

中学生课外读物



不定方程趣谈

何钟刚

不定方程趣谈

傅钟鹏

辽宁人民出版社

一九七九年·沈阳

不定方程趣谈

傅钟麟

辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 $\frac{1}{2}$ 印张：4 $\frac{1}{2}$
字数：73,000 印数：1—300,000

1979年5月第1版 1979年5月第1次印刷

统一书号：7090·51 定价：0.34元

写在前面

在百花盛开的季节，每当我漫步在群芳争妍的大地上，呼吸着春天的气息时，总是情不自禁地想起数学家园地中的那些奇花异葩。

那儿，有一朵举世瞩目的花儿在溢射出沁人肺腑的芬香，这就是中外数学家们长期进行研究和完善的“不定方程”。在这方面，我国的古代数学家们尤著卓绩，他们提出的韩信点兵、百鸡问题、五家共井、余米推数……等等，都曾经誉满全球，被世界各国研究不定方程者列为先声，从中汲取难以估量的营养。因此，这朵出类拔萃的名花是非比寻常的，在漫长的岁月中，它不凋不败，经炎暑而不枯，历寒冬而不僵，一直到一千六百年后的今天，仍然容采焕发！

不定方程解决一个方程含有多个未知数的问题，历来是数学研究的重要课题，在科学技术、生产实践和日常生活中应用很广。究竟什么是不定方程，它的

基本类型有几种，怎样求解，以及应用范围有哪些方面，这就是本书所要介绍的内容。不过，这只是个开端，如果同学们能从中得到点滴学识，今后有所发展和前进，那末，我将感到莫大欣慰。

我们伟大的祖国经历过严峻的考验，但是，英雄的人民终于扫清前进道路上的重重障碍，突破荆棘丛生的层层封锁，开始向着光明的前程挺进。然而，前面难道只是无边的原野吗？不，那里还有急流险滩、悬崖峭壁，我们绝不应该歇息，前头队伍在长征路上向我们招手呢！

一九七九年，光辉的国庆三十周年即将来临。为使我们的祖国更加美好、壮丽，我愿与同学们互相学习、共同勉励，在实现四个现代化的战斗征程中携手并进！

傅 钟 鹏

一九七八年九月于鞍钢

目 录

写在前面

序幕.....	1
在沸腾的工地上.....	8
任意解和无解.....	13
不定方程的常规解法.....	17
唯一解.....	23
亥洛的王冠.....	27
奥秘.....	34
棋差一着.....	37
捷径.....	41
有把握吗?	46
无整数解.....	50
技术革新开了花.....	54
要没有这个巧事呢?	59

错误的化学反应式·····	65
齐次方程·····	70
一百零八·····	74
代数还没有算术简单呢! ·····	81
秦王暗点兵·····	83
歌诀的来历·····	87
大衍求一术·····	92
商高数·····	100
苦恼·····	107
直线图象解法·····	113
正数解的判断·····	117
尾声·····	123



序 幕

哒哒、哒哒，原野上响起细碎、但却是有节奏的马蹄声。

马队在缓慢地行进着。秋高气爽，显得有点凉意。阿基米德用他那深邃的特有目光不时扫射着周围的一切：田园里即待收获的庄稼长得多么喜人；偶尔有几个农民在用绞盘提水浇灌秋菜；山岗上一片松林的上端竟然有那么多不知名的飞鸟在盘旋；前面那山坡上有一道多大的裂缝呵，是山洪冲刷的痕迹？是它经历过地震的浩劫而形成？

自从他懂事的那一天起，大自然的一切奥秘就吸引着这几十年前曾经是小孩子的阿基米德，无论是白天、黑夜，寒冬、炎暑；也许是在家，也许是出门，哪怕是只有瞬息的空余时间，他从不肯轻易放过，眼

光总是在观察，脑子总是在思索，双手也总是忙个不停。

这时，他在马鞍上极目远眺，花白的胡须微风轻拂中向胸前紧贴。他昂起头，在那顶金线镶边的帽子衬托下，活象一尊快活的天神。一朵云彩在远处的蓝天飘忽不定，时而象这，时而象那，真是白云苍狗，变幻莫测！这一切都吸引着阿基米德的注意力，他是那样深深地热爱着大自然！为了摸索它的隐秘，为了掌握它的各种规律以便去改造它，他，这位才华洋溢的伟大科学家付出了巨量的心血，在人类文明的发展史上记载着他多少卓越的贡献啊！

远处的高空，一只苍鹰在悠然自得地盘旋，振翼翩翩。于是，就在这匹马的背鞍上，传来一阵低浑而坚定的吟诵声：

蓝天只许飞鸟翱翔，
碧波仅供游鱼翻扑，
自古以来就是如此——天经地义，
谁敢逾越雷池一步？

漫道是造物者绘就的蓝图，
哪管它亿万年根深蒂固。
我们有智慧，定能扭转乾坤，

我们用劳动，可令天翻地覆。

有朝一日，看人类：

搏击风云，刺破太空，擒龙从天降；

出没浪涛，劈开江河，斩蛟自海出。

要问谁是大自然的主宰？

是我们，

把守着通往自由的阳关大路。

阿基米德纵情地高吟着即景诗，时而对左右随从谈论着什么，时而注意倾听旁人的回答。大家知道，烦恼和忧愁从来就不属于他，他却从来都是以征服者的身分出现，而在他心目中，这个世界才是属于他的。可是，今天呢，他是过分地袒露自己的心怀了吗？是什么力量使他如此兴奋、激动、欢欣，甚至在大家的眼里看来，阿基米德简直象个刚懂事的孩童，那么天真烂漫！

叙拉古国王亥洛与阿基米德可算是莫逆之交了，这不只因为他俩是亲戚，又有竹马深情；而更能使他们紧紧地联系在一起的是他们志同道合，既是知音知心，又能知己知彼，他们对了解和改造大自然抱有共同的兴趣，同时都怀有一颗在任何情况下都具有必胜信念的心儿。

俗话说：熟不知礼。在阿基米德看来，亥洛不过是自己的一好朋友而已，哪是什么国王？在一起，没有拘束，没有繁缛的客套；而亥洛呢？在阿基米德面前，他压根儿就不是国王，也只不过是阿基米德的一好朋友。他们时常为一个问题争执得面红耳赤，当着众人面前，使对方无地自容；有时则互相开着过火的玩笑，刻薄和挖苦，甚至有嘲讽和谩骂。

然而，在亥洛的心灵深处，却蕴藏着另外一种特殊的感情，他象小学生对待一位心目中崇拜得五体投地的、博学多才的师长一样去对待自己的老友。

马队仍在缓慢地前进着。

阿基米德心花怒放，男低音又在马背上回荡。

三年过去了。那次依依惜别的情景浮现在眼前：亥洛徒步陪着自己并肩走了十几里路，两人在河岸分手，紧紧地拥抱着。最后，坚实的肩膀被亥洛重重地拍了一下，他大声地嚷叫：“总有一天要叫你下不了台阶的，等着瞧吧！”

回答是轻松而漫不经心的：“没有关系，老朋友，尽管来吧！”

上次，阿基米德在亥洛那华丽的王宫里做客，住了好几个月，两人讨论和解决了那么多科学和技术上的问题，临别时，亥洛象是开玩笑，又象是一本正经地提出一个问题：

“你有能耐，能把地球动一动？”

突如其来的袭击使阿基米德踌躇了一会儿，但他立即坚定而自信地答道：

“只要你给找到支点，我就可以把地球撬起来。”

亥洛非常熟悉阿基米德创立的有关杠杆原理的学说，他也认为，这是完全可能的，只需把动力臂充分加长就行了；当然，亥洛永远也不可能为撬起地球而在宇宙空间找到一个支点，可是他一直认为，这个论点是无可非议的。

因此他说，总有一天，他要找出一个难题来考倒阿基米德。

阿基米德清楚地知道：如果亥洛能找到一个合适的支点，也能找到一根重量很小、强度很高的杠杆，同时有个立足点，可是由于动力臂太长，即使我不停手地扳动杠杆，一辈子也不可能将地球撬起一根细头发丝厚的距离。不过，亥洛是想不到这一点的，权且蒙混他一次吧！

但是，不管怎么说，毕竟好友又要重逢了，这是多么惬意的相会呀！

亥洛差人送去一封热情洋溢的邀请信和一份珍贵的礼物——一顶镶有金丝边的帽子，接着就派出马队。

他天天屈指计算着行程：今天，马队该抵达了。

大清早，他就起床了，对为阿基米德准备的起居室又进行了一次细致的检查，甚至接风的晚餐菜单也一一亲自选定。可是，时间过得有多慢呵！

过晌，亥洛迫不及待地吩咐备马。谁知道这一行人的马队已经到了哪儿？不管到哪儿，逆上去吧！

亥洛与风尘仆仆的阿基米德热烈地拥抱后，并辔回到王宫。

亥洛只给阿基米德短短一天的休息，就抛出他那已准备了三年的难题。

一顶黄橙橙的金色王冠在玻璃框内闪闪发亮，亥洛得意地瞅着阿基米德，慢条斯理地说道：

“怎么样？老朋友！”

“老一套！”阿基米德心不在焉地回答。

“不管怎么说，你给解决这个问题吧！就是这么回事：王冠是用纯质的黄金和黄铜制成的，你确定两种材料各用多少呢？”

“不过，我要补充一下：为了便于计量，这两种材料用量都是整斤的。”

亥洛断定：几天以后，我就是胜利者了。

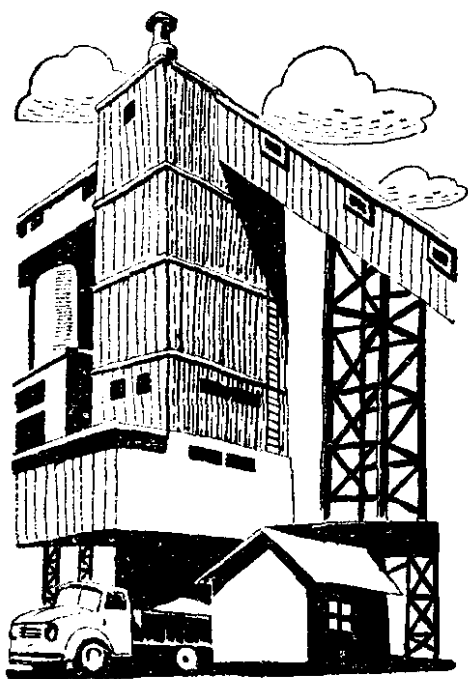
他和老朋友并肩地步出室外。突然，一阵疾风扑面而来。这萧瑟的秋风似乎是宣布阿基米德失败的先

兆，然而，他，叙拉古国王亥洛，一位智力争斗的未来得胜者，却显得更加精神抖擞，眉飞色舞，因为他觉得能够击败老对手——举世闻名的阿基米德，那末，人间的一切疑难在他面前，都会象秋风扫落叶一样，席卷而逝。

然而，在深秋的庭院内，随时袭来的西风究竟带着初冬的寒意。他从口袋里伸出双手，摸了一下衣领上的扣子；随即侧过身去，替老朋友系紧围着外衣的腰带；然后，抬起头来，望了望这副安详镇定、泰然自若的面孔。

阿基米德眼里射出那股深邃的特有目光，蕴藏着多大的力量呵！象是洞察亥洛内心的一切。这名对手不由自主地倒退了两步，充满信心的期望开始动摇。难道这次争斗又将成为老朋友的手下败将？

在沸腾的工地上



巨大的装料机抡起它那粗壮的钢臂，毫不费力地将一斗一斗砂、石铲起来，扔进张口等着的贮料槽，然后，长长的皮带运输机把它们提升到高高的混凝土搅拌楼上。用不多一会儿工夫，停在搅拌机下面的自卸汽车就满载着搅成的混凝土驶向建筑施工工地。

王慧已经习惯于在搅拌楼下观察着汽车的进进出出，她也初步了解这座工厂的生产工艺：一台台搅拌机将定量的砂、石、水泥和水吞进鼓筒，然后又从它的“肚子”里吐了出来。这就是混凝土——近代建筑工程中不可缺少的一种建筑材料，它在沸腾的工地上，是时代的宠儿呢！

“现在，我也是一名建筑工人了。”王慧心里想。“可这算是个什么建筑工人呢？整天同数字打交道，而且这是多么简单的数字！”

在她的心目中，建筑工人就该是头戴安全帽、身穿劳动服，或是在操纵台前按着电钮；或是驾驶着掘土机向地球开战；或是搬砖运瓦、扬锹铲土，挥汗如雨……。



假期中，学校与工厂进行了一次丰富多彩的联欢，接着师傅们便邀请同学们进厂参观；同学们又都兴致勃勃地要求参加一些实际操作。多有意义的活动呵！可是王慧却被安排给工厂的统计员当助手，记录着每天的生产完成量，再汇报给上级统计部门。

这天，王慧正在整理着各种标号混凝土运出量的记录数值，刘老师出现在她面前。

“昨天总计完成混凝土搅拌量多少立方米？”

“三百二十四立方米。”王慧胸有成竹地回答。

“前天完成多少呢？”

“二十四立方米。”前天是星期日，但是仍有一处工程为了赶进度，需要二十四立方米混凝土，这个数字不大，王慧记得很清楚。

“每班各完成多少立方米？”刘老师又问。

“甲班——”王慧瞠目结舌了。

工地是两班作业，混凝土搅拌厂也要两班配合，可是究竟甲班和乙班各完成多少数量，王慧已经记不得了。

能不能通过计算来解答这个问题呢？

“已知条件不足吧。”王慧觉得，这类问题是不能解答的。

可是，刘老师还是与往常一样，从容不迫地向同学们耐心地讲解。这就是新的一课：

过去，我们解一次方程，如有 n 个未知数，就必须有 n 个方程组成 n 元一次联立方程，然后再解出 n 个根。

在生产实践中，经常会遇到方程数量不足的情况，例如 $ax + by + c = 0$ 有两个未知数，但只有一个方程；又如

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

我们知道，以上联立方程可以应用任意一种消元法消去其中的一个未知数，最后还是成为 $ax + by + c = 0$ 的型式。

分别用 c_2 和 c_1 乘以上两式，得

$$\begin{cases} a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z + c_2d_1 = 0 \\ a_2c_1x + b_2c_1y + c_2c_1z + c_1d_2 = 0 \end{cases}$$