○ 高等学校教材

线性代数

○ 谢 政

Linear Algebra

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线 性 代 数

Xianxing Daishu

谢 政

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书汲取了中外优秀教材的养分，革新了传统线性代数的体系和内容。较同类教材有以下不同：建立“以线性方程组为主线，以矩阵为主要工具，以初等变换为主要方法”的体系结构；直观、自然地引入概念，严谨、简洁地推证结论，详细、规范地描述方法；针对一些逆命题设计了简单明了的反例；精选了20个浅显易懂的应用实例；扼要介绍了线性代数发展过程中的重大历史事件。全书体系新颖，取材恰当，深入浅出，行文简练，论述严谨，富于启迪，有益于培养抽象思维能力、逻辑推理能力、直观想象能力、数学建模能力和工程实践能力。

本书包括线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型共六章。每章习题按难度分成（A）和（B）两类，其中包含一些研究生入学考试题和实际问题的应用题，书末还给出了部分习题答案或提示，以及重要概念汉英对照。

本书可作为高等学校非数学类专业线性代数课程的教材，也可作为报考硕士研究生的参考书，还可供科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/谢政编著. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-036023-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第183293号

策划编辑 张长虹 责任编辑 李茜 贾翠萍 封面设计 王凌波 版式设计 于婕
插图绘制 尹文军 责任校对 杨雪莲 责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京嘉实印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.5	版　　次	2012年8月第1版
字　　数	280千字	印　　次	2012年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	23.00元

物料号 36023-00

前　言

线性代数是代数学中处理线性关系问题的一个分支，它具有很强的逻辑性、高度的抽象性和广泛的应用性。随着科学技术的发展和计算机的广泛应用，线性代数的作用显得越来越重要，它与微积分、概率统计一起成为高等院校的三门重要数学公共课，学习这门课程有益于培养抽象思维能力、逻辑推理能力、直观想象能力、数学建模能力和工程实践能力。

由于线性代数中概念、结论和方法较多，前后知识联系紧密、互相融合，而且解题技巧性强、证明方法灵活，因此初学者普遍感到概念抽象，定理繁多，缺乏一条明确的主线。基于以上问题，作者编写了这本教材。它包括线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简和二次型等六章，概括起来具有以下五个特色：

一、建立新的体系结构

建立“以线性方程组为主线，以矩阵为主要工具，以初等变换为主要方法”的体系结构，揭示各章节之间的有机联系，遵循低年级大学生的认知规律，培养数学思维能力。

首先，突出线性方程组的中心地位，主要内容都围绕线性方程组展开。解线性方程组是线性代数的第一个问题，二元一次方程组已成为中学教学内容，因此，将线性方程组放在第 1 章，这既是依照历史发展的脉络，也与中学内容相衔接，自然直观。第 2 章至第 4 章的矩阵、行列式、向量空间与线性空间都是以线性方程组为背景而引入的，例如，本书从线性方程组引出矩阵，由线性方程组的初等变换得到矩阵的初等变换，再得到行列式的初等变换；从线性方程组的消元法引出阶梯矩阵、最简阶梯矩阵和矩阵的等价标准形；从线性方程组引出矩阵方程有解判别准则和求解方法，进而简化了可逆矩阵的定义、得到了两个向量组等价的判别准则；从 2×2 和 3×3 线性方程组解的表达式引出二阶和三阶行列式；从线性方程组的解引出向量的线性表示；从齐次线性方程组的非零解引出向量组的线性相关性；从齐次线性方程组的解集引出向量空间；从方程组的初等变换不改变方程组的解集，推出矩阵的初等列（或行）变换不改变行（或列）向量的线性相关性和线性组合关系。第 5 章矩阵的相似化简和第 6 章二次型则是线性方

程组理论和方法的应用。

其次，发挥矩阵的主导作用，着力用矩阵的理论和方法来处理线性代数中的各种问题。虽然在历史上行列式的出现早于矩阵，并且矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的，但是按照逻辑关系，本书将矩阵安排在第2章，而将行列式放在第3章，这有助于低年级大学生用直观的矩阵来理解难懂的行列式，使之明白行列式是方阵的函数，是矩阵的一种运算。把矩阵作为一个相对完整的部分集中在前面，先介绍矩阵的概念、运算、分块、初等变换和秩，这样突出了矩阵的地位，为后面使用矩阵提供了便利。将向量作为特殊的矩阵，利用矩阵和分块矩阵研究线性方程组解的判别准则、向量组的线性表示、线性相关性、极大线性无关组和秩，以及向量空间和线性空间的基变换与坐标变换、线性变换、二次型。

最后，强调矩阵初等变换的重要作用，把初等变换作为贯穿全书的计算工具和证明手段。反复运用初等变换解决各种计算问题，包括解线性方程组，求矩阵的逆和秩，解矩阵方程，计算行列式，判断两个向量组的线性关系，求向量组的秩和极大线性无关组以及将其余向量用极大线性无关组来线性表示，求向量的坐标，求一个基到另一个基的过渡矩阵，化二次型为标准形等。在理论推导中则更多地使用了分块初等变换，这不但可以简化定理的证明而且更加便于学生理解，例如，分块上(下)三角矩阵的逆矩阵和行列式、矩阵秩的性质。

二、重视概念的阐释

概念是数学的基础知识，概念教学在整个教学中起着至关重要的作用。数学概念常常体现着深刻的数学思想，但低年级大学生往往觉得数学概念抽象难懂，为此，本书通过浅显易懂的实际问题引入概念，解释概念的直观意义，剖析概念的内涵和外延。例如，严格区分了“组”与“集合”这两个不同的概念；用平面上若干条直线的交点和空间中若干个平面的交点，分别来解释二元和三元线性方程组的几何意义；由生活实例引出矩阵的定义及其运算；通过推广线性函数，由两组变量之间的线性映射给出矩阵的另一种解释，并阐述矩阵乘积的意义；说明了为何要引进初等矩阵；将矩阵的等价标准形中1的个数定义为该矩阵的秩；由线性方程组的求解引出行列式的递归定义；由线性方程组引出向量组的线性组合和线性相关以及向量空间；揭示了线性相关的含义；由两组变量之间的线性映射引出两个线性空间之间的线性映射；由求矩阵的幂引出相似矩阵；由相似矩阵引出特征值和特征向量，并给出了特征值和特征向量的几何意义；通过平面上有心二次曲线经旋转变换化为标准方程，引出二次型及其标准形、合同矩阵。

将向量空间、Euclid空间和线性空间集中于第4章，从平面向量和空间向量过渡到n维向量，进而过渡到向量空间，再从向量空间过渡到内积空间和线性空

间，这样既凸显了三种空间之间的逻辑关系，也便于从整体上把握线性空间。

三、强调反例的运用

反例是纠正错误的有效方法，是判断命题真伪的重要手段。反例是对命题十分简明的否定，它具有事半功倍的作用，恰当的反例能帮助读者正确理解和掌握数学概念及定理。寻求反例的过程是加深理解、巩固知识的过程，也是培养学生逆向思维和辩证思维的过程。反例应当言简意赅，这样才更有说服力，才能给学生留下深刻的印象。本书考察了许多命题的逆命题，设计了一些简单明了的反例。例如，矩阵乘法不满足交换律，向量组线性相关而它的部分组线性无关，向量组线性相关而它的升维组线性无关，秩相等的向量组不等价，线性变换把线性相关的元素组变成线性相关的元素组，矩阵的等价、相似与合同之间的关系，有相同的特征多项式或相同的迹的两个矩阵不相似，等等。

四、注重理论联系实际

线性代数的理论来源于实践，它可以用于经济学、管理科学、运筹学、计算机科学、物理学、化学、生物学、遗传学、人口学和统计学中解释基本原理和简化计算。讲述线性代数理论的实际背景和应用问题，能很快激发学生的学习积极性，从而引发学生思考，引导学生提问题，进一步促使学生自然地得出并理解概念和结论的目的，有着水到渠成的效果。基于此，本书不但在每章将适合低年级大学生阅读的一些应用实例汇集成一节，而且还选编了相应的应用性习题，这样使得学生在学习数学理论的同时学习数学建模方法，学会运用数学去解决实际问题，以达到培养学习兴趣、工程应用能力和创造性能力的目的。这些应用实例包括：营养配方问题，交通流问题，电路分析问题，化学方程式的配平问题，多项式插值问题，图的邻接矩阵，计算机死锁问题，信息加密问题，职工培训问题，二阶、三阶行列式的几何意义，分式方程与平面方程，Fibonacci 数，阅读问题，最小二乘法，数列的通项，$\mathbb{R}^2$上线性变换的几何表示，色盲遗传模型，兔子与狐狸的生态模型，齐次多项式的条件极值，多元函数的极值。

五、点评历史事件

学好线性代数，还应当了解概念和理论产生的历史背景，这样有助于准确理解基本概念、正确掌握基本理论。为此，每一章都单独用一节来点评历史事件，描述概念的来龙去脉，介绍理论的前因后果，展现数学家的历史功绩，从而使读者了解数学创造的真实过程，增加阅读乐趣，激发学习热情，提高数学素养。

本书每章的“应用实例”一节、第 4.6 节线性空间及其线性变换、第 5.4 节 Jordan 标准形以及一些难度较大的证明，任课教师可根据教学的实际情况酌情处理；每章的“历史事件”一节为课外阅读材料。

本书配置了适量的习题，其中包含一些研究生入学考试题和实际问题的应

用题。每章中的习题分成(A)和(B)两类,(A)类习题注重基础练习,(B)类习题强调综合运用。希望通过这些习题能使学生开阔眼界,拓宽思路,激发兴趣。另外,教师可通过电子邮件 xiezheng@nudt.edu.cn 取得本书的教学课件。

在本书的编写过程中,作者查阅了许多书籍和杂志,并引用了一些文献中的应用实例和历史故事,恕不一一列出,在此谨向有关作者致谢。作者还要感谢陈挚副教授,他为本书精心配置了部分习题,并在试用本书后提出了许多中肯的意见。

作者热忱欢迎各位同行和读者对本书多提宝贵意见和建议,以便进一步修改完善。

谢 政
2012 年 7 月 2 日
于国防科技大学

目　　录

第 1 章　线性方程组

线性方程组是线性代数的第一个研究内容，它在自然科学、工程技术和管理科学中有着广泛的应用，这得益于需求牵引和技术推动：现实世界中大量的复杂问题只有简化为线性方程组才能求解，并且高速发展的计算机技术使得成千上万个未知量的线性方程组的求解成为可能.

本章首先介绍线性方程组的基本概念及几何意义；然后介绍阶梯方程组的回代法，并给出了解的判别准则；最后介绍线性方程组的初等变换以及一般线性方程组的消元法.

1.1　线性方程组的基本概念

所谓线性方程就是一次方程. 一个 **n 元线性方程**是指具有如下形式的方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**未知量**，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为**系数**，b 称为**常数项**.

例如，$2x=4$ 是一元线性方程，方程

$$\sqrt{2}\,x_1+x_2=5$$

是二元线性方程. 但是，方程

$$4x_1+2x_2=x_1x_2$$

和

$$x_2=2\sqrt{x_1}+5$$

都不是线性方程.

从几何上讲，一元线性方程

$$ax=b\ \ (a\neq 0)$$

表示数轴上的一个点；二元线性方程

$$a_1x_1+a_2x_2=b\ \ (a_1,a_2\text{ 不全为零})$$

表示平面上的一条直线；三元线性方程

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b\ (a_1,a_2,a_3\text{ 不全为零})$$

则表示空间中的一个平面；数学上称 $n(n\geqslant4)$元线性方程为**超平面**.

一个 n **元线性方程组**是指一些含相同的 n 个未知量的线性方程所构成的组.

需要指出的是,“组”不同于“集合”,组中元素有序且允许重复,而集合中元素无序且相异.

例如,方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2=3,\\2x_1+x_2=1\end{cases}\tag{1.1}$$

是二元线性方程组,方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\2x_1+2x_2+3x_3=5,\\3x_1+4x_2+5x_3=7\end{cases}\tag{1.2}$$

是三元线性方程组.

容易知道,二元线性方程组表示平面上若干条直线的交点,三元线性方程组表示空间中若干个平面的交点.例如,二元线性方程组(1.1)表示平面上两条直线的交点,见图 1.1;三元线性方程组(1.2)表示空间中三个平面的交点,见图 1.2.

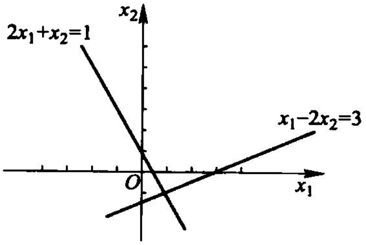

图 1.1 二元线性方程组(1.1)的几何意义

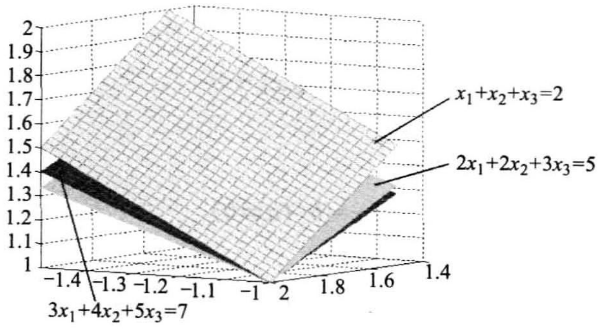

图 1.2 三元线性方程组(1.2)的几何意义

一般地，由 m 个 n 元线性方程所构成的线性方程组可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.3}$$

称之为 $m\times n$ **线性方程组**. $m\times n$ 线性方程组的一个**解**是指 n 个数组成的有序数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依次用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，m 个方程都成立.

用 W 表示线性方程组的全部解的集合，称之为**解集**.

有相同的解集的两个方程组称为**同解方程组**.

若 $W\neq\varnothing$，则称该方程组是**相容的**或**有解**.

若 $W=\varnothing$，则称该方程组是**不相容的**或**矛盾的**或**无解**.

若 W 只含一个元素，则称该方程组有**唯一解**.

W 中任何一个元素称为该方程组的一个**特解**；

W 中全部元素的一个通用表达式称为该方程组的**通解**或**一般解**.

针对线性方程组必须研究以下三个问题：

(1) 线性方程组是否有解？

(2) 线性方程组有解时，有多少个解？

(3) 如何求线性方程组的解？

对于 $m\times n$ 线性方程组(1.3)，若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零，则称此方程组为**齐次线性方程组**；否则称之为**非齐次线性方程组**.

$m\times n$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

总是有解的，因为 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 就是它的一个解，称为**零解**；若一个解中未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的取值不全为零，则称为**非零解**.

显然，我们关心的是齐次线性方程组是否有非零解.

1.2 阶梯方程组的回代法

本节我们针对一类特殊的线性方程组，来讨论解的判别准则以及如何求解.

例 1.1 求解下列线性方程组：

$$(1)\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=3,\\ \qquad x_2+x_3=4,\\ \qquad\quad 2x_3=8;\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}x_1-x_2-2x_3 \qquad +4x_5=4,\\ \qquad\qquad x_3-x_4 \qquad =-3,\\ \qquad\qquad\qquad x_4-2x_5=6.\end{cases}$$

解 (1) 由第三个方程 $2x_3=8$，解得 $x_3=4$；

将 $x_3=4$ 代入第二个方程 $x_2+x_3=4$，得 $x_2=0$；

将 $x_3=4,x_2=0$ 代入第一个方程 $x_1-2x_2-x_3=3$，得 $x_1=7$，于是得该方程组的唯一解：

$$\begin{cases}x_1=7,\\ x_2=0,\\ x_3=4.\end{cases}$$

(2) 将未知量 x_2,x_5 视作参数移到右端，则原方程组可改写为

$$\begin{cases}x_1-2x_3 \qquad\quad = 4+x_2-4x_5,\\ \qquad x_3-x_4=-3,\\ \qquad\qquad x_4=6+2x_5.\end{cases}$$

由第三个方程有 $x_4=6+2x_5$；

将 $x_4=6+2x_5$ 代入第二个方程得 $x_3=3+2x_5$；

将 $x_4=6+2x_5,x_3=3+2x_5$ 代入第一个方程得 $x_1=10+x_2$，于是该方程组有无穷多解，它的通解为

$$\begin{cases}x_1=10+x_2,\\ x_2=\qquad x_2,\\ x_3=3\qquad +2x_5,\\ x_4=6\qquad +2x_5,\\ x_5=\qquad\qquad x_5,\end{cases}$$

其中 x_2 和 x_5 为任意数. □

把视作参数移到方程右端的未知量称为**自由未知量**，而把其余的未知量称为**基本未知量**. 自由未知量可以任意取值. 在线性方程组的通解中，基本未知量均由自由未知量表示.

自由未知量的选取并非唯一，例如，对于例 1.1 的第(2)小题中线性方程组，也可以选 x_1 和 x_4 为自由未知量，此时方程组改写为

$$\begin{cases} -x_2-2x_3+4x_5= & 4-x_1, \\ \quad x_3 = & -3 \quad +x_4, \\ \quad -2x_5= & 6 \quad -x_4. \end{cases}$$

同理可求得方程组的通解

$$\begin{cases} x_1= & x_1, \\ x_2=-10+x_1, & \\ x_3= -3 & +\ x_4, \\ x_4= & x_4, \\ x_5= -3 & +\dfrac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

其中 x_1 和 x_4 为任意数.

对于例 1.1 的第(2)小题中线性方程组,还可选 x_1 和 x_5 为自由未知量,或者选 x_2 和 x_4 为自由未知量.

现在将例 1.1 中解线性方程组的方法总结如下.

(a) 选取某些未知量为自由未知量,将其全部移到方程的右端,使得最后一个方程只含一个基本未知量 x_k,倒数第二个方程除了可能含基本未知量 x_k 外只含基本未知量 x_j,倒数第三个方程除了可能含基本未知量 x_k 和 x_j 外只含基本未知量 x_i……

(b) 从最后一个方程开始求解,逐次将所解得的基本未知量的值代入到前一个方程中,使其只含一个基本未知量,从而可以求解.

这个方法是将后面方程的解代入前面方程,从而求得前面方程中基本未知量的值,因此称之为**回代法**.

但是,并不是任何线性方程组都可以用回代法求解,那么能够使用回代法求解的线性方程组应当具有什么样的特点呢?

通过观察例 1.1 中的线性方程组,不难发现它们呈阶梯形状,称之为**阶梯方程组**.

一般来说,阶梯方程组具有如下形状:

$$\begin{cases} c_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+c_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+c_{1j_3}x_{j_3}+\cdots+c_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+c_{2j_3}x_{j_3}+\cdots+c_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \end{cases}$$