

義講數學高等

(專修科教材)

南京航空學院編印

高等數學講義

(專修科教材)

南京航空學院

數學教研組編



1956.8.

7
多
步
12

編 者 的 話

这本讲义的基本部分是1954年上半年本教研組的集体寫作，大体上总结了1952—1954两个年度的教学經驗，但限于筆者当时的水平，自不免有許多缺点，尤其在如何貫徹辯証唯物主义方面作得很不够，经过1954年下半年到1956年上半年两个年度的試用。

我們認為这本讲义基本上还是可以适合100—120小时的大綱作为基本教材的，由于祖國航空事業飛速的發展，中央又創辦了苏州航專等兄弟学校，听说这本讲义即将要与苏州学校的同仁們和同學們見面了，如果这本小册子对兄弟学校有所帮助的話，我們是无比高兴的。

为了進一步滿足教師們与同學們的需要，我們这次寫了一个补充材料（包括微積分学的几个基本概念），这些材料進一步总结了近两年來教学上摸索到的一点点經驗，针对原材料中貫徹辯証唯物主义不够的主要缺点尽力作了某些改善，无疑的，这种改善还是有限的，希望兄弟学校的教師們与同學們在教学过程中給我們这本小册子提出批評和意見，以共同促進我們的航空工業教育，提高培养干部的质量。

南京航空学院數學教研組謹識

1956.6.24

講 義 目 錄

(I) 解析几何学部分

(頁數)

第一章 坐标法.....	1
§1. 解析几何学的基本概念.....	1
§2. 有向綫段.....	1
§3. 直綫上點的位置的决定.....	2
§4. 平面上點的位置的决定.....	3
§5. 平面上兩點間的距离.....	4
§6. 分綫段为已知比.....	5
習題.....	9
第二章 軌跡.....	11
§1. 平面上點的几何軌跡.....	11
§2. 依几何条件决定軌跡方程式.....	12
§3. 由曲綫的方程式作其圖形的方法.....	13
§4. 平面解析几何的兩個基本問題.....	15
習題.....	15
第三章 直綫.....	17
§1. 直綫方程式——斜截式.....	17
§2. 平行於坐标軸的直綫及坐标軸的方程式.....	20
§3. 關於直綫的兩個基本定理.....	21
§4. 过一已知點的直綫族方程式.....	23
§5. 直綫的點斜式.....	24
§6. 直綫的兩點式.....	25
§7. 直綫的截距式.....	25
§8. 兩直綫間的交角.....	26
§9. 兩直綫的平行及垂直的条件.....	27
習題.....	29

第四章 二次曲綫.....31

§1. 圓.....	31
§2. 圓方程式的討論.....	32
§3. 橢圓.....	36
§4. 橢圓形狀的討論.....	37
§5. 橢圓的离心率.....	39
§6. 双曲綫.....	42
§7. 双曲綫形狀的討論.....	43
§8. 双曲綫的离心率.....	44
§9. 双曲綫的漸近綫.....	45
§10. 等軸双曲綫.....	47
§11. 拋物綫.....	50
§12. 拋物綫方程式 $y^2 = 2px$ 的討論.....	52
§13. 拋物綫 $y = Ax^2 + Bx + C$	55
§14. 軌跡的交點.....	58
習題.....	60

第五章 極坐标、曲綫的參數方程式.....65

§1. 極坐标.....	65
§2. 曲綫的極坐标方程式及描圖.....	66
§3. 直角坐标与極坐标之間的關係.....	68
§4. 曲綫的參數方程式.....	69
習題.....	71

(II) 微積分學部分

第一章 函數的概念.....73

§1. 常量与变量.....	73
§2. 區間.....	74
§3. 絕對值的概念.....	75
§4. 函數的一般概念.....	78

§5. 複合函數	80
§6. 顯函數與隱函數，顯函數的幾種類型	81
§7. 函數的表示法	82
§8. 函數圖象表示法的簡例	84
習題	92

第二章 極限概念 94

§1. 由實例引入極限觀念	94
§2. 由變量的變化趨勢引伸出極限的定義	96
§3. 貫數趨於極限的例	99
§4. 當 $x \rightarrow c$ 時，函數 $f(x) \rightarrow l$ 的說明	100
§5. 無窮小量	101
§6. 無窮大量，無窮大量與無窮小量之間的關係	103
§7. 有界變量	104
§8. 關於無窮小量的基本定理	105
§9. 關於無窮小量的階（或稱級）	106
§10. 變量、變量的極限與無窮小量之間的關係	108
§11. 關於極限運算的基本定理	109
§12. 極限存在的一個判別法則	113
§13. 當 $z \rightarrow 0$ 時， $\frac{\sin z}{z} \rightarrow 1$ 的證明	113
§14. 自變量與函數的增量	115
§15. 函數的連續性	116
§16. 關於連續函數的兩個定理（不加證明）	119
習題	121

第三章 導數的概念 125

§1. 導數的定義	125
§2. 導數的幾何意義	128
§3. 導數的力學意義	131
§4. 高階導數的概念	132
§5. 二階導數的力學意義	133

§6. 函數的可微性與連續性之間關係	134
§7. 導數的其他應用	135
習題	136
第四章 導數的基本定理	138
§1. 常數的導數, 常數的導數為零	138
§2. X^n 的導數	139
§3. 函數 $y = cu$ 的導數	140
§4. 和的導數	140
§5. 積的導數	141
§6. 商的導數	142
§7. 複合函數的導數	143
§8. 隱函數的導數	146
§9. 對數函數的導數	147
§10. 對數導數的概念	150
§11. 指數函數的導數	152
§12. 三角函數的導數	153
§13. 反三角函數的導數	155
§14. 微分法公式彙集	158
習題	159
第五章 導數的應用	163
§1. 函數的增減	163
§2. 函數的極值, 極值點的第一種充分條件 (判別法則一)	166
§3. 極值存在的第二種充分條件 (判別法則二)	171
§4. 曲線的凸與凹	173
§5. 曲線的變曲點	176
§6. 函數曲線的作法	178
§7. 關於極大和極小值的应用問題	184
習題	187
第六章 微分	190

§1. 微分的定义	190
§2. 函數微分是函數增量的主部	191
§3. 微分的几何意义	193
§4. 微分的性質	194
§5. 利用微分作近似計算	194
§6. 曲綫弧長的微分 (弧長 S 作为橫标 x 的函數)	198
§7. 曲率的概念	200
§8. 曲率圓及曲率半徑	204
習題	206
第七章 不定積分	208
§1. 不定積分的定义——原函數的一般表達式	208
§2. 不定積分的几何解釋	210
§3. 不定積分的基本性質	212
§4. 簡易不定積分表	214
§5. 簡易積分表应用的擴大	215
§6. 積分法	218
§7. 根据初值条件决定積分常數	227
習題	231
第八章 定積分及其应用	235
§1. 曲边梯形的面積	235
§2. 定積分的定义	243
§3. 定積分与不定積分之間的联系 (牛頓萊布尼茲公式)	245
§4. 定積分的性質	248
§5. 应用定積分求面積	250
§6. 应用定積分求旋轉体体积	256
§7. 应用定積分求功	260
§8. 应用定積分求液体的靜压力	262
習題	265
附錄(I) 初等數學公式彙集	267

附錄(Ⅱ) 余式定理及綜合除法	269
附錄(Ⅲ) 部分分式	274
附錄(Ⅳ) 几种常用的曲綫	277

補 充 講 義 目 錄

第一章 函數的概念	279
§1. 常量与变量	279
§2. 函數的一般概念	280
§3. 函數与公式	282
第二章 極 限 (函數連續性部分)	284
§1. 函數的連續性	284
§2. 關於連續函數的二个定理 (不加証明)	286
§3. 初等函數的連續性	287
第三章 導數的概念	288
§1. 非均匀运动的瞬時速度	288
§2. 非均匀棒的局部密度	289
§3. 導數的定义	290
§4. 導數的求法	291
§5. 導數的几何意义及应用	293
第七章 不定積分	297
§1. 不定積分定义——原函數的一般表達式	298
§2. 不定積分基本性質	300
§3. 基本積分表	301
§4. 不定積分表的擴大	303
第八章 定積分	306
§1. 曲边梯形的面積	307
§2. 变力所作的功	309
§3. 定積分定义与理論計算法	310
§4. 定積分的实际計算法	312

(I) 解析几何学部分

第 一 章

坐 标 法

§1. 解析几何学的基本概念

解析几何学是一門以代數的方法（按廣义說來即解析法或計算法）去研究几何圖形及其性質为目的的數學。在初等數學中討論关于点，綫与其他几何元素的相互关系，形象和位置等問題时，与代數的計算方法沒有本質的联系。至于高等數學則是在代數法与几何法密切結合的基礎上發展起來的。而这种結合首先出現在法國著名數学家兼哲学家笛卡儿（1596—1650）的解析几何学中。

要想使几何的問題能夠用計算的方法解决，必須首先建立几何与代數之間的最基本的联系，即借助于最簡單的解析元素——數（一个或一組）來决定最簡單的几何元素——点的位置，把數与点联系起来，以达到用計算方法解决几何問題的目的。

笛卡儿創造了解决這個問題的一般方法——坐标法，它不僅能借助于代數对几何問題作系統的研究，并且反過來也能使代數問題本身得到几何解釋。

§2. 有向綫段。

在一直綫 l 上任取一綫段 AB ，并同时注意它的長度和方向，則从 A 到 B 与从 B 到 A 正好長度相等而方向相反。如取 AB 为正方向則

BA 为负方向, 这样的线段叫做有向线段。因此有

$$AB = -BA \text{ 或 } AB + BA = 0.$$

(1-1)

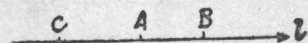


(第1-1圖)

同在一直线上的三点 A, B, C 不論其互相位置如何, 根据有向线段的概念, 恒有

$$AB + BC = AC$$

或 $AB + BC + CA = 0.$ (1-2)

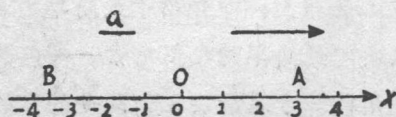


(第1-2圖)

我們在学习到后面的问题时, 就将看到关于有向线段的应用。

§3. 直线上点的位置的决定。

在直线上任取一点 O 为原点, 如(圖1-3)。令由 O 点向右即 Ox 的方向为正, 向左为负, 再取一定长 a 为單位長。設在直线上有一点 A 在 O 点的右方且 $|OA| = 3$ 單位長, 則可以 $x = +3$ 表示 A 点的位置。同理 $x = -3.5$ 表示 B 点的位置。

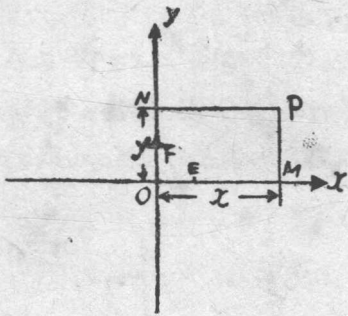


(第1-3圖)

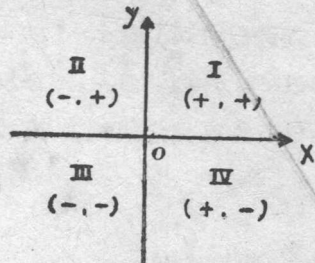
如此用来表示一个点的位置的一个数叫做直线上点的坐标。故当直线上的坐标系建立以后, 对应于直线上的每一点都有确定的一个数来表示。反之, 对于每一个数就有直线上完全确定的一个点的位置来表示。如此可知直线上的一个点与一个数之间存在着——对应的关系。

§4. 平面上点的位置的决定——笛卡儿氏直角坐标制。

在平面上取两条互相垂直的直线叫做坐标轴，水平直线 Ox 叫横轴（或 x 轴），铅垂直线 Oy 叫纵轴（或 y 轴），它们的交点 O 叫原点，如（圖1—4），用箭头表示两坐标轴的方向，并在其上选取单位长度 $OE = OF$ 。



(第1—4圖)



(第1—5圖)

設 P 为平面内任一点，过 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于 M ，又作 x 轴的平行线交 y 轴于 N ，设 $OM = x$ ， $ON = y$ ，则 x 叫做 P 点的横坐标， y 叫做 P 点的纵坐标， x, y 合称为 P 点的直角坐标，并以 $P(x, y)$ 表示。

因此，若已知平面内一点 P ，则必有唯一的一对实数 x, y 作为坐标来表示它的位置。反之，如已知一对实数 x, y ，则在平面内可以确定唯一的一点的位置它的坐标就是 (x, y) 。如此表示平面内一点 P 的位置与一对实数 x, y 之间存在着——对应的关系。

x 轴与 y 轴将整个平面分成四部分，各叫一个象限。它们的次序与在该象限内的点的坐标的符号之间的对应关系如（圖1—5）。

上述坐标制叫直角坐标制或笛卡儿氏直角坐标制。

例1. 已知点 M, M_1, P, N_2, O 的位置如（圖1—6），试求各点

的坐标。

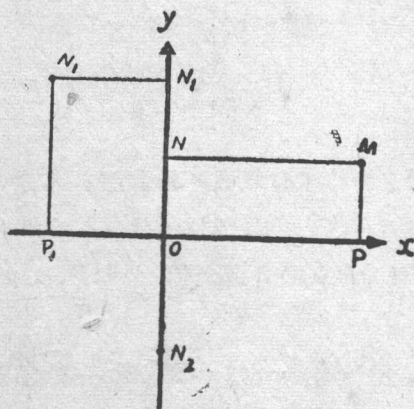
因 M 点的坐标为 $x = OP = 5$, $y = ON = 2$, 故有 $M(5, 2)$ 。

因 M_1 点的坐标为 $x_1 = OP_1 = -3$, $y_1 = ON_1 = 4$, 故有 $M_1(-3, 4)$ 。

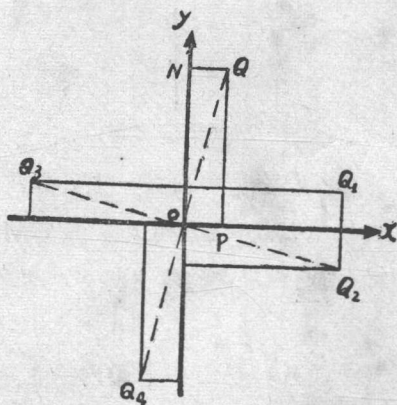
同理可知其他点的坐标为 $P(5, 0)$, $N_2(0, -3)$, $O(0, 0)$ 。

例2. 已知点 $Q(1, 4)$, $Q_1(4, 1)$, $Q_2(4, -1)$, $Q_3(1-4, 1)$, $Q_4(-1, -4)$, 试分别确定其位置。

因为 $Q(1, 4)$, 故 $x = 1$, $y = 4$ 。在 x 轴上取 $OP = x = 1$, 又在 y 轴上取 $ON = y = 4$, 过 P, N 分别作平行 Oy 及 Ox 的直线, 它们的交点即为 Q 而具有坐标 $(1, 4)$, 同理可确定其他各点的位置如(圖1—7)。



(第1—6圖)



(第1—7圖)

注意 在例2中的 Q_1, Q_2 系以 x 轴为对称(即轴对称), 同理 Q_1, Q_3 系以 y 轴为对称, 又 Q, Q_4 或 Q_2, Q_3 系以原点为对称(即点对称), 并注意两对称点的坐标之间的关系。

§5. 平面上兩点間的距离.

設已知兩点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 試求其間的距离。

如(圖1—8), 由 A, B 作 Ox 的垂線 AP, BQ . 并过 A 引与 Ox 平行的直線 AC 交 BQ 于 C , 得直角三角形 ABC . 由商高定理得

$$d = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$$

因为 $AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$
 $CB = QB - QC = QB - PA = y_2 - y_1,$

代入上式則得出已知兩点間的距离的公式

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1-3)$$

如 A, B 不同在第一象限, 同样可得出如(1—3)式的結果.

这样, 平面上两个点間的距离等于这两个点的同名坐标的差的平方和的平方根.

用公式(1—3), 容易求得点 $M(x, y)$ 与坐标原点的距离, 事实上只須在(1—3)式中假設

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = x, \quad y_2 = y.$$

則得 $OM = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1-4)$

例1. 已知 $A(-3, 2), B(1, -1)$, 求距离 AB .

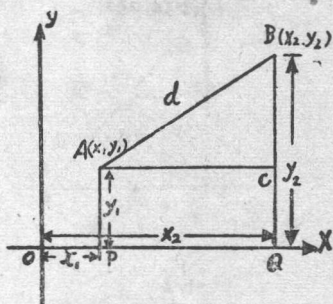
依公式(1—3)得

$$d = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

例2. 求証, 在直角三角形中, 斜边的中綫等于斜边長的一半.

設任意直角三角形 AOB , O 为直角顶点, 选定坐标軸的位置如(圖1—9).

并設 $A(2a, 0), B(0, 2b)$, 又令 C 为 AB 的中点, 則根据平面几何的



(第1—8圖)

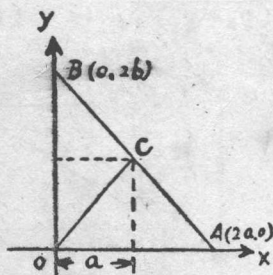
基本定理，知道C点的坐标应为 (a, b) 。因此

$$AB = \sqrt{(2a-0)^2 + (0-2b)^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

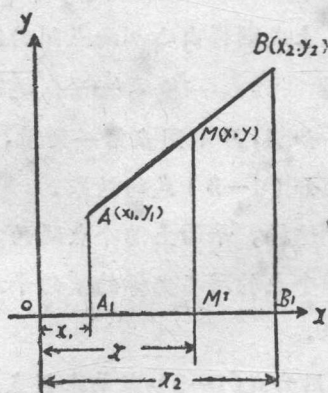
$$OC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

故得

$$AB = 2OC \quad \text{即} \quad OC = \frac{1}{2}AB.$$



(第1—9圖)



(第1—10圖)

§6. 分线段为已知比。

設已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，今試在线段 AB 上求一点 M 的坐标 (x, y) ，使 $\frac{AM}{MB} = \lambda$ 为已知，其中 AM, MB 为有向线段。

由 A, B, M 各作 Ox 轴的垂线 AA_1, BB_1, MM_1 根据初等几何的定理知

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB} \quad \text{即} \quad \frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda.$$

因为 $A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1$, $M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x$ 。

代入上式得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

再解出 x ，得

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

仿上述可知

如点 M 平分线段 AB ，则 $AM = MB$ ，因此

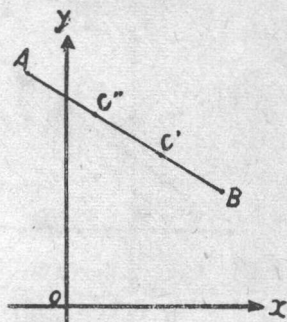
$$\lambda = \frac{AM}{MB} = 1$$

用 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 表示线段 AB 中点的坐标，则根据公式(5)，得

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

即，线段中点的坐标等于它的两端点对应坐标的半和

例1. 在联接 $A(-1, 6)$ 与 $B(4, 3)$ 两点的线段上求二点 C' , C'' 使之三等分 AB (1-11)



(第1-11圖)

因为对于 $C'(x', y')$ ，有 $\lambda = \frac{AC'}{C'B} = 2$

故有

$$x' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{(-1) + 2 \cdot (4)}{1 + 2} = \frac{7}{3}.$$

$$y' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{(6) + 2 \cdot (3)}{1 + 2} = 4.$$

即 C' 的坐标为 $(\frac{7}{3}, 4)$ 。

对于 $C''(x'', y'')$ ，有 $\lambda = \frac{BC''}{C''C} = -2.$

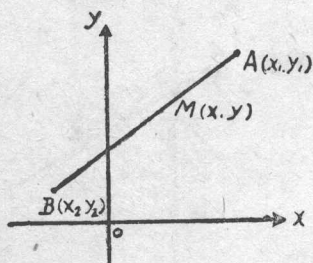
故有

$$x'' = \frac{4 + (-2) \cdot 3}{1 + (-2)} = \frac{2}{3}.$$

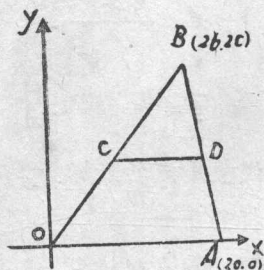
$$y'' = \frac{3 + (-2) \cdot 4}{1 + (-2)} = 5.$$

即 C'' 的坐标为 $(\frac{2}{3}, 5)$ 。当然在知道 A 和 C' 的坐标后也可以应用公式(1—6)以求 C'' 的坐标仍得出如上述相同的結果。

例2. 兩質点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 其質量各为 m_1, m_2 , 試求其重心的位置。



(第1—12圖)



(第1—13圖)

根据力学的定律, 知道重心 M 在 AB 綫段上, 且所分二綫段的長与 A 及 B 处所受的重力成反比。即

$$\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (g \text{ 为重力加速度}).$$

$$\left. \begin{aligned} \text{代入公式(1—5)得 } x &= \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$