现代外国统计学优秀著作译丛

随机过程

STOCHASTIC PROCESSES

[美] S. M. 劳斯 著

何声武
谢盛荣 译
程依明

史定华 校

中国统计出版社

现代外国统计学优秀著作译丛

随 机 过 程

［美］S. M. 劳斯 著

何声武 谢盛荣 程依明 译

史定华 校

中国统计出版社

（京）新登字 041 号

图书在版编目（CIP）数据

随机过程/（美）劳斯（Ross，S. M.）著；何声武等译.
—北京：中国统计出版社，1997.7
（现代外国统计学优秀著作译丛）
书名原文：Stochastic Processes
ISBN 7-5037-2295-9

Ⅰ. 随…
Ⅱ. ①劳… ②何…
Ⅲ. 随机过程
Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 19453 号

著作权合同登记：图字：01—97—0386 号

中国统计出版社出版
（北京三里河月坛南街 75 号 100826）
新 华 书 店 经 销
科伦克三莱印务（北京）有限公司印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 12 印张 29.5 万字
1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月北京第 1 次印刷
印数：1 — 3000 册

*

定价：26.60 元

版权公告：

Copyright notice：

随 机 过 程

STOCHASTIC PROCESSES

[美] Sheldon M. Ross

Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons，Inc.

现代外国统计学优秀著作译丛
专家委员会

主　任：

翟立功　国家统计局副局长

副主任：

贺　铿　国家统计局副局长

王吉利　国家统计局统计教育中心主任

委　员：

刁锦寰　美国芝加哥大学商学院　教授

吴建福　美国密西根大学统计系　教授

孟晓犁　美国芝加哥大学统计系　博士

张尧庭　上海财经大学数量经济研究所　教授

茆诗松　华东师范大学数理统计系　教授

陈家鼎　北京大学概率统计系　教授

郑祖康　复旦大学统计与运筹系　教授

吴喜之　南开大学数学系　教授

袁　卫　中国人民大学统计系　教授

邱　东　东北财经大学计统系　教授

郝国印　国家统计局统计教育中心副主任

谢鸿光　中国统计出版社副总编

办公室：

刘启荣　国家统计局统计教育中心教材处处长

严建辉　中国统计出版社第二书籍编辑部主任

李　毅　国家统计局统计教育中心教材处副处长

出 版 说 明

为了加强对国外统计理论与实践的研究和了解，全面反映国外统计科研和教学的发展，促进我国统计教学改革和教材内容更新，在国家统计局领导的大力支持下，全国统计教材编审委员会组织翻译出版了这套“现代外国统计学优秀著作译丛”。

随着我国社会主义市场经济体系的逐步建立，统计教育正面临着十分严峻的挑战。一方面，在社会主义市场经济条件下，不论国家的宏观经济调控还是企业的生产经营管理，都要求准确地把握市场运行的态势，科学地分析经济中各种错综复杂的关系，因而，对统计信息的需求越来越大，对统计人才的业务素质提出了更高的要求；另一方面，我国过去的统计教育模式是按为高度集中的计划经济管理体制服务的要求建立的，培养的统计人才的知识结构比较单一，难以适应经济体制、统计体制改革的需要。为使统计人才的培养适应建立社会主义市场经济体制的需要，满足二十一世纪现代化建设的要求，缩小与国际先进水平的差距，基础在教育，关键在教材。在继续组织有关专家、学者编写一批反映国内统计科学和统计实践发展的新教材的同时，必须尽快引进并翻译出版一批外国先进统计教材。这是学习外国先进统计知识的一

种直接而且十分有效的方式，对于推动国内统计教材内容更新和教学改革，造就一大批具有渊博知识和多方面业务技能的复合型人才，具有十分重要的意义。

为了做好这套丛书的翻译出版工作，全国统计教材编审委员会成立了现代外国统计学优秀著作译丛专家委员会，对国外统计著作的出版和使用情况进行了调查研究，分析了国内对外国统计教材的需求，在此基础上制定了翻译著作选题规划。在这套丛书的翻译出版过程中，我们得到了国内外有关专家、有关院校统计系和国外有关出版公司的大力帮助和支持，在此表示衷心的谢意。

全国统计教材编审委员会

1995 年 7 月

译 者 序

S. M. 劳斯著的《随机过程》是一本值得引进与借鉴的应用随机过程的优秀教材。劳斯是著名的美国应用概率专家，加利福尼亚大学伯克莱分校工业工程与运筹学系教授，《Probability in the Engineering and Informational Sciences》杂志的主编，著有大量的应用概率论文与研究报告以及一系列概率论与随机过程的教材。《随机过程》一书于 1983 年由 John Wiley 父子公司出版，列入 Wiley 概率论与数理统计丛书。

《随机过程》一书包括了应用随机过程的主要内容，只是很少涉及平稳过程，在应用中后者往往被归之于时间序列分析，通常属于随机过程统计的范围。然而，使本书富有特色的是它的处理、叙述与论证方法。正如作者在序言中所说，本书竭力以概率的观点来讲述随机过程的理论，而不是过份依赖于分析方法，沉溺于大量的计算之中，真正显示出概率分析的特点，这正是近代成熟的概率论的标志。但是本书也没有因此而期求测度论及其它的高级数学工具，而是始终一贯地使用富有启发性，又是非常有趣的直观推导的方法，这是十分难能可贵的。即使专门从事理论研究的概率统计学家也是少不了这种方法的。书中有意安排并反复使用一些对解决应用概率问题十分有用的数学技巧，便于读者学会使用。由于作者有十分丰富广泛的应用背景，使书中的大量例子引人入胜，特别，其中一些需要创造性地运用随机过程知识、系统地解决的实际问题给我们提供了应用概率研究的实例。总之，对于只掌握初等概率论及工科高等数学的读者，本书是学习应用随机过程的优秀入门书，既能了解基本内容，又能学到解决问题的

方法、思路与技巧；特别，如能在教师精心讲授或指导下学习，定能获益匪浅。鉴于我国的应用概率研究尚在初创阶段，缺乏自己的应用背景，引进这样的教材更显得必要。

本书第 1 至第 5 章由谢盛荣译，第 6 与第 7 章由何声武译，第 8 章由程依明译，全部译稿由何声武修订定稿，原书中较明显的印刷错误及个别不当之处已作订正。限于译者的水平，译稿中错误或可商榷之处在所难免，敬请读者批评指正。

译者诚挚地感谢史定华教授为审订译稿及国家统计局统计教育中心教材处诸多同志为出版本书付出的辛勤努力。

译　者

1997 年 5 月

序　言

本书是随机过程的入门教材，没有用到测度论，仅以微积分及初等概率论知识为前提。在本书中我们要介绍随机过程理论的若干内容，并指出其各种应用领域，同时提供给学生一些思考问题的概率直观想法及思路。只要有可能，我们都试着从概率的观点而不是分析的观点去考察随机过程。例如，这样的意图使我们从样本路径的观点去研究大多数的随机过程。

我要感谢 Mark Brown，Cyrus Derman，Shun-Chen Niu，Michael Pinedo，Zvi Schechner 的甚有裨益的评论意见。

S.M. 劳斯

1 基础知识

1.1 概率

概率论的一个基本概念是随机试验：其结果在事先不能确定的试验。所有可能的试验结果的集合称为试验的样本空间，我们以 S 表示。

一个事件是样本空间的一个子集，如果试验的结果是该子集中的元素，则称该事件发生。假设对样本空间 S 的每一个事件 E 定义了一个数 $P(E)$，满足以下三条公理*)：

公理(1)　$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$。

公理(2)　$P(S)=1$。

公理(3)　对任何一列互不相容的事件 $E_1, E_2, \cdots$，即 $E_iE_j=\phi$, $i \neq j$ (ϕ 是空集)，有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$。我们称 $P(E)$ 为事件 E 的概率。

公理(1)、(2)及(3)的一些简单推论如下：

1.1.1　如果 $E \subset F$，则 $P(E) \leqslant P(F)$。

*)　事实上 $P(E)$ 只对 S 的所谓可测事件有定义，但我们不涉及这一限制。

1.1.2 $P(E^c)=1-P(E)$，其中 E^c 是 E 的余集。

1.1.3 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(E_i)$，当 E_i 互不相容时。

1.1.4 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(E_i)$。

不等式(1.1.4)称为布尔不等式。

概率函数 P 的一个重要性质是连续性。为了更精确地阐明这一性质，需要引进极限事件的概念，其定义如下：若 $E_n\subset E_{n+1}$，$n\geqslant1$，称事件序列$\{E_n,n\geqslant1\}$为递增的；而当 $E_n\supset E_{n+1}$，$n\geqslant1$，时则称为递减的。如果$\{E_n,n\geqslant1\}$是一递增的事件序列，那么我们定义一个新的事件，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$：

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad 当\ E_n\subset E_{n+1},\quad n\geqslant1$$

类似地，如果$\{E_n,n\geqslant1\}$是一递减序列，那么定义 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ 为

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i,\quad 当\ E_n\supset E_{n+1},\quad n\geqslant1$$

现在我们可以叙述下面的命题：

命题 1.1.1

如果$\{E_n,n\geqslant1\}$是递增的或递减的事件序列，则

$$\lim_{n\to\infty}P(E_n)=P(\lim_{n\to\infty}E_n)$$

证明 首先假设$\{E_n,n\geqslant1\}$是递增序列，并定义事件 F_n，$n\geqslant1$，为

$$F_1=E_1,$$

$$F_n=E_n(\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i)^c=E_nE_{n-1}^c,\qquad n>1$$

即 F_n 由包含在 E_n 中但不在任何前面的 E_i $(i<n)$ 中的点组成。容易验证 F_n 是互不相交的事件，满足

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\ \ 和\ \ \bigcup_{i=1}^{n}F_i=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\qquad 对一切\ n\geqslant1$$

于是

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{\infty}P(F_i) \qquad\qquad \text{(由公理(3))}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(F_i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{i=1}^{n}F_i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(E_n)
\end{aligned}
$$

这证明了$\{E_n,n\geqslant 1\}$递增时的结论。

如果$\{E_n,n\geqslant 1\}$是递减序列，则$\{E_n^c,n\geqslant 1\}$是递增序列；因此，

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^c)=\lim_{n\to\infty}P(E_n^c)$$

但因$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)^c$，可见

$$1-P(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}[1-P(E_n)]$$

或等价地

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)$$

结果得证。

例 1.1 (a)　考虑一个群体，它由能产生同类后代的个体构成。初始的个体数用X_0表示，称为第 0 代的总数。第 0 代的全体后代构成第 1 代，其总数以X_1表示。一般地，以X_n表示第n代的总数。

由于$X_n=0$蕴含$X_{n+1}=0$，所以$P(X_n=0)$是递增的，故$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=0)$存在。它表示什么呢？要回答这个问题，运用命题 1.1.1 如下：

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}P\{X_n=0\}&=P\{\lim_{n\to\infty}\{X_n=0\}\}\\
&=P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=0\}\}\\
&=P\{\text{群体迟早灭绝}\}
\end{aligned}
$$

即第n代没有个体的极限概率等于此群体最终灭绝的概率。

命题 1.1.1 还能用来证明波莱尔—坎泰利引理。

命题 1.1.2　波莱尔—坎泰利引理

设E_1，E_2，…为一列事件。如果

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)<\infty$$

则

$$P\{无穷多个 E_i 发生\}=0$$

证明 无穷多个 E_i 发生，这一事件记作 $\limsup\limits_{i\to\infty}E_i$，它可表示为

$$\limsup_{i\to\infty}E_i=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$$

因为若有无穷多个 E_i 发生，则 $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$ 对每个 n 都发生，从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$ 发生。另一方面，如果 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$ 发生，则对每个 n，$\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$ 发生，从而对每个 n 至少有一个 $i\geqslant n$ 使 E_i 发生；因此有无穷多个 E_i 发生。

因 $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$，$n\geqslant 1$，是递减的事件序列，由命题 1.1.1 得

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)&=P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}P(E_i)\\&=0\end{aligned}$$

结论得证。

例 1.1(b) 设 X_1，X_2，…使得

$$P\{X_n=0\}=\frac{1}{n^2}=1-P\{X_n=1\},\quad n\geqslant 1$$

如果记 $E_n=\{X_n=0\}$，则因 $\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)<\infty$，由波莱尔—坎泰利引理得，无穷多个 X_n 等于 0 的概率为 0。因此对充分大的 n，X_n 必须等于 1，从而我们可以断定以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}X_n=1$$

波莱尔—坎泰利引理的逆命题要有独立性的条件。

命题 1.1.3 波莱尔—坎泰利引理的逆命题

设 E_1，E_2，…为独立事件，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)=\infty$$

则

$$P\{无穷多个 E_n 发生\}=1$$

证明

$$
\begin{aligned}
P\{\text{无穷多个 } E_n \text{ 发生}\} &= P\{\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\} \\
&= \lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i) \\
&= \lim_{n\to\infty}[1-P(\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i^c)]
\end{aligned}
$$

现因

$$
\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i^c) &= \prod_{i=n}^{\infty}P(E_i^c) \qquad \text{(由独立性)} \\
&= \prod_{i=n}^{\infty}[1-P(E_i)] \\
&\leqslant \prod_{i=n}^{\infty}e^{-P(E_i)} \qquad \text{(由不等式 } 1-x\leqslant e^{-x}\text{)} \\
&= \exp\left(-\sum_{i=n}^{\infty}P(E_i)\right) \\
&= 0, \quad \text{因为对一切 } n,\ \sum_{i=n}^{\infty}P(E_i)=\infty
\end{aligned}
$$

由此结论得证。

例 1.1(c) 设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且使得

$$P\{X_n=0\}=1/n=1-P\{X_n=1\}, \quad n\geqslant 1$$

若记 $E_n=\{X_n=0\}$，则因 $\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)=\infty$，由命题 1.1.3，无穷多个 E_n 发生。也因 $\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n^c)=\infty$，也有无穷多个 E_n^c 发生。因此以概率 1 有无穷多个 X_n 等于 0 及无穷多个 X_n 等于 1，即以概率 1，$n\to\infty$ 时，X_n 不存在极限。

1.2 随机变量

考虑一个随机试验，其样本空间为 S。一个随机变量 X 是一个函数，它给 S 中的每一个结果指定一个实数。对任何实数集 A，X 取的值含于集 A 中的概率等于试验结果包含在 $X^{-1}(A)$ 中的概率。即

$$P\{X\in A\}=P(X^{-1}(A))$$

其中 $X^{-1}(A)$是由一切满足 $X(s)\in A$ 的点 $s\in S$ 构成的事件。

随机变量 X 的分布函数 F 由下式定义：对任一实数 x

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\in(-\infty,x]\}$$

我们将以 $\overline{F}(x)$记 $1-F(x)$，因而

$$\overline{F}(x)=P\{X>x\}$$

一个随机变量 X 称为离散的，如果它可能取的值的集合是可数的。对于离散随机变量有

$$F(x)=\sum_{y\leqslant x}P\{X=y\}.$$

一个随机变量称为连续的，如果存在一函数 $f(x)$，称为概率密度函数，使

$$P\{X\ 取值于\ B\}=\int_B f(x)dx$$

对每一个集 B 成立。因为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$，得

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$$

两个随机变量 X 与 Y 的联合分布函数 F 定义为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

X 与 Y 的分布函数

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}\quad 及\quad F_Y(x)=P\{Y\leqslant x\}$$

可以由 $F(x,y)$运用概率运算的连续性求得。具体地，取 $y_n,n\geqslant1$，是一趋于∞的递增数列。则由于事件$\{X\leqslant x,Y\leqslant y_n\},n\geqslant1$，是递增的及

$$\lim_{n\to\infty}\{X\leqslant x,Y\leqslant y_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\leqslant x,Y\leqslant y_n\}=\{X\leqslant x\}$$

由连续性推得

$$\lim_{n\to\infty}P\{X\leqslant x,Y\leqslant y_n\}=P\{X\leqslant x\}$$

或等价地，

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$$

类似地有

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)$$

如果对一切 x 与 y 有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 是独立的。

随机变量 X 与 Y 称为联合连续的，如果存在函数 $f(x,y)$，称为联合概率密度函数，使下式对一切集 A 与 B 成立：

$$P\{X\text{ 取值于 }A,Y\text{ 取值于 }B\}=\iint_{A\,B}f(x,y)dydx$$

任意一组随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数定义为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$

再有，如果下式成立

$$F(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

其中

$$F_{X_i}(x_i)=\lim_{\substack{x_j\to\infty\\ j\neq i}}F(x_1,\cdots,x_n)。$$

则称这 n 个随机变量是独立的。

1.3 期望

随机变量 X 的期望或均值，记作 $E(X)$，定义为

(1.3.1)
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx, & \text{当 } X \text{ 是连续的}\\ \displaystyle\sum_x xP\{X=x\}, & \text{当 } X \text{ 是离散的}\end{cases}$$

倘若上述积分存在。

(1.3.1)式也定义了 X 的任何函数，比如 $h(X)$ 的期望。因为 $h(X)$ 本身是随机变量，从(1.3.1)得