晨兴数学中心成立十周年纪念

（一九九六——二零零六）

庞加莱猜想专题演讲

《三维空间的结构》

丘成桐

（中英文合订本）

三维空间的结构

丘成桐

哈佛大学数学系

所有图形取自顾险峰，王雅琳，
丘成桐的合作文章，由顾险峰提供

引　言

中国科学院晨兴数学中心于 1996 年 6 月 10 日成立，迄今已整十年。

十年来，晨兴数学中心每年在纯粹数学、应用数学、计算数学和理论物理等方面挑选六至八个专题，邀请优秀的青年学者来中心从事研究工作，同时邀请国际上的杰出数学家来做系列演讲与访问，取得了很大成功。晨兴数学中心还组织举办了许多不同类型的国际学术会议与研讨会，例如 1998 年首届全球华人数学家大会，2000 年纪念华罗庚诞辰 90 周年大会，2002 年与 2006 年的国际弦理论大会等。晨兴数学中心主持了晨兴数学奖的评选，迄今已历三届，获奖者都是成绩突出的青年数学家。

国际上许多著名数学家与理论物理学家均曾来晨兴数学中心访问与讲学，例如，R. E. Borcherds，J. Coates，D. Gross，R. Hamilton，S. Hawkings，L. Lafforgue，D. W. Stroock，E. Witten，E. Zelmanov 等。

十年来，晨兴数学中心为我国数学研究水平的提升，培育优秀的青年数学人才，倡导国际学术交流做了大量工作，取得了显著成绩。今后，我们将继续努力，争取做出更大的贡献。

我们衷心感谢路甬祥院长与中国科学院对中心工作的领导与支持，热忱感谢陈启宗先生、陈乐宗先生及暨晨兴集团与陈曾焘先生暨思源基金会的大力支持。我们感谢国内外数学界同仁共同参与晨兴数学中心的学术活动。

中国科学院晨兴数学中心

学术委员会主任　丘成桐

副主任　杨　乐

二零零六年六月

江泽民主席与丘成桐教授在一起

1998 年晨兴数学中心首届华人数学家大会在北京人民大会堂举行

三维空间的结构

（摘要）

丘成桐

哈佛大学数学系

2006 年 6 月 20 日

几何学的主要目的是描述与分类几何结构。经典的曲面分类定理给出曲面的全面分类。如何把这二维曲面分类定理推广到高维空间是现代数学中的最重要的课题之一。在上世纪 70 年代 Thurston 提出了三维空间的全面分类的几何化猜测。特别地，著名的庞加莱猜测是几何化猜测的特殊情形。

近二十多年来，Hamilton 发展了新的方程来研究空间的变动，并提出结合几何手术给出证明庞加莱猜测与 Thurston 几何化猜测的纲领。Hamilton 在对几何与非线性微分方程的深刻分析基础上系统地发展理论，特别的，他给出了先验控制 Hamilton 方程行为的李伟光-丘成桐-Hamilton 估计。他的惊人的工作令人深信,几何化纲领可以用 Hamilton 的方法在可期待的一段时间内加以破解。

Hamilton 的方法给庞加莱猜测与几何化猜测的证明带来了一片光明。其中的主要困难之一在于如何验证非塌陷条件，以理解奇点的结构与几何手术的过程。2002 年 11 月，Perelman 利用了 1986 年李伟光-丘成桐的想法，引进了一个时空距离函数，用来验证一般的非塌陷条件。Perelman 进一步改进了 Hamilton 的尺度重整方法，来完成 Hamilton 对于奇点的分类。

在 1995 年，Hamilton 已经对四维空间开创了一种手术过程。可以检验，Hamilton 的几何手术对三维空间也成立。真正的挑战在于证明每个有限时间段内只进行有限次手术。Perelman 和曹怀东－朱熹平提出了克服这个困难的想法。一旦知道手术相对于时间是离散的，结合 Colding-Minicozzi（2005）的有限时间消亡性结果，这就提供了庞加莱猜测的完整证明。

为了研究一般空间的结构，我们仍然需要分析 Hamilton 方程的手术解的长时间行为。Hamilton 在 1996 年研究了一些特殊光滑解的行为。Perelman 宣称可以用 Hamilton 的想法与论证给出 Thurston 几何化猜测的证明。但是他需要一个这个新的塌陷结果。虽然 Perelman 宣称的这个新的塌陷结果还未见诸文献，在 2005 年 Shioya-Yamaguchi 在闭空间的特殊情形发表了一个塌陷结果的证明。最近，曹怀东－朱熹平在前面工作的基础上给出了 Thurston 几何化猜想的一个完全证明。

Hamilton 纲领的成功是过去三十年中几何分析学家集体努力的成果。这应该被看作几何分析学科伟大的成就，它的奇妙之处在于只用几何与分析就能够证明极度困难的拓扑学定理。

先生们，女士们：

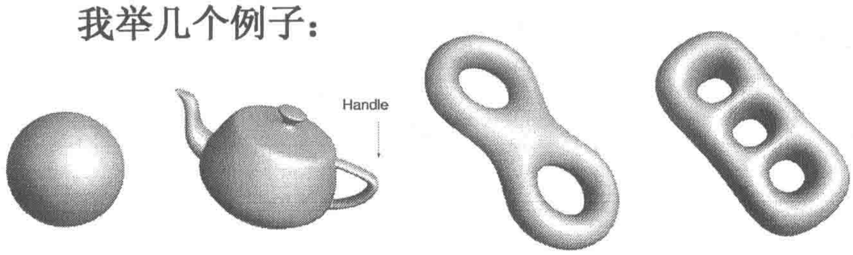
今天我将会告诉你们数学上的一页篇章是如何结束和新的篇章正在开始。

请允许我先从一些基本的观察开始。

几何结构

几何学的主要目的是描述与分类有趣的几何结构。我们在日常生活中看到许多有趣的几何结构。

我举几个例子：



亏格0　亏格1　亏格2　亏格3

曲面的亏格就是环柄的数目。

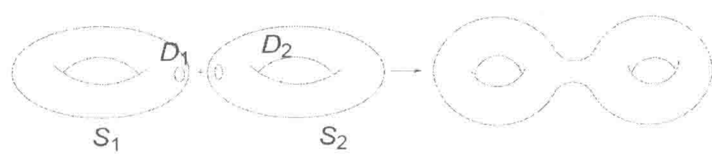
连通和

构造曲面的一个抽象和主要的方法是作曲面的连通和。

连通和

连通和$S_1\#S_2$是通过删除圆盘 D_i 并且钻孔曲面$S_i - D_i$通过微分同胚$h:\partial D_1 \to \partial D_2$粘合起来，于是

$$S_1\#S_2 = (S_1 - D_1) \cup_h (S_2 - D_2).$$



例子

通过连通和构造的亏格等于8的曲面

曲面结构定理

定理（曲面分类定理）

任意闭的可定向的曲面是如下曲面之一：
球面，环面或有限多个环面的连通和。

共形几何

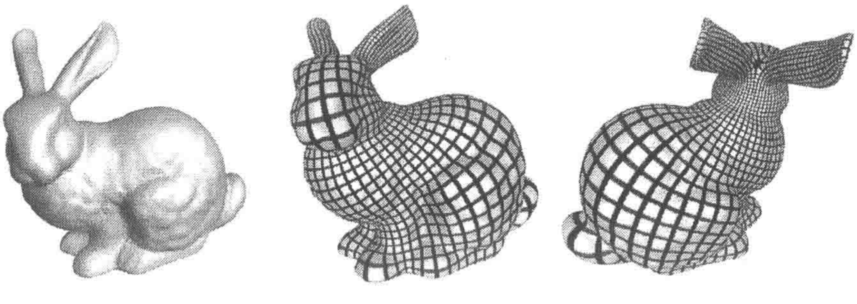
为了更深入理解曲面，庞加莱建议理解这些二维对象上的共形几何。

例子

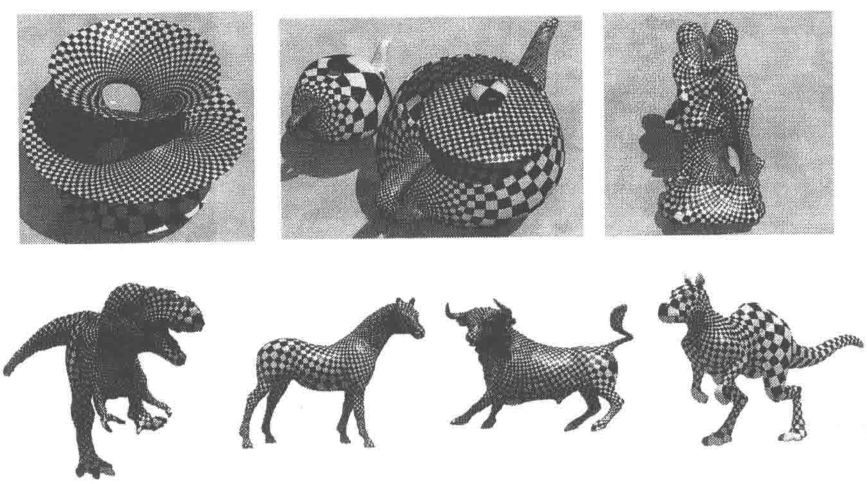
在地球上我们利用经线和纬线来确定方位。它们互相垂直。当我们将方形的地图映到球面上的时候，距离产生了扭曲。比如，北极附近很小的区域在方形地图上是很大的区域。不过，经线与纬线的正交性在映照下保持不变。所以，如果一艘船在海上航行，我们可以用地图精确地指引它的航向。

共形几何

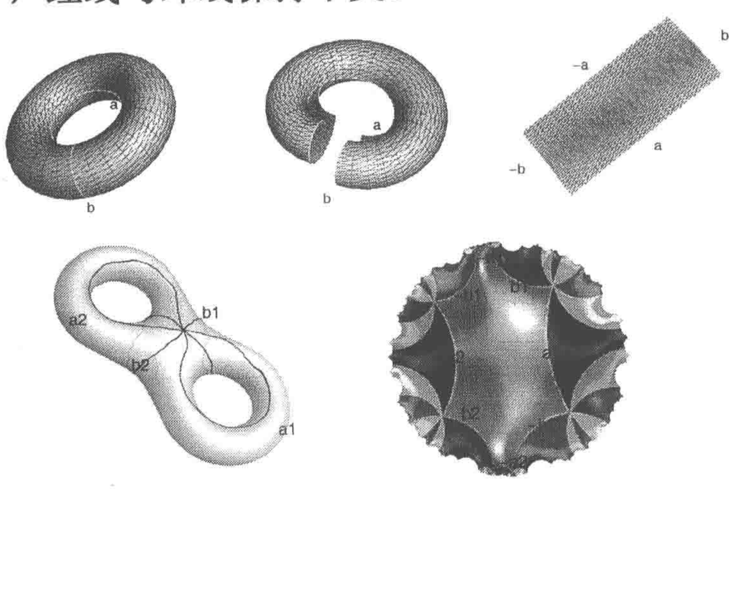
庞加莱（**Poincare**）发现，我们可以在任何曲面上绘制经线（篮色曲线）与纬线（红色曲线）。



共形结构



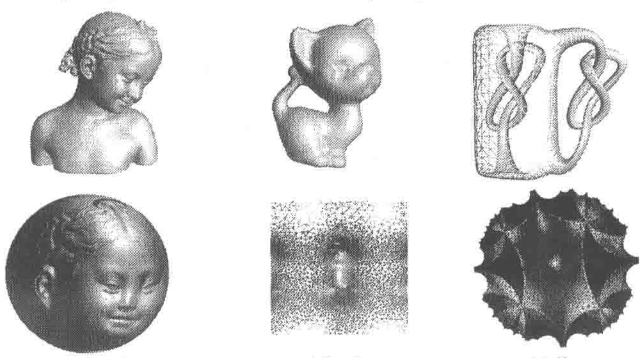
我们可以沿着曲面上某些特殊的曲线切割，然后把曲面在平面或圆盘上展开。在这个过程中，经线与纬线保持不变。



曲面上共形结构的例子

定理（庞加莱单值化定理）

任意二维封闭空间必与一常高斯曲率空间共形等价。



球面　欧氏　双曲

曲面上的**Hamilton**方程

我们可以通过曲率变动任意曲面。这种形变就是曲面的**Hamilton**的**Ricci** 流。这种形变最后得到常曲率空间。这一方法是**Hamilton**发明的，可用来改变任意维空间。

三维流形

到目前为止，我们所讨论的空间只有两个自由度。与束缚于曲面上的虫子所看到的二维空间不一样，我们所生存的空间有三个自由度。虽然我们的三维空间看起来是平坦的，但还有许多自然而不平坦的三维空间。

三维流形

例子

相空间

在二十世纪初，庞加莱研究粒子动力学的相空间。相空间由 $(x; v)$，即粒子的位置与速度组成。例如，如果一个粒子在二维曲面 Σ 上以单位速度自由移动，那么这个粒子就有三个自由度。这就产生了一个三维空间 M。

纤维丛

如果我们对 M 上每个点 $(x;v)$，赋以点 $x \in \Sigma$，我们得到一个从 M 到 Σ 的映射。当我们固定点 x，v 可以取任意单位向量，因此 v 可以在单位圆上自由移动。我们称 M 是 Σ 上的纤维丛而它的纤维是单位圆。

庞加莱猜想

高维拓扑学可以说是从庞加莱的问题开始：

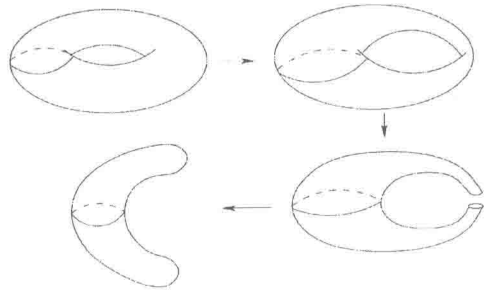
庞加莱猜测

一个闭的三维空间，若其上的每条闭曲线都可以连续收缩到一个点，那么从拓扑上来看，这个空间是否就是球面？

这个问题不仅是一个著名的难题，而且是三维拓扑理论的中心问题。

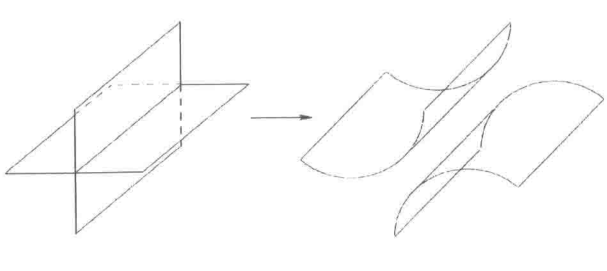
拓扑手术

拓扑学家研究这个问题已经有一百多年历史了。主要的工具是切割与粘合，或称手术，来简化一个空间的拓扑。



拓扑手术

在七十年代以前，主要的工具有**Dehn**引理，提供了将自相交叉的曲面简化为无交叉曲面的工具。



拓扑手术

定理（**Dehn**引理）

如果存在从圆盘到三维空间的一个映射，且不在圆盘边界上自相交叉，那么存在另一个到三维空间的没有自交叉的映射，且限制在边界上与原来的映射相等。

Dehn引理的一种基于极小曲面理论的版本是**Meeks**-丘成桐发现的，对以后的发展很有帮助。

拓扑手术

第二个工具是**Haken**引入的不可压缩曲面的构造。它被用来将三维流形切割成片。**Walhausen**用这一方法证明了重要的定理。**(**不可压缩曲面是一种嵌入曲面，且具有如下性质：如果一条闭环路不能在曲面上收缩到一个点，那么它也不能在三维空间中收缩到一个点。**)**

特殊曲面

有几个重要的一维和二维空间在理解三维空间的过程中起了重要的作用。

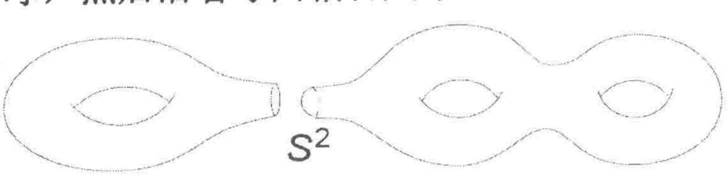
1. 圆周

Seifert 构造了许多三维空间，可以写成圆周的连续族。上面提到的相空间是**Seifert**空间的一个例子。

特殊曲面

2. 二维球面

我们可以通过在两个三维空间上的各挖去一个实心球，然后沿着球面粘合起来。

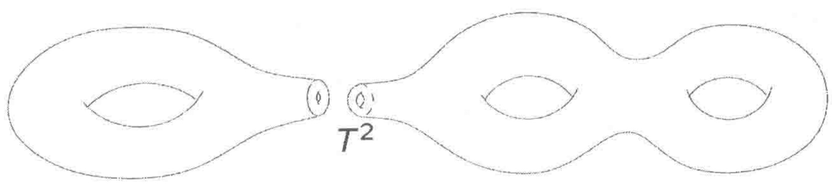


相反，**Kneser**和**Milnor**证明每个三维空间可以通过球面唯一分解成不可约分支。一个空间称为是不可约的，如果每个嵌入球面都是这个空间中的一个三维球的边界。

特殊曲面

2. 环面

Jaco-Shalen, Johannson的一个定理说，我们可以通过沿环面切割作进一步分解。



三维空间的结构

几何化猜测 (Thurston)：

三维空间的结构是由如下的基本空间所合成的：

(1).（庞加莱猜测）如果三维空间上每条闭环路都可以收缩到一个点，那么这个空间就是三维球面。

(2).（空间形式问题）将三维球面上的点等同起来得到的空间。这由线性等距的一个有限群所支配，类似于晶体的对称。