高等數學講義

（專修科教材）

南京航空学院編印

高等數學講義

（專修科教材）

南 京 航 空 学 院

數 学 教 研 組 編

1 9 5 6. 8.

編 者 的 話

这本講义的基本部分是1954年上半年本教研組的集体寫作，大体上总結了1952—1954兩个年度的教学經驗，但限于筆者当时的水平，自不免有許多缺点，尤其在如何貫徹辯証唯物主义方面作得很不夠，經过1954年下半年到1956年上半年兩个年度的試用。

我們認为这本講义基本上还是可以适合100—120小时的大綱作为基本教材的，由于祖國航空事業飛速的發展，中央又創办了苏州航專等兄弟学校，听說这本講义即將要与苏州学校的同仁們和同学們見面了，如果这本小册子对兄弟学校有所帮助的話，我們是无比高兴的。

为了進一步滿足教师們与同学們的需要，我們这次寫了一个补充材料（包括微積分学的几个基本概念），这些材料進一步总結了近兩年來教学上摸索到的一点点經驗，針对原材料中貫徹辯証唯物主义不夠的主要缺点尽力作了某些改善，无疑的，这种改善还是有限的，希望兄弟学校的教师們与同学們在教学过程中給我們这本小册子提出批評和意見，以共同促進我們的航空工業教育，提高培养干部的質量。

南京航空学院數学教研組謹識

1956.6.24

講义目錄

（I） 解析几何学部分 （頁數）

（Ⅱ） 微積分学部分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

補充講义目錄

（Ⅰ） 解析几何学部分

第 一 章

坐 标 法

§1. 解析几何学的基本概念

解析几何学是一門以代數的方法（按廣义説來卽解析法或計算法）去研究几何圖形及其性質为目的的數学。在初等數学中討論关于点，綫与其他几何元素的相互关系，形象和位置等問題时，与代數的計算方法沒有本質的联系。至于高等數学則是在代數法与几何法密切結合的基礎上發展起來的。而这种結合首先出現在法國著名數学家兼哲学家笛卡儿（1596—1650）的解析几何学中。

要想使几何的問題能夠用計算的方法解决，必須首先建立几何与代數之間的最基本的联系，卽借助于最簡單的解析元素——**數**（一个或一組）來决定最簡單的几何元素——**点**的位置，把數与点联系起來，以达到用計算方法解决几何問題的目的。

笛卡儿創造了解决这个問題的一般方法——**坐标法**，它不僅能借助于代數对几何問題作系統的研究，并且反过來也能使代數問題本身得到几何解釋。

§2. 有向綫段。

在一直綫l上任取一綫段AB，并同时注意它的長度和方向，則从A到B与从B到A正好長度相等而方向相反。如取AB为正方向則

BA为負方向，这样的綫段叫做有向綫段。因此有

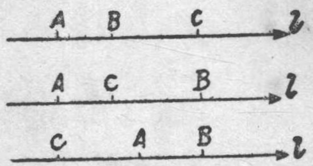
$$AB=-BA \text{ 或 } AB+BA=0. \tag{1—1}$$

（第1—1圖）

同在一直綫上的三点A,B,C不論其互相位置如何，根据有向綫段的概念，恒有

$$AB+BC=AC$$

或
$$AB+BC+CA=0. \tag{1—2}$$

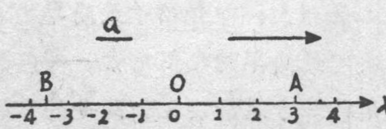


（第1—2圖）

我們在学習到后面的問題时，就将看到关于有向綫段的应用。

§3. 直綫上点的位置的决定.

在直綫上任取一点O为原点，如（圖1—3）。令由O点向右即Ox的方向为正，向左为負，再取一定長a为單位長。設在直綫上有一点A在O点的右方且$|OA|=3$單位長，則可以$x=+3$表示A点的位置。同理$x=-3.5$表示B点的位置。

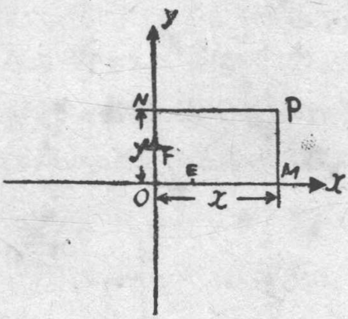


（第1—3圖）

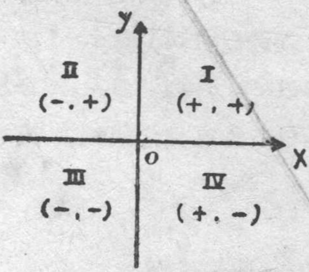
如此用來表示一个点的位置的一个數**叫做直綫上点的坐标**。故当直綫上的坐标系建立以后，对应于直綫上的每一点都有确定的一个數來表示。反之，对于每一个數就有直綫上完全确定的一个点的位置來表示。如此可知直綫上的一个点与一个數之間存在着一一对应的关系。

§4. 平面上点的位置的决定——笛卡儿氏直角坐标制.

在平面上取兩条互相垂直的直綫叫做坐标軸，水平直綫 Ox 叫横軸（或x軸），鉛垂直綫Oy叫縱軸（或y軸），它們的交点 O 叫原点，如（圖1—4），用箭头表示兩坐标軸的方向，并在其上选取單位長度$OE=OF$.



(第1—4圖)



(第1—5圖)

設P为平面内任一点，过P作y軸的平行綫交x軸于M，又作x軸的平行綫交y軸于N，設 $OM=x$，$ON=y$，則x叫做P点的横坐标，y叫做P点的縱坐标，x,y合称为P点的直角坐标，并以$P(x,y)$表示.

因此，若已知平面内一点P，則必有唯一的一对实數x,y作为坐标來表示它的位置. 反之，如已知一对实數x,y，則在平面内可以确定唯一的一点的位置它的坐标就是(x,y). 如此表示平面内一点P的位置与一对实數x,y之間存在着一一对应的关系.

x軸与y軸將整个平面分成四部分，各叫一个象限. 它們的次序与在該象限内的点的坐标的符号之間的对应关系如（圖1—5）.

上述坐标制叫直角坐标制或笛卡儿氏直角坐标制.

例1. 已知点M,M_1,P,N_2,O的位置如（圖1—6），試求各点

的坐标。

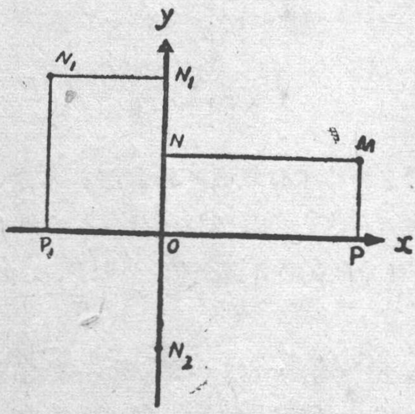
因M点的坐标为$x=OP=5$，$y=ON=2$，故有$M(5,2)$。

因M_1点的坐标为$x_1=OP_1=-3, y_1=ON_1=4$,故有$M_1(-3,4)$。

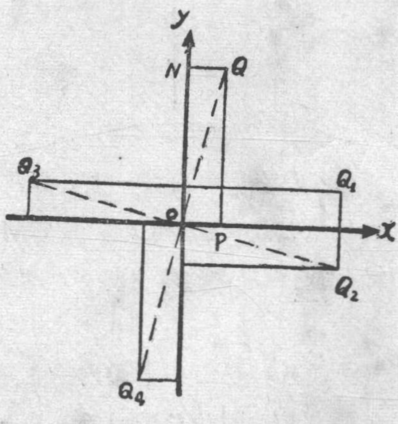
同理可知其他点的坐标为$P(5,0)$，$N_2(0,-3)$，$O(0,0)$。

例2. 已知点$Q(1,4)$，$Q_1(4,1)$，$Q_2(4,-1)$，$Q_3(1-4,1)$，$Q_4(-1,-4)$，試分別确定其位置。

因为$Q(1,4)$，故$x=1, y=4$。在x軸上取$OP=x=1$，又在y軸上取$ON=y=4$，过P,N分別作平行Oy及Ox的直綫，它們的交点卽为Q而具有坐标$(1,4)$，同理可确定其他各点的位置如(圖1—7)。



(第1—6圖)



(第1—7圖)

注意 在例2中的Q_1,Q_2系以x軸为对称(卽軸对称)，同理Q_1,Q_3系以y軸为对称，又Q,Q_4或Q_2,Q_3系以原点为对称(卽心对称)，并注意兩对称点的坐标之間的关系。

§5. 平面上兩点間的距离.

設已知兩点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$。試求其間的距离。

如(圖1—8)，由A,B作Ox的垂綫AP,BQ。并过A引与Ox平行的直綫AC交BQ于C，得直角三角形ABC。由商高定理得

$$d=AB=\sqrt{AC^2+CB^2}$$

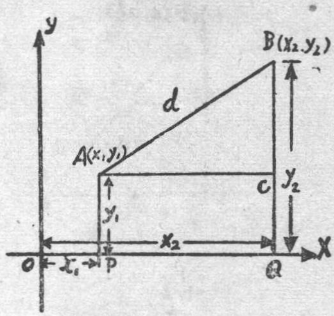
因为
$$AC=PQ=OQ-OP=x_2-x_1,$$
$$CB=QB-QC=QB-PA=y_2-y_1,$$

代入上式則得出已知兩点間的距离的公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1—3)$$

如A,B不同在第一象限，同样可得出如(1—3)式的結果。

这样，平面上兩个点間的距离等于这兩个点的同名坐标的差的平方和的平方根。



(第1—8圖)

用公式(1—3)，容易求得点$M(x,y)$与坐标原点的距离，事实上只須在(1—3)式中假設

$$x_1=y_1=0, \quad x_2=x, \quad y_2=y.$$

則得
$$OM=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1—4)$$

例1. 已知$A(-3,2)$，$B(1,-1)$，求距离AB。

依公式(1—3)得

$$d=\sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

例2. 求証，在直角三角形中，斜边的中綫等于斜边長的一半。

設任意直角三角形AOB，O为直角頂点，选定坐标軸的位置如(圖1—9)。

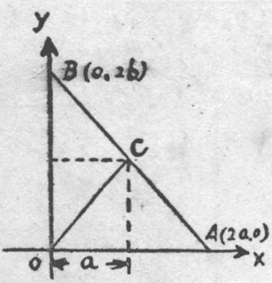
并設$A(2a,0)$,$B(0,2b)$，又令C为AB的中点，則根据平面几何的

基本定理，知道C点的坐标应为(a,b)。因此

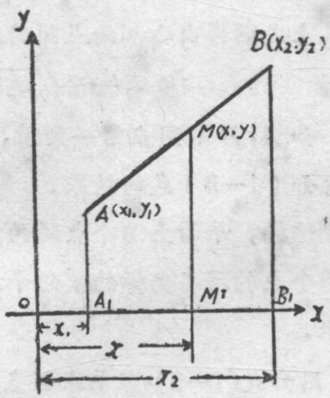
$$AB=\sqrt{(2a-0)^2+(0-2b)^2}=\sqrt{4a^2+4b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OC=\sqrt{a^2+b^2}$$

故得 $$AB=2OC \quad 即 \quad OC=\frac{1}{2}AB.$$



(第1—9圖)



(第1—10圖)

§6. 分綫段为已知比.

設已知$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，今試在綫段AB上求一点M的坐标(x,y)，使$\frac{AM}{MB}=\lambda$为已知，其中AM,MB为有向綫段.

由A,B,M各作Ox軸的垂綫AA_1，BB_1，MM_1根据初等几何的定理知

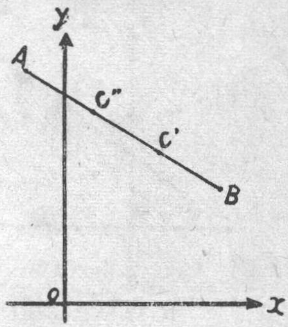
$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1}=\frac{AM}{MB} \quad 即 \quad \frac{A_1M_1}{M_1B_1}=\lambda.$$

因为 $A_1M_1=OM_1-OA_1=x-x_1$，$M_1B_1=OB_1-OM_1=x_2-x$.

代入上式得 $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

再解出x，得
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.\\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}5)$$
仿上述可知

如点M平分綫段AB，則$AM=MB$，因此
$$\lambda=\frac{AM}{MB}=1$$
用$\bar{x},\bar{y}$表示綫段AB中点的坐标，則根据公式(5)，得
$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=\frac{x_1+x_2}{2}.\\ \bar{y}&=\frac{y_1+y_2}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}6)$$



(第1—11圖)

卽，綫段中点的坐标等于它的兩端点对应坐标的半和

例1.　在联接$A(-1,6)$与$B(4,3)$兩点的綫段上求二点C',C''使之三等分AB(1—11)

因为对于$C'(x',y')$，有　$\lambda=\frac{AC'}{C'B}=2$

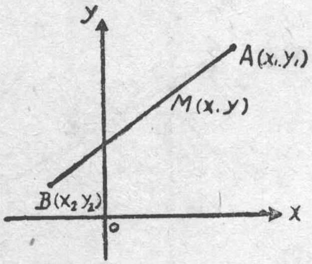
故有
$$x'=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{(-1)+2\cdot(4)}{1+2}=\frac{7}{3}.$$
$$y'=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{(6)+2\cdot(3)}{1+2}=4.$$
卽C'的坐标为$\left(\frac{7}{3},\ 4\right)$.

对于$C''(x'',y'')$，有　$\lambda=\frac{BC''}{C''C}=-2.$

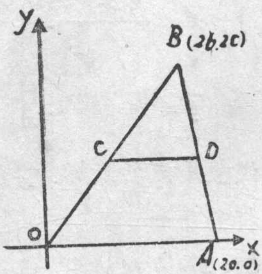
故有
$$x''=\frac{4+(-2)\cdot 3}{1+(-2)}=\frac{2}{3}.$$
$$y''=\frac{3+(-2)\cdot 4}{1+(-2)}=5.$$

即C''的坐标为$\left(\frac{2}{3},\ 5\right)$. 当然在知道$A$和$C'$的坐标后也可以应用公式(1—6)以求$C''$的坐标仍得出如上述相同的結果.

例2. 兩質点$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 其質量各为m_1,m_2, 試求其重心的位置.



(第1—12圖)



(第1—13圖)

根据力学的定律, 知道重心M在AB綫段上, 且所分二綫段的長与A及B处所受的重力成反比. 即
$$\lambda=\frac{AM}{MB}=\frac{m_2 g}{m_1 g}=\frac{m_2}{m_1}.\ (g\ \text{为重力加速度}).$$

代入公式(1—5)得
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.\\ y&=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.\end{aligned}\right\}\quad(1—7)$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com