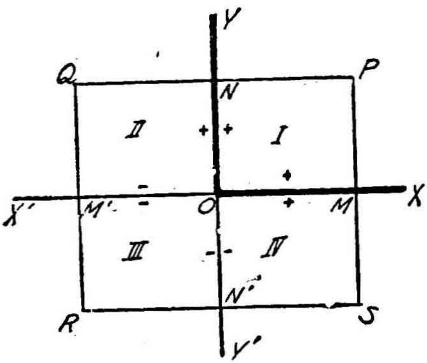

圖 2b

4. 由上述慣例所逕得之下列結果甚便吾人記憶．

* 方括號中之字在函具"斜角"軸 (oblique axes) 情形之一般定義內概須略去；至該類情形，吾人於第一編中似尚無論述之必要．

顯然,當 $x=0$ 時該點位於 y 軸上,又當 $y=0$ 時該點位於 x 軸上.

例　題

1. 於圖 2 中, OM, OM' 各具 4 個長度單位, ON, ON' 各 3 單位. 矩形 $PQRS$ 乃由通過 M, M', N, N' 四點分別引作二軸之平行線所構成者. 試求 P, Q, R, S 之坐標系.

P 點之坐標系爲 $(4, 3)$. 因 Q 在 OY 之左, 而在 OX 之上; 故就代數學之立場觀之, $OM'=-4$, $M'Q=3$, 又 Q 爲 $(-4, 3)$ 點. 仿此, $M'R=-3$, 又 R 爲 $(-4, -3)$ 點. 同樣, S 爲 $(4, -3)$ 點.

2. 求 M, M', N, N' 四點之坐標系.

顯然此等諸點各爲 $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$ [§ 4].

3. 表出四點 $(\pm 4, \pm 6)$ 及點 $(6, 4)$.

在裏封面對面一頁之插圖中,以假設已曾劃成相隔單位距離之若干直線將該紙分爲甚多小方格. 如是, 點 $(4, 6)$ 可藉沿 x 軸上劃分爲 4 分段更劃記 6 等分垂直於其上而求得之.

至點 $(6, 4)$ 吾人可沿 x 軸上先取 6 單位更繼取 4 單位垂直其上卽得.

$(-4, 6)$, $(-4, -6)$, 及 $(4, -6)$ 諸點究應表位何處, 自不難一望而知之矣.

4. 在坐標軸上量取 OA, OB, OC, OD 各等於單位長, 又將此等諸線作爲底邊而於其上各作等邊三角形其頂 P, Q, R, S 位如圖 3 中. 試求 P, Q, R, S 四點之坐標系.

作 PM, QN, RM', SN' 各 ⊥ 各該三角形之底邊. 因 $POM=60°$, 則

$$OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2} \quad 又 \quad MP=\frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad \cancel{OA=\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

故 P 乃坐標系爲 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 之點.

再者, $ON=\frac{1}{2}$, $QN=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又第二象限內 Q 點之坐標系爲 $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$. 同樣, 第三象限內 R 爲點 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, 又第四象限內 S 爲點 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.