

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

高等数学

(第六版·上册)

同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅

- ◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解
- ◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

新版

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学(第六版·上册)

同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》(第六版)教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼,帮助读者梳理清楚各章脉络,统揽全局;并在教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽,简明易懂,力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学生《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书,也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第六版上册)同步辅导及习题全解 / 苏志平, 郭志梅主编. —北京: 中国水利水电出版社, 2009
(高校经典教材同步辅导丛书)
ISBN 978-7-5084-6750-4

I. 高… II. ①苏…②郭… III. 高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 146773 号

策划编辑: 杨庆川 责任编辑: 杨元泓 加工编辑: 郑秀芹 封面设计: 李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学(第六版·上册)同步辅导及习题全解
作 者	主编 苏志平 郭志梅
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net(万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658(营销中心)、82562819(万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市梦宇印务有限公司
规 格	148mm×210mm 32开本 11.5印张 440千字
版 次	2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
印 数	0001—7000册
定 价	12.50元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

编 委 会

编 委（排名不分先后）

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘 岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄 河	李思琦	刘 闯	侯朝阳

前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课,是理工科学生学习其他课程的基础和工具,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式,使其成为了众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学,我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求(教学大纲)和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》(同济大学应用数学系主编,第五版,高等教育出版社出版)的章节顺序编写,分为上下两册,共十二章,本册为第一至七章。

各章具体体系及特点如下:

本章知识结构网络图 结合每年考研大纲的要求,分别对各章知识点做了简练的概括,使读者在各章的学习过程中目标明确,有的放矢。

典型例题与解题技巧以及每节课后习题解答 本书尽可能地归纳了该课程所涉及的重要题型,这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的,具有一定的代表性。本书除了包括传统辅导书的解题过程外,还对大部分具有代表性的习题给出了知识点窍和逻辑推理。知识点窍部分简明扼要地点出了题中涉及的核心知识点,让学生清楚地了解出题者的意图;而逻辑推理则注重引导学生思维,旨在培养学生科学的思维方法,掌握答题的思维技巧。

本章重难点及考研要求 阐述每一章中重要的性质定理、公式及结论,并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研常涉及到的内容进行了详细的解释和归纳。目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

由于时间较仓促和编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009年8月

目 录

第一章 函数与极限	1
知识结构网络图	1
1.1 映射与函数	2
本节重难点及考研要求	2
典型例题与解题技巧	2
课后习题解答(习题 1-1)	8
1.2 数列的极限	14
本节重难点及考研要求	14
典型例题与解题技巧	14
课后习题解答(习题 1-2)	16
1.3 函数的极限	18
本节重难点及考研要求	18
典型例题与解题技巧	19
课后习题解答(习题 1-3)	20
1.4 无穷小与无穷大	23
本节重难点及考研要求	23
典型例题与解题技巧	23
课后习题解答(习题 1-4)	24
1.5 极限运算法则	26
本节重难点及考研要求	26
典型例题与解题技巧	27
课后习题解答(习题 1-5)	28
1.6 极限存在准则,两个重要极限	30
本节重难点及考研要求	30
典型例题与解题技巧	31

	课后习题解答(习题 1-6)	33
1.7	无穷小的比较	35
	本节重难点及考研要求	35
	典型例题与解题技巧	35
	课后习题解答(习题 1-7)	37
1.8	函数的连续性与间断点	39
	本节重难点及考研要求	39
	典型例题与解题技巧	39
	课后习题解答(习题 1-8)	41
1.9	连续函数的运算与初等函数的连续性	44
	本节重难点及考研要求	44
	典型例题与解题技巧	44
	课后习题解答(习题 1-9)	45
1.10	闭区间上连续函数的性质	48
	本节重难点及考研要求	48
	典型例题与解题技巧	48
	课后习题解答(习题 1-10)	50
	总习题一全解	51
第二章 导数与微分		56
	知识结构网络图	56
2.1	导数的概念	56
	本节重难点及考研要求	56
	典型例题与解题技巧	58
	课后习题解答(习题 2-1)	62
2.2	函数的求导法则	66
	本节重难点及考研要求	66
	典型例题与解题技巧	67
	课后习题解答(习题 2-2)	70

2.3	高阶导数	75
	本节重难点及考研要求	75
	典型例题与解题技巧	76
	课后习题解答(习题 2-3)	78
2.4	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率	81
	本节重难点及考研要求	81
	典型例题与解题技巧	82
	课后习题解答(习题 2-4)	85
2.5	函数的微分	89
	本节重难点及考研要求	89
	典型例题与解题技巧	90
	课后习题解答(习题 2-5)	92
	总习题二全解	96
第三章 微分中值定理与导数的应用		101
	知识结构网络图	101
3.1	微分中值定理	102
	本节重难点及考研要求	102
	典型例题与解题技巧	103
	课后习题解答(习题 3-1)	106
3.2	洛必达法则	110
	本节重难点及考研要求	110
	典型例题与解题技巧	112
	课后习题解答(习题 3-2)	114
3.3	泰勒公式	116
	本节重难点及考研要求	116
	典型例题与解题技巧	117
	课后习题解答(习题 3-3)	121
3.4	函数的单调性与曲线的凹凸性	124

	本节重难点及考研要求	124
	典型例题与解题技巧	125
	课后习题解答(习题 3-4)	128
3.5	函数的极值与最大值、最小值	135
	本节重难点及考研要求	135
	典型例题与解题技巧	137
	课后习题解答(习题 3-5)	139
3.6	函数图形的描绘	145
	本节重难点及考研要求	145
	典型例题与解题技巧	145
	课后习题解答(习题 3-6)	148
3.7	曲率	151
	本节重难点及考研要求	151
	典型例题与解题技巧	151
	课后习题解答(习题 3-7)	152
3.8	方程的近似解	155
	本节重难点及考研要求	155
	典型例题与解题技巧	155
	课后习题解答(习题 3-8)	157
	总习题三全解	157
第四章 不定积分		164
	知识结构网络图	164
4.1	不定积分的概念与性质	164
	本节重难点及考研要求	164
	典型例题与解题技巧	165
	课后习题解答(习题 4-1)	167
4.2	换元积分法	170
	本节重难点及考研要求	170

典型例题与解题技巧	172
课后习题解答(习题 4-2)	176
4.3 分部积分法	180
本节重难点及考研要求	180
典型例题与解题技巧	180
课后习题解答(习题 4-3)	183
4.4 有理函数的积分	187
本节重难点及考研要求	187
典型例题与解题技巧	190
课后习题解答(习题 4-4)	195
4.5 积分表的使用	200
本节重难点及考研要求	200
典型例题与解题技巧	201
课后习题解答(习题 4-5)	202
总习题四全解	203
第五章 定积分	211
知识结构网络图	211
5.1 定积分的概念与性质	212
本节重难点及考研要求	212
典型例题与解题技巧	214
课后习题解答(习题 5-1)	217
5.2 微积分基本公式	222
本节重难点及考研要求	222
典型例题与解题技巧	223
课后习题解答(习题 5-2)	225
5.3 定积分的换元法和分部积分法	228
本节重难点及考研要求	228
典型例题与解题技巧	229

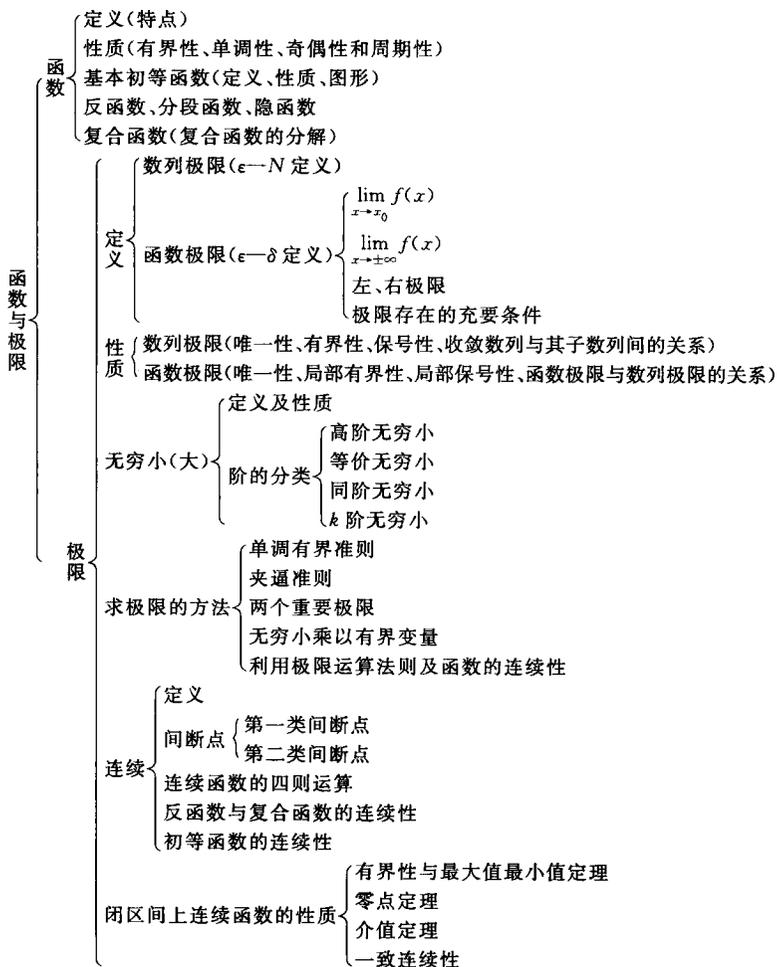
课后习题解答(习题 5-3)	233
5.4 反常积分	240
本节重难点及考研要求	240
典型例题与解题技巧	241
课后习题解答(习题 5-4)	242
5.5 反常积分的审敛法、 Γ 函数	244
本节重难点及考研要求	244
典型例题与解题技巧	245
课后习题解答(习题 5-5)	246
总习题五全解	248
第六章 定积分的应用	256
知识结构网络图	256
6.1 定积分的元素法	256
本节重难点及考研要求	256
6.2 定积分在几何学上的应用	256
本节重难点及考研要求	256
典型例题与解题技巧	257
课后习题解答(习题 6-2)	260
6.3 定积分在物理学上的应用	271
本节重难点及考研要求	271
典型例题与解题技巧	271
课后习题解答(习题 6-3)	274
总习题六全解	277
第七章 微分方程	281
知识结构网络图	281
7.1 微分方程的基本概念	282
本节重难点及考研要求	282

	典型例题与解题技巧	282
	课后习题解答(习题 7-1)	284
7.2	可分离变量的微分方程	286
	本节重难点及考研要求	286
	典型例题与解题技巧	286
	课后习题解答(习题 7-2)	287
7.3	齐次方程	292
	本节重难点及考研要求	292
	典型例题与解题技巧	292
	课后习题解答(习题 7-3)	293
7.4	一阶线性微分方程	298
	本节重难点及考研要求	298
	典型例题与解题技巧	299
	课后习题解答(习题 7-4)	300
7.5	可降阶的高阶微分方程	306
	本节重难点及考研要求	306
	典型例题与解题技巧	307
	课后习题解答(习题 7-5)	310
7.6	高阶线性微分方程	316
	本节重难点及考研要求	316
	典型例题与解题技巧	317
	课后习题解答(习题 7-6)	318
7.7	常系数齐次线性微分方程	322
	本节重难点及考研要求	322
	典型例题与解题技巧	323
	课后习题解答(习题 7-7)	325
7.8	常系数非齐次线性微分方程	329
	本节重难点及考研要求	329
	典型例题与解题技巧	329

	课后习题解答(习题 7-8)	330
7.9	欧拉方程	337
	本节重难点及考研要求	337
	典型例题与解题技巧	338
	课后习题解答(习题 7-9)	339
7.10	常系数线性微分方程组解法举例	342
	本节重难点及考研要求	342
	典型例题与解题技巧	343
	课后习题解答(7-10)	344
	总习题七全解	348

第一章 函数与极限

知识结构网络图



1.1 映射与函数



本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.
2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成,但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y = f(u)$, $u \in D$, 内层函数 $\mu = g(x)$, $x \in E$. 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时, 即 $E^* = \{x \mid g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ 时, 两个函数才能复合. 例如, $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能复合成 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.
3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数, 且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之, 有反函数的函数未必一定是严格单调函数, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 表示同一条曲线, 若用 x 表示自变量, y 表示因变量, 则 $y = f^{-1}(x)$ 及 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, $f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.
4. 分段函数是特别要注意的一类函数, 它用几个不同解析式“分段”表示一个函数, 所以解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合, 重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数, 分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).
5. 本节的难点是复合函数, 重点是复合函数和分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数, 特别是求分段的复合函数, 方法主要有2种: 分析法和图示法.

考研要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示方法, 并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念; 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.



典型例题与解题技巧

题型 I : 判断函数的等价性

【题型分析】 当且仅当给定的两个函数其定义域和对应关系完全相同时, 这两个

函数才表示同一函数,否则表示不同的函数.

例 1 判断下列各组函数是否相等:

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$;

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

分析 当且仅当给定的函数其定义域和对应法则完全相同时,这些函数才表示同一函数,否则表示不同的函数.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故 $f(x) \neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$ 、 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$, 故 $f(x) = g(x) = h(x)$.

例 2 在下列各组函数中,找出两个函数等价的一组:

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$; (2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$.

分析 通过定义域和对应法则是否相同.

解 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$; $y = 1$ 的定义域为 \mathbf{R} , 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x | x \geq 0\}$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 故该组的两个函数不等价.

题型 II: 求函数的定义域

【题型分析】 求函数的定义域有下列原则: ① 分母不能为零; ② 偶次根式的被开方数大于等于零; ③ 对数的真数大于零; ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x | |x| \leq 1\}$; ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$; ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

例 3 求下列函数的定义域:

(1) $y = \ln(x+1) + 2\frac{1}{x-1}$; (2) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$.

分析 求函数的定义域时,一般主要针对一些基本形式来确定其定义域,然后再综合考虑.基本形式可分为 \sqrt{A} , $\frac{1}{A}$, $\ln A$, $\arcsin A$, $\arccos A$ 等,其相应的定义域为 $A \geq 0$, $A \neq 0$, $A > 0$, $|A| \leq 1$ 等.

解 (1) $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(2) \begin{cases} \left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1, \\ 1+x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x| \leq |1+x|, \\ x \neq -1, \end{cases} \text{定义域为 } \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

题型 III: 求函数的表达式

【题型分析】

1. 观察法和变量代换法是解简单函数方程最基本的两种方法.
2. 利用函数表示法的变量无关性判断: 当两个函数定义域相同且对应法则一致时, 这两个函数表示同一个函数.

例 4 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ (a, b, c 均为常数, 且 $|a| \neq |b|$), 求 $f(x)$.

分析 利用函数表示法的“变量无关性”: 当两个函数定义域相同、对应法则一致时, 这两个函数表示同一个函数.

解 由题意可知 $f(x)$ 满足

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}. \quad (1)$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } x = \frac{1}{t}, \text{ 故 } af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct,$$

$$\text{则 } af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx, \quad (2)$$

$$\text{联立 (1)(2) 解得 } f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{ac}{x} - bcx \right).$$

例 5 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且满足 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求 $f(x)$.

分析 通过变量代换将原式中的 x 换成 $1-x$.

$$\text{解 } 2f(x) + f(1-x) = x^2 \quad (1)$$

$$\text{将 } x \text{ 换成 } 1-x, \text{ 得 } 2f(1-x) + f(1-(1-x)) = (1-x)^2,$$

$$\text{即 } 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2. \quad (2)$$

由 (1) 式乘 2 减去 (2) 式即可消去 $f(1-x)$, 得

$$3f(x) = 2x^2 - (1-x)^2, \text{ 即 } 3f(x) = x^2 + 2x - 1,$$

$$\text{亦即 } f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1), \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

题型 IV: 函数的奇偶性

【题型分析】

1. 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数