高中学业水平考试总复习

——数学

湖南教育出版社

湘教考苑

高中学业水平考试总复习

GAOZHONG
XUEYE SHUIPING KAOSHI
ZONGFUXI

本书编写组 编

SHUXUE

数学

湖南教育出版社

目录

Contents

必修 1

第一章　集合与函数概念　001

第二章　基本初等函数（Ⅰ）　008

第三章　函数的应用　013

模块测试卷（必修 1）　018

必修 2

第一章　空间几何体　022

第二章　点、直线、平面之间的位置关系　027

第三章　直线与方程　032

第四章　圆的方程　036

模块测试卷（必修 2）　040

必修 3

第一章　算法初步　044

第二章　统　计　049

第三章　概　率　053

模块测试卷（必修 3）　057

必修 4

第一章　三角函数　061

第二章　平面向量　067

第三章　三角恒等变换　072

模块测试卷（必修 4）　076

必修 5

第一章　解三角形　080

第二章　数　列　084

第三章　不等式　088

模块测试卷（必修 5）　092

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（一）　096

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（二）　101

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（三）　106

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（四）　111

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（五）　116

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（六）　121

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（七）　126

湖南省普通高中学业水平考试模拟试卷（八）　131

参考答案　136

必修 1

第一章　集合与函数概念

学习目标

知识点	学习目标
集合的含义与表示	了解集合的含义;能用列举法、描述法表示集合;了解元素与集合的关系,能判断元素与集合的关系.
集合间的基本关系	了解集合间的包含与相等的含义,知道全集与空集的含义;理解用 Venn 图表示集合的意义.
集合的基本运算	理解集合的并集、交集和补集的含义及运算,能用 Venn 图解释集合的运算;会求集合的交集、并集和补集.
函数的表示法	知道映射的概念;了解函数的概念;掌握函数的表示法,并能求简单函数的定义域和值域;了解简单的分段函数及其应用.
函数的单调性与最大(小)值	掌握函数的单调性与最大(小)值的概念,会证明简单函数的单调性,并能用函数的单调性求函数的最大(小)值.
函数的奇偶性	理解函数的奇偶性的含义,会判断简单函数的奇偶性.

要点解读

一、集合的含义与表示

集合的元素有三个基本特征:分别是确定性、互异性和无序性.元素 a 和集合 A 的关系是属于($a\in A$)或不属于($a\notin A$)的关系,不存在其他情况.集合的表示法有列举法和描述法两种.

【例 1】若使集合 $A=\{x|ax^2+2x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$ 中,有且只有一个元素的所有 a 组成集合为 N,则　(　　)

A. $N=\{-1,1\}$　　B. $N=\{0,1\}$

C. $N\subsetneqq\{-2,-1,0,1,2\}$　　D. $N\subsetneqq\{-1,0,1\}$

答案:C

解析:当 $a=0$ 时,方程 $ax^2+2x+a=0$ 只有一个根,即 A 中有且只有一个元素;当 $a\neq0$ 时,要使方程有且只有一个根,即要 $\Delta=2^2-4a^2=0$.

由此解得 $a=\pm1$.

故 $N=\{-1,0,1\}$,显然 $N\subsetneqq\{-2,-1,0,1,2\}$.

说明:注意对二次项系数可能为 0 的情形进行讨论.

【例 2】已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3=0\}$,若 $a\in A$,则 $a=$________.

答案:-3 或 1

解析:因为方程 $x^2+2x-3=0$ 的解为 $x_1=-3,x_2=1$,所以 $A=\{-3,1\}$,又 $a\in A$,故 $a=-3$ 或 1.

说明:此题中的元素为方程的根,求集合 A 的元素就是解方程,此题主要考查对集合语言的理解.

二、集合间的基本关系

集合间的基本关系有子集、真子集、相等三种．A 是 B 的子集，就说 A 包含于 $B(A\subseteq B)$，A 不是 B 的子集，就说 A 不包含于 $B(A\nsubseteq B)$．真子集和相等是两种特殊的子集关系，即如果 A 是 B 的真子集$(A\subsetneqq B)$，则一定有 A 是 B 的子集$(A\subseteq B)$；如果 A 和 B 相等$(A=B)$，也一定有 $A\subseteq B$．

【例 3】已知 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{1,2,3,5\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则 A 可以是　　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{4\}$

答案：C

解析：因为 $A\subseteq B$，所以集合 A 的元素一定是集合 B 的元素；同理，集合 A 的元素也是集合 C 的元素．

所以，集合 A 的元素即为集合 B 与 C 的公共元素 2，即 $A=\{2\}$．

说明：本题也可以用排除法求解，因为$\{1,2\}$不是 C 的子集，$\{2,4\}$和$\{4\}$都不是 B 的子集，故 A、B、D 都不符合要求，只有 C 是正确的．

【例 4】已知集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是____________．

答案：$(-\infty,-2]$

解析：因为 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$．

由 $A\subseteq B$，知 $a\leqslant -2$，即 a 的限值范围是$(-\infty,-2]$．

说明：此类问题，画出如图 1—1—1 所示的图形帮助分析，常常是十分有效的，这就是数形结合思想的简单应用．

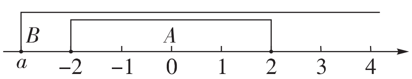

图 1—1—1

【例 5】已知集合 $S=\{a,b,c,d,e\}$，试写出包含集合$\{a,b\}$的 S 的所有子集，并指出哪些是 S 的真子集．

解析：集合 S 的包含$\{a,b\}$的所有子集为：

$$\{a,b\};$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\};$$
$$\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\};$$
$$\{a,b,c,d,e\}.$$

共有 8 个，其中前 7 个是 S 的包含$\{a,b\}$的真子集．

说明：列举各个子集时要做到清晰有序，不重不漏．这里所采用的列举方式常称为“查字典法”．一般地，含有 n 个元素的集合的子集的个数为 2^n．

三、集合的基本运算

集合的基本运算有交集、并集和补集三种．

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，

$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$．

【例 6】设集合 $A=\{0,1,2\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，则集合 B 可能是　　(　　)

A. $\{0,1,2,4\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,3,4\}$

答案：D

解析：因为 $A=\{0,1,2\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，所以 B 中必有元素 3 和 4，而元素 0，1，2 可以有也可以没有，只有 D 符合要求．

说明：集合 B 有多种可能性，只有 D 选项符合题设要求，此题的解法其实就是排除法．

【例 7】设集合 $P=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2\leqslant 9\}$，则 $P\cap M=$　　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

答案：B

解析：由已知得 $P=\{0,1,2\}$，$M=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，故 $P\cap M=\{0,1,2\}\cap\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2\}$.

说明：本题考查集合的概念与运算，先化简再求交集是解题的基本策略.

【例 8】已知 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$.

(1)求 $\complement_{(A\cup B)}B$ 与 $\complement_A(A\cap B)$；

(2)从(1)中你可以发现什么规律？

(3)用(2)的规律解答下列问题：已知 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x|3<x\leqslant 4\}$，求 $a+b$ 的值.

解析：(1)因为 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

所以 $\complement_{(A\cup B)}B=\{1,2,3\}$.

又 $A\cap B=\{4,5,6,7\}$，所以 $\complement_A(A\cap B)=\{1,2,3\}$.

(2)由(1)可发现

$\complement_{(A\cup B)}B=\complement_A(A\cap B)$.

(3)因为 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\complement_A(A\cap B)=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$.

又 $B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，所以 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$.

由 $-1+4=-a$，$-1\times 4=b$，得 $a+b=-7$.

说明：(1)中发现的结论 $\complement_{(A\cup B)}B=\complement_A(A\cap B)$，也可以用 Venn 图得到，因为 $\complement_{(A\cup B)}B$ 和 $\complement_A(A\cap B)$ 均为如图 1－1－2 的阴影部分所表示的区域.

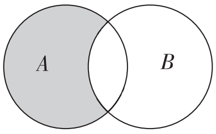

图 1－1－2

四、函数的概念及表示

函数有三个要素，分别是定义域、值域和函数关系式，其中定义域和函数关系式是最本质的要素，因为这两者确定之后，值域随之而定.

函数的表示方法有解析法、列表法和图象法三种，三种表示法各有特色，要善于灵活运用.

【例 9】求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\ln x+\sqrt{16-x^2}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}2^x, -1<x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{x-1}, 1<x\leqslant 4.\end{cases}$

解析：(1)要使函数有意义，需有 $\begin{cases}x>0,\\16-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>0,\\(x+4)(x-4)\leqslant 0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x>0,\\-4\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

由此解得 $0<x\leqslant 4$.

故所求函数的定义域为 $(0,4]$.

(2)这是一个分段函数，分段区间是 $(-1,1]$ 和 $(1,4]$，取它们的并集 $(-1,4]$，即为原函数的定义域.

说明：求函数定义域的主要步骤是建立不等式(组)，并解不等式(组). 对于分段函数，各"段"是一个整体，因而函数的定义域就是各"段"的并集.

【例 10】已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出：

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值是________，满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是________.

答案：1；2

解析：由表格中的函数关系，可得 $g(1)=3$，$f[g(1)]=f(3)=1$.

进一步可列出 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$对应的函数关系如下表所示：

x	1	2	3
$f[g(x)]$	1	3	1
$g[f(x)]$	3	1	3

由表格中所反映的函数关系，可知满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$的 x 的值为 2.

说明：本题中的函数关系是用表格给出的，表格中列出了函数的所有可能的函数值.

【例 11】函数 $f(x)$对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，试求 $f[f(5)]$的值.

解析：因为 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=\dfrac{1}{f(x+2)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)$.

所以，$f(x)$是以 4 为周期的周期函数.

$f(5)=f(4+1)=f(1)=-5$.

$f(-5)=f[4+(-5)]=f(-1)=f(4-1)=f(3)=f(1+2)=\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{5}$.

故 $f[f(5)]=f(-5)=-\dfrac{1}{5}$.

说明：本例中的 $f(x)$不是一个具体的函数，已知条件是一个递推关系式而不是对应关系，因此，要充分挖掘所求函数值与已知函数值的联系，利用递推关系求出函数的值.

五、函数的奇偶性

如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件. 因此判断函数的奇偶性时，首先要看定义域是否具有对称性.

【例 12】已知函数 $f(x)=x^3+a$ 为奇函数，则 $a=$__________.

答案：0

解析：因为 $f(x)$为奇函数，又 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(0)=0$，即得 $a=0$.

说明：由奇函数的定义，知 $f(-0)=-f(0)$，即得 $f(0)=0$，这是在 $x=0$ 有定义的奇函数的一个性质.

【例 13】设 $f(x)$为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+2x+b$（b 为常数），则 $f(-1)=$ (　　)

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -3

答案：D

解析：由题意，知 $f(0)=2^0+b=0$，故 $b=-1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+2x-1$，又由于函数为奇函数，故有 $f(-1)=-f(1)=-3$.

说明：本题考查奇函数的定义及性质的灵活运用，解题时先由 $f(0)=0$ 得出 b 的值，再由 $f(-1)=-f(1)$，将要求的值转化为求 $f(1)$的值.

六、函数的单调性和最大（小）值

对于函数 $y=f(x)$及其定义域的某个区间 D 内的两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$恒成立，则称 $f(x)$在区间 D 上是增函数；

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$恒成立，则称 $f(x)$在区间 D 上是减函数.

函数 $y=f(x)$在区间 D 上是增函数或减函数，就说该函数在区间 D 上是单调的，函数单调性能得出函数的自变量和函数值的大小关系，可以正逆互推，即

如果 $f(x)$在 D 上是单调递增函数，则有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0(x_1,x_2\in D)$；

如果 $f(x)$在 D 上是单调递减函数，则有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0(x_1,x_2\in D)$.

函数 $y=f(x)$的最大(小)值 M 是函数 $y=f(x)$的所有值中的最大(小)的一个. 因此，判断 M 是 $y=f(x)$的最

大值,需要满足两个条件:

(1)在定义域内恒有 $f(x)\leqslant M$;

(2)存在 x_0 属于定义域,使得 $f(x_0)=M$.

同样,判断 M 是 $y=f(x)$ 的最小值,也需要满足条件:

(1)在定义域内恒有 $f(x)\geqslant M$,

(2)存在 x_0 属于定义域,使 $f(x_0)=M$.

【例 14】如果函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$在区间$[1,2]$上的最大值比最小值大$\frac{a}{2}$,则 a 的值为________.

答案:$\frac{3}{2}$或$\frac{1}{2}$

解析:当 $a>1$ 时,$f(x)=a^x$ 在$[1,2]$上为增函数,故最大值 $M=f(2)=a^2$,最小值为 $a'=a$,由题意知

$$a^2-a=\frac{a}{2},$$

由此解得 $a=\frac{3}{2}$($a=0$ 舍去).

当 $0<a<1$ 时,$f(x)=a^x$ 在$[1,2]$上为减函数,故最大值 $M=f(1)=a$,最小值 $M'=a^2$,由题意知

$$a-a^2=\frac{a}{2},$$

由此解得 $a=\frac{1}{2}$($a=0$ 舍去).

说明:因为 $f(x)=a^x$ 的单调性与 a 的取值范围有关,故解题时要分类讨论.

【例 15】已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x>0)$.

(1)证明:$f(x)$在$[0,1]$上为减函数,在$[1,+\infty]$上为增函数;

(2)求函数 $f(x)$在$[2,3]$上的最小值.

解析:(1)任取 x_1,x_2,且 $1\leqslant x_1<x_2$,则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\\&=(x_1-x_2)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\\&=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2},\end{aligned}$$

因为 $1\leqslant x_1<x_2$,所以 $x_1-x_2<0,x_1x_2>1,x_1x_2-1>0$,故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以,$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上为增函数;同理可证 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在$[0,1]$上为减函数.

(2)因为 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在$[2,3]$上为增函数,所以当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$取最小值 $f(2)=\frac{5}{2}$.

说明:此类问题概念性强,解题过程有特定的程序化模式,务必理解和掌握.

基础过关

1. 已知集合 $A=\{x|x\geqslant3\sqrt{3}\}$,$x=2\sqrt{7}$,则下列关系中正确的是 ( )

A. $x\subsetneqq A$　　B. $x\notin A$　　C. $\{x\}\in A$　　D. $\{x\}\subsetneqq A$

2. 集合 $A=\{x|0\leqslant x<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$的真子集的个数是 ( )

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

3. 已知 $M=\{y|y=2^{-x}\}$,$N=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$,那么 $M\cap N=$ ( )

A. $\{y|y>1\}$　　B. $\{y|y\geqslant1\}$　　C. $\{y|y>0\}$　　D. $\{y|y\geqslant0\}$

4. 设集合 $M=\{x \mid x^2-x<0\}$，$N=\{x \mid x<2\}$，则 ( )

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cap N=M$　　C. $M\cup N=M$　　D. $M\cap N=\mathbf{R}$

5. 已知 $f(x+1)=3x+2$，则 $f(x-1)=$ ( )

A. $3x$　　B. $3x-4$　　C. $3x-1$　　D. $3x+1$

6. 函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ 的值域是 ( )

A. $[0,\sqrt{3}]$　　B. $[0,4]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[0,2]$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

8. 函数 $y=x^2+bx+c$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递增函数，则 b 满足的条件为 ( )

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

9. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x^2-16<0\}$，$B=\{x \mid x^2-4x+3<0\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$________.

10. 对于函数 $y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$，其最小值为________.

11. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=$________.

12. 若函数 $f(x)=(m-1)x^2+mx+3$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的单调递减区间为________________.

13. 已知集合 $A=\{(x,y) \mid x^2-2x+y^2\leqslant 0\}$，$B=\{(x,y) \mid y\leqslant x+a\}$，若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,4]$，试求实数 a,b 的值.

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

学习目标

知识点	学习目标
指数与指数幂的运算	理解根式、分数指数幂的意义，能进行指数幂的运算.
指数函数及其性质	掌握指数函数的概念、图象和性质，了解指数函数模型的简单应用.
对数和对数运算	理解对数的概念及其运算性质，知道换底公式；能较为熟练地进行对数的运算.
对数函数及其性质	掌握对数函数的概念、图象和性质，了解对数函数模型的简单应用；知道函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 互为反函数的特点.
幂函数	了解幂函数的概念；知道函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象和性质.

要点解读

一、指数和对数的运算

(1)指数函数有如下的运算性质：

①$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；②$(a^r)^s=a^{rs}$；③$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(2)对数函数有如下的运算性质：

①$\log_a mn=\log_a m+\log_a n$；

②$\log_a \dfrac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$；

③$\log_a m^n=n\log_a m(a>0,a\neq1,m,n>0)$；

④$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a>0$ 且 $a\neq1,c>0$ 且 $c\neq1,b>0)$.

其中，公式④称为对数的换底公式，应用该公式能将对数的底数化为所需要的形式.

【例 1】若 $\log_a 2=x$，$\log_a 3=y$，则 $a^{2x+y}=$　　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 12

答案：D

解析：由 $\log_a 2=x$，得 $a^x=2$；

由 $\log_a 3=y$，得 $a^y=3$.

故 $a^{2x+y}=(a^x)^2\cdot a^y=4\times3=12$.

说明：指数式和对数式是同一种数量关系的两种不同形式，即 $a^x=b\Leftrightarrow\log_a b=x$. 在具体问题中，这两种形式要善于相互变通和转化.

【例 2】化简下列各式：

(1)$\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}(a>0)$；

(2)$2\log_5 25+3\log_2 64$；

(3)$\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8\sqrt{3}$.

解析：(1)原式$=\dfrac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}$.

(2)原式$=2\log_5 5^2+3\log_2 2^6=4+18=22$.

(3)原式$=\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 4}\cdot\frac{\lg\sqrt{3}}{\lg 8}=\frac{\frac{1}{2}\lg 4\cdot\lg 8\cdot\lg 3}{\lg 3\cdot\lg 4\cdot\lg 8}=\frac{1}{2}$.

说明:根式的运算,一般化归为同底数指数幂的运算;对数式的运算,一般先运用换底公式化为底数相同,再进行运算.

二、指数函数的图象和性质

形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的函数称为指数函数,其定义域为 **R**,值域为$(0,+\infty)$.当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 为减函数;当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 为增函数.

【例 3】函数 $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$的定义域为________,值域为________.

答案:$\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2}\right\}$;$\{y\mid y>0\text{ 且 }y\neq1\}$.

解析:因为 $2x-1\neq0$,所以 $x\neq\frac{1}{2}$,

故函数 $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$的定义域为$\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2}\right\}$.

因为$\frac{1}{2x-1}\neq0$,所以函数 $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$的值域是$\{y\mid y>0\text{ 且 }y\neq1\}$.

说明:本题所涉及的函数为指数函数的复合形式:$y=8^u$,$u=\frac{1}{2x-1}$.解题时既要关注指数函数的图象和性质,又要利用相关函数的图象和性质,要综合考察.

【例 4】已知函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$的图象经过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(1)求函数 $y=f(x)$的解析式;

(2)求证:$f(x)+f(-x)=1$.

解析:(1)因为函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$的图象经过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,所以 $f(0)=\frac{1}{2}$,即 $a-\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2}$,

由此解得 $a=1$.

故函数 $y=f(x)$的解析式为 $f(x)=1-\frac{1}{2^x+1}=\frac{2^x}{2^x+1}$.

(2)因为 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$,$f(-x)=\frac{2^{-x}}{2^{-x}+1}=\frac{1}{1+2^x}$.

所以 $f(x)+f(-x)=\frac{2^x}{2^x+1}+\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x+1}{2^x+1}=1$.

说明:欲求 a 的值,设法建立关于 a 的方程,再通过解方程求出 a,这就是方程思想的运用.(2)的证明中,设法将 $f(x)$和 $f(-x)$统一表示为关于 2^x 的式子,有利于进一步化简,这种方法称为统一量法.

三、对数函数的图象和性质

形如 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的函数,称为对数函数,其定义域为$(0,+\infty)$,值域为 **R**.

当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 为$(0,+\infty)$上的单调递减函数;

当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 为$(0,+\infty)$上的单调递增函数.

【例 5】试比较下列各组数的大小.

(1)$\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.1}$,$\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.2}$,$\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.3}$;

(2)$\log_2\frac{2}{3}$,$\log_2 3$,$\log_3 2$.

解析:(1)因为 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调递减函数,

所以 $1<\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.2}$.

又因为 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.3}<1$,

所以 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.3}<\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{-0.2}$.

(2)因为 $y=\log_2 x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数,

所以 $\log_2 \frac{2}{3}<0<1<\log_2 3$,

又因为 $0<\log_3 2<1$,所以 $\log_2 \frac{2}{3}<\log_3 2<\log_2 3$.

说明:常用函数的单调性直接比较两个函数值的大小,但当比较不能直接进行时,又常找“中间数”充当桥梁和媒介作用,最常用的“中间数”有-1,0 和 1 等等.

【例 6】已知函数 $f(x)=\log_a(a-a^x)(a>1)$.

(1)求函数 $f(x)$的定义域和值域;

(2)讨论函数 $f(x)$在其定义域上的单调性.

解析:(1)因为 $a-a^x>0$,$a>1$,所以 $x<1$.

故函数的定义域为$(-\infty,1)$.

又 $0<a^x<a$,故 $0<a-a^x<a$,$\log_a(a-a^x)<1$,

故函数的值域为$(-\infty,1)$

(2)因为 $a>1$,所以 $g(x)=a-a^x$ 在$(-\infty,1)$上是减函数.

又 $y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数,故 $f(x)=\log_a(a-a^x)(a>1)$在$(-\infty,1)$上是减函数.

说明:函数的定义域和对应关系确定函数的值域,因此求函数的值域时必须考虑其定义域.

四、幂函数

形如 $y=x^a(a\in\mathbf{Q})$的函数称为幂函数.

幂函数的图象和性质变化较为复杂,常数 a 取不同的值,其图象和性质可能有很大的差别.通常情况下,只要求对 $y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=x^{-1}$,$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象和性质有较清楚的认识即可.

【例 7】若点$(2,\sqrt{2})$在幂函数 $y=f(x)$的图象上,则 $f(16)=$________.

答案:4

解析:设 $f(x)=x^a$,

由 $f(2)=\sqrt{2}$,得 $2^a=\sqrt{2}$,$a=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,$f(16)=16^{\frac{1}{2}}=4$.

说明:因已知 $f(x)$为幂函数,故可设 $f(x)=x^a$,此法属于待定系数法.

【例 8】设 $a\in\left\{-1,1,\frac{1}{2},3\right\}$,则使幂函数 $y=x^a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且为奇函数的所有 a 的值为 ( )

A. 1,3　　B. -1,1　　C. -1,3　　D. -1,1,3

答案:A

解析:$y=x^{-1}$,$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域不为 $\mathbf{R}$;$y=x$,$y=x^3$ 既满足定义域为 $\mathbf{R}$,又满足为奇函数,只有 A 符合题意.

说明:对题设几种幂函数的图象和性质稍加分析,即可得出结论.

基础过关

1. 化简$(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$的结果为 ( )

A. $4a$　　B. $4a^{\frac{4}{3}}$　　C. $4ab$　　D. $4a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}$

2.若 $0<a<1$,$b<-1$,则函数 $y=a^x+b$ 的图象不经过　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3.设函数 $f(x)=\lg(2x^2-ax+a)$ 的定义域为 A,若 $A\subsetneqq\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(0,8)$　　B. $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$

C. $[0,8]$　　D. $(-\infty,0]\cup[8,+\infty)$

4.函数 $f(x)=\log_2(x-2)$ 的定义域是________.

5.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x & (x>0),\\ 2^x & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{9}\right)\right]=$________.

6.若函数 $f(x)=\log_a(x+1)$($a>0$ 且 $a\neq 1$)的定义域和值域都是$[0,1]$,试求实数 a 的取值范围.

7.设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x<1,\\ \log_4 x, x>1,\end{cases}$ 求满足 $f(x)=\dfrac{1}{4}$ 的 x 的值.

8.已知函数 $f(x)=\log_a(x+1)$，$g(x)=\log_a(1-x)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）当 $a=6$ 时，求 $f(1)+g(-2)$ 的值；

（2）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求满足 $f(x)>g(x)$ 的实数 x 的取值范围.

第三章　函数的应用

学习目标

知识点	学习目标
方程的根与函数的零点	理解方程的根与函数的零点的概念及关系，会判断简单函数的零点所在的区间.
用二分法求方程的近似解	知道用二分法求方程的近似解的步骤，能根据给出的函数值及精确度，求一个方程的近似解.
几类不同增长的函数模型	理解指数函数、对数函数和幂函数模型的变化规律，能根据不同的条件，选择适当的函数模型解决相关问题.
函数模型的应用举例	应用常见函数的模型，解决一些数学问题.

要点解读

一、方程的根与函数的零点

(1)方程 $f(x)=0$ 的根$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴交点的横坐标$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$的零点.

(2)如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 的值也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

【例 1】函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数为　　(　　)

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

答案：B

解析：当 $x\leqslant 0$ 时，令 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=-3$；

当 $x>0$ 时，令 $-2+\ln x=0$，解得 $x=e^2$.

所以，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$ 有两个零点.

说明：本题既考查函数零点的概念，又考查分类讨论的数学思想，以及函数与方程的数学思想.

【例 2】函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是　　(　　)

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

答案：B

解析：因为 $f(-2)=0.25-6<0$，$f(-1)=0.5-3<0$，$f(0)=1+0>0$，故 $f(-1)\cdot f(0)<0$，函数的零点所在的一个区间是$(-1,0)$.

说明：本题直接由 $f(x)=0$，得 $2^x=-3x$，在同一坐标系中画出 $y=2^x$ 和 $y=-3x$ 的图象，也可大致判断$f(x)$的零点在$(-1,0)$内.

二、用二分法求方程的近似解

用二分法求方程根的基本思路是：对于区间(x_1,x_2)，如果 $f(x_1)$和 $f(x_2)$符号相反，说明 $f(x)$在(x_1,x_2)之间有实根；再取(x_1,x_2)的中点 x，若 $f(x)=0$，则 x 就是方程 $f(x)=0$ 的根，若 $f(x)\neq 0$，则进一步判断 $f(x)$与 $f(x_1)$是否同号. 如果不同号，说明方程$f(x)=0$在区间(x_1,x)内有实根，如果同号，则 $f(x)$与 $f(x_2)$一定不同号，说明方程 $f(x)=0$ 在区间(x,x_2)内有实根.