GAODENG SHUXUE

高等学校教材

高等数学

（第二版）下册

南京工学院数学教研组编

高等教育出版社

高等学校教材

高　等　数　学

（第二版）

下　册

南京工学院数学教研组　编

高等教育出版社

本书是参照1980年高等学校工科编审委员会编写的“高等数学教学大纲”修订的．全书仍分上、下两册出版．下册包括向量代数和空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分、曲面积分和场论、含参变量积分等五章．与初版相比，充实了隐函数存在定理、高阶微分、二元泰勒公式、二重积分换元法则、曲面侧的概念以及场论和含参变量积分等内容．

本书由任荣祖先生任主审，陆庆乐教授任复审，并经高等工科数学教材编审委员会于1983年11月召开的审稿会上审阅，同意作为教材出版．

本书可作为高等工科院校师生的教材使用，也可供科技人员及自学者参考．

参加本书编写的有陶永德，高金衡、唐鸿龄、王文蔚、刘耀男、黄新芹、罗庆来等同志．

高等学校教材

高等数学

（第二版）

下 册

南京工学院数学教研组 编

●

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

崇明红卫印刷厂印装

●

开本 850×1168 1/32 印张 10.5 字数 251,000

1978年10月第1版

1985年9月第2版 1985年10月第1次印刷

印数 00,001—15,000

书号 13010·01077 定价 2.15 元

目　　录

第七章　向量代数和空间解析几何

向量在数学、物理、力学以及工程技术中是一种重要的数学工具．空间解析几何是通过空间坐标系，用代数方法来研究空间几何问题的．本章，先介绍向量概念以及向量的某些运算；然后讲述空间解析几何，其主要内容是一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题．这些方程的建立和问题的解决，是以向量作为工具的．

§7-1　向量概念

1．向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量，一类如距离、温度、体积、质量等，这种只有大小没有方向的量称为数量．另一类如力、位移、速度、加速度等，它们不但有大小而且还有方向，我们把这种具有大小和方向的量叫做**向量**．在几何上，可以用空间的一个带有方向的线段即有向线段来表示向量．这个有向线段的长度表示向量的大小，它的方向表示向量的方向．图 7-1 是以 A 为起点，B 为终点的一个向量，记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$．

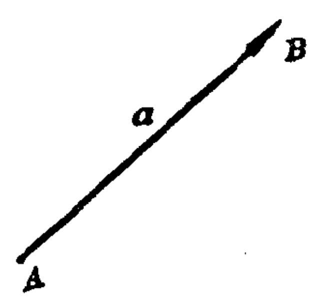


图　7-1

向量的大小也叫做向量的**模**或**长度**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$．

如果两个向量的方向相同、模相等，就称这两个向量**相等**．

根据这个规定，一个向量和它经过平行移动以后所得的向量是相等的．以后我们所讨论的向量，只考虑它的大小和方向．因此用有向线段表示向量时，起点位置可以任意取．但为了方便起

见，在讨论某些问题时，我们常把几个有关向量的起点放在同一点来考虑.

2. 向量的加减法

(1) 向量的加法

由物理实验知道，作用在一个点 O 的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{R}$，是以 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 为边所作成的平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$（如图 7-2). 其它，如两个速度的合速度，两个位移的合位移等，都可以象图 7-2 那样，用以它们为边所作成的平行四边形的对角线向量来表示. 对于两个向量，我们就用这种方法来规定它们的和.

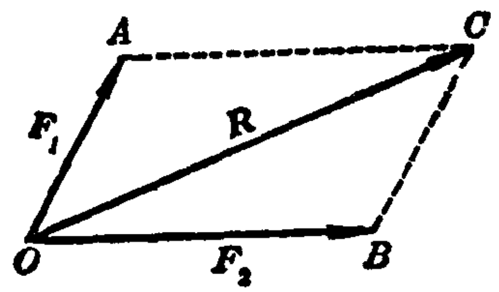


图 7-2

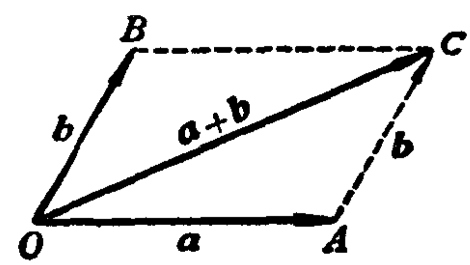


图 7-3

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以这两个向量为两边作平行四边形，其对角线向量 $\overrightarrow{OC}$（图 7-3)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

这种求和的法则叫做**平行四边形法则**.

根据两个向量相等的定义，两个向量的和也可以这样来求：

平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使得 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那末，由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 7-3). 这种求两个向量和的法则叫做**三角形法则**.

三角形法则也可以推广到求任意有限个向量的和. 例如已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，求它们的和时，只要相继作出 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，使前

一向量的终点为后一个向量的起点，最后从 $\boldsymbol{a}$ 的起点向 $\boldsymbol{d}$ 的终点所引的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 的和，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$(图 7-4)．向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 不一定在同一个平面上．

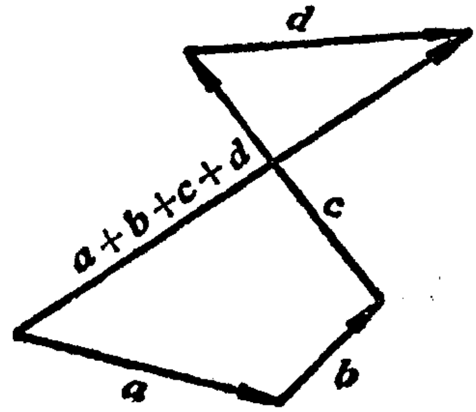


图 7-4

我们知道在力学中讨论汇交力系时，它是否达到平衡，要看这个力系的合力大小是否为零．

在向量中，我们把大小为零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$．从几何上看，零向量就是起点与终点重合的向量．零向量没有确定的方向或说它的方向是任意的．很明显，对于任一向量 $\boldsymbol{a}$ 有 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$．

与已知向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$．

显然，
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

据定义 1，由图 7-5 及图 7-6 易知，向量的加法服从交换律和结合律．

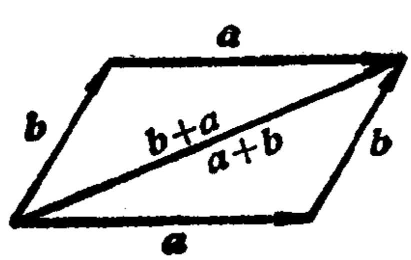


图 7-5

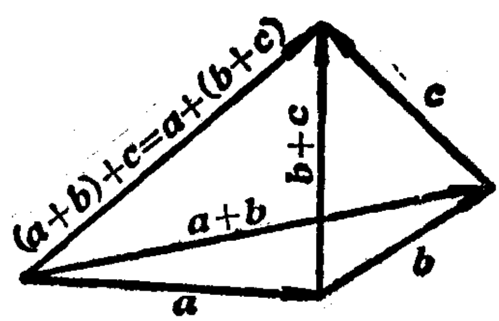


图 7-6

1° 交换律：
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\ (\text{图 7-5});$$

2° 结合律：
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\,(\text{图 7-6}).$$

(2) 向量的减法

向量的减法是向量加法的逆运算.

定义2 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 则 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

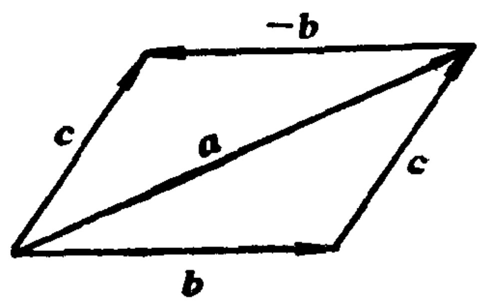


图 7-7

由图 7-7 知，将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到同一点，由 $\boldsymbol{b}$ 的终点向 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由图 7-7 又可知，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 之和，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

3. 数与向量的乘积

在讨论向量问题中，还经常遇到数与向量相乘的概念，例如 n 个相等的向量 $\boldsymbol{a}$ 相加，所得的向量设为 $\boldsymbol{R}$. 显然，$\boldsymbol{R}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，$\boldsymbol{R}$ 的大小是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍，记作 $\boldsymbol{R}=n\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}.$$

下面给出数与向量相乘的一般定义.

定义3 数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它是按下面规定所确定的一个向量：

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

数量与向量的乘积，有下面的运算规律：

1° $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

2° $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

3° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ （λ, μ 是数量）.

1°, 2° 的正确性可由数与向量乘积的定义直接得出，3° 可由三角形的相似比得出. 图 7-8 与图 7-9 分别是 $\lambda>0$ 与 $\lambda<0$ 的情形.

在上面叙述的基础上，再来讲两个问题：

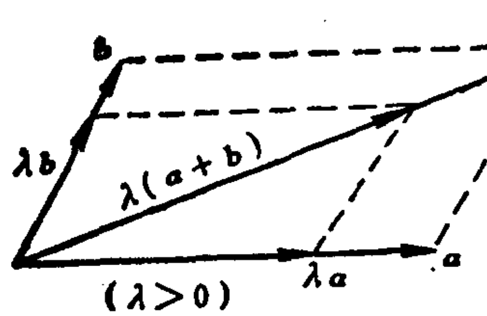


图 7-8

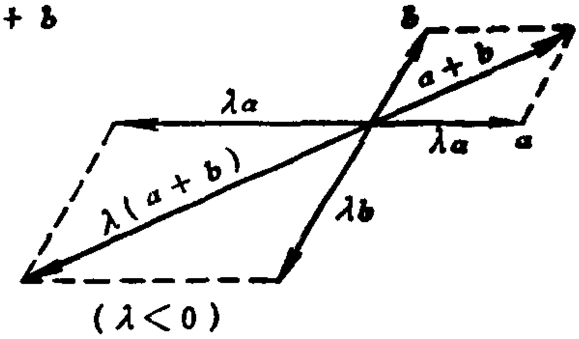


图 7-9

(1) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 平行($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行又称这两个向量共线)的必要充分条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, 其中 λ 是数量.

(2) 模为 1 的向量称为**单位向量**; 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**, 记作 $\boldsymbol{a}_0$.

于是
$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0.$$

4. 向量在轴上的投影

先讲一下两个向量夹角的概念. 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 把它们的起点移至同一点, 规定它们在 0 与 π 之间的那个夹角(设 θ 为其夹角, 即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$)为这两个向量的夹角. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与一个轴 $\boldsymbol{l}$, 在轴上取一个与轴同方向的向量 $\boldsymbol{b}$, 规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 $\boldsymbol{l}$ 的夹角. 至于两个轴的夹角, 只要分别在两个轴上各取一个与该轴同方向的向量, 这两个向量的夹角就规定为两轴的夹角. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角有时也记为$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 类似地, 向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 l 的夹角记为$(\boldsymbol{a}, l)$, 两个轴 l_1, l_2 的夹角记为(l_1, l_2)等.

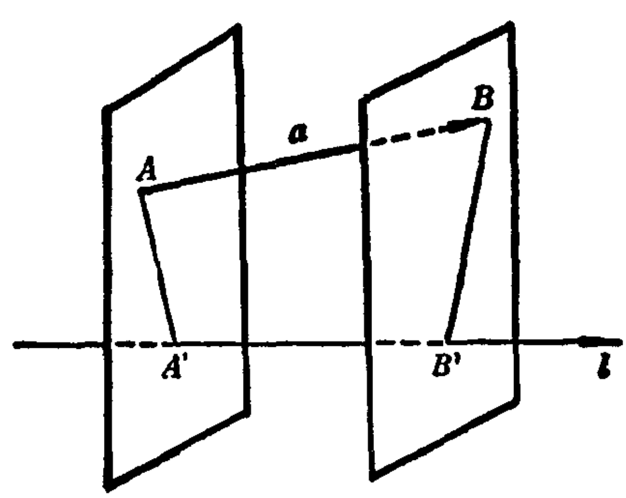


图 7-10

设有一向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 及一轴 $\boldsymbol{l}$, 过向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 各作垂直

于 l 的平面，与轴 l 分别交于 A' 及 B' 两点(图 7-10)，则有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，记作 $(\overrightarrow{AB})_l$ 或 $(\boldsymbol{a})_l$，即

$$(\overrightarrow{AB})_l = A'B'.$$

其中 $A'B'$ 是一个数，其绝对值等于 $\overline{A'B'}$ 的长度，当 $\overline{A'B'}$ 与 l 同方向时，其值为正；反方向时，其值为负.

向量的投影有两个性质，也称为投影定理：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，等于该向量的模乘以这个向量与轴 l 夹角的余弦，即

$$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, l).$$

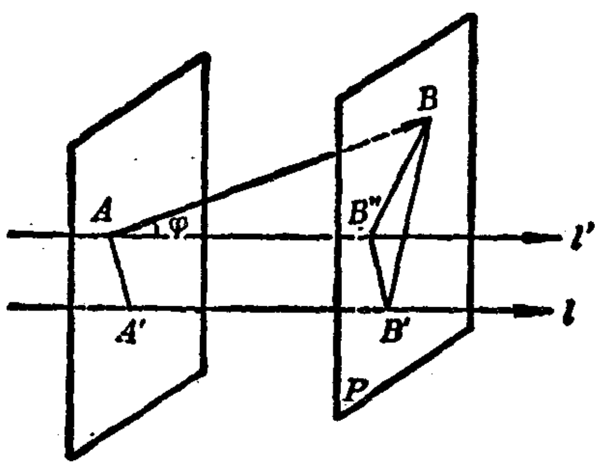


图 7-11

证 如图 7-11，设 $A'B'$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 引一条与轴 l 同方向的轴 l'，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 l 的夹角等于 $\overrightarrow{AB}$ 与 l' 的夹角 φ. 设 B'' 为轴 l' 与平面 P 的交点，作线段 $\overline{AA'}$、$\overline{B''B'}$、$\overline{BB''}$、$\overline{BB'}$. 因 $\overline{BB''} \perp l'$，故

$$AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, l).$$

又因 $\overline{AA'}$，$\overline{B''B'}$ 均垂直于 l，则 $AA'B'B''$ 是一个矩形，于是

$$AB'' = A'B'$$

代入上式，得 $$A'B' = |\overrightarrow{AB}|\cos(AB, l),$$

即 $$(\overrightarrow{AB})_l = |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, l).$$

从这个性质推知，两个相等的向量在同一轴上的投影相等.

(2) n 个向量之和在轴 l 上的投影，等于各个向量在轴 l 上的投影之和，即

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_l=(\boldsymbol{a}_1)_l+(\boldsymbol{a}_2)_l+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_l.$$

以三个向量为例，由图 7-12 容易看出上述结论成立，一般证明从略.

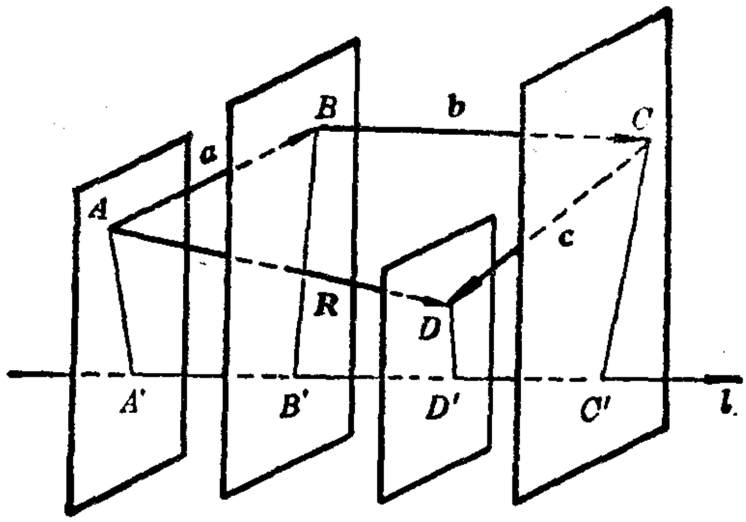


图 7-12

习 题 一

1．在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$为对角线交点，试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

2．设一四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

3．如果$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是给定的向量，试解释下列不等式的几何意义：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

4．一架飞机在静止的大气中的速度为u公里/小时，如果在速度为v公里/小时的西风中要飞向东北方向，领航员应将飞机导向什么方向？它的实际速度又是多少？

5．重p公斤的灯挂在两条铁丝CA和CB上，铁丝与墙夹角是α与β，求铁丝的拉力T_1和T_2（如图）.

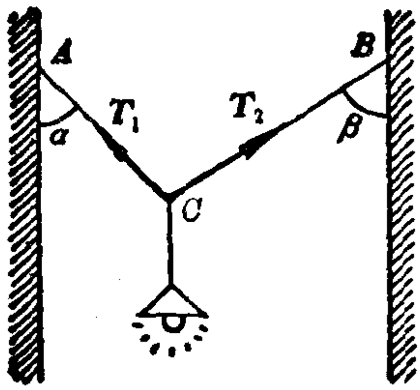
6．设$\triangle ABC$的重心是G，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$，试证

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3),$$

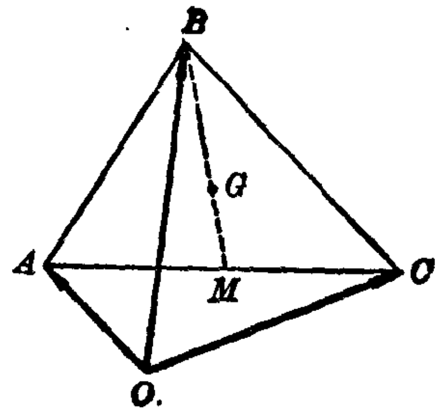
（如图）.

7．证明顺次联接四边形各边中点的诸线段构成一个平行四边形.

8．证明四面体中互不相邻的各对棱的中点的连线相交且互相平分.



（第 5 题图）



（第 6 题图）

9．如果 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 并且 P 是直线 AB 上的点，证明 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，其中 λ, μ 是常数．并证明当 $\mu+\lambda\neq0$ 时有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{\mu+\lambda}.$$

§7-2　空间直角坐标及向量的坐标表示式

上面从几何上讨论了向量的表示和运算，但是有些问题仅靠几何方法是很难解决的．下面引进空间直角坐标系，把数与向量联系起来，用数的代数运算来讨论向量的运算，从而也为研究空间解析几何提供了方便．

1．空间直角坐标系

我们知道，通过平面直角坐标系，可以把平面上任一点与一对有序的实数对应起来．同样，为了用一组有序的实数来表示空间一点的位置，我们把平面直角坐标系推广到空间直角坐标系．

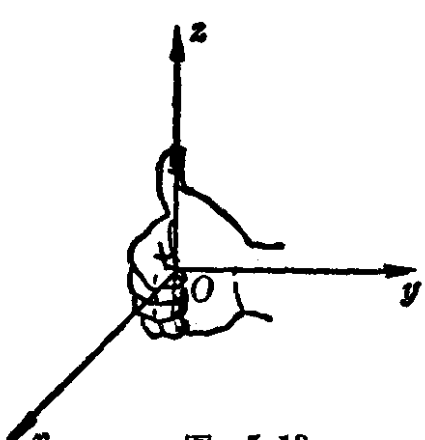


图　7-13

从空间某一点 O 作三条互相垂直的轴 Ox、Oy、Oz．并在这三条轴上选定长度单位（这些长度单位可以不同，但本书中如无特别说明都取相同的长度单位）．Ox、Oy、Oz 叫做坐标轴，分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，O 点叫做坐标原点．其中三个坐

标轴的次序和方向按习惯用法，通常规定为按右手法则排列，即右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴的正向经过 90° 转到 y 轴的正向时，拇指就指向 z 轴的正向，如图 7-13 所示．这样就构成了空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，每两条坐标轴所确定的平面叫做**坐标面**．由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面或称 xy 面；同样，由 x、y 轴分别与 z 轴确定的坐标面，分别叫做 xOz（或 xz）面和 yOz（或 yz）面．

建立了空间直角坐标系，就可以建立空间的点与三个有次序的实数所构成的数组之间的对应关系．

设 M 是空间的一点，过 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，与三个坐标轴分别交于 P、Q、R 三点，设这三点在三个坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，这样就由点 M 唯一地确定了一个三元有序（即有一定次序）数组 (x, y, z)；反之，对于任意三元有序数组 (x, y, z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，再过 P、Q，R 分别作三个垂直于相应的坐标轴的平面，设这三个平面的交点为 M（图 7-14），于是，一个三元有序数组 (x, y, z) 就确定了空间唯一的点 M．这样就建立了空间的点 M 与三元有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系．三元有序数组 (x, y, z) 称为点 M 的坐标，常记作 $M(x, y, z)$．x、y、z 分别叫做点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，或称点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标．显然，原点的坐标为 $(0, 0, 0)$．在以后的叙述中，常把一个点和表示这个点的坐标不加区别，所谓给定一点，就是指给定了这个点的坐标；所谓求一个点，就是指求这个点的坐标．

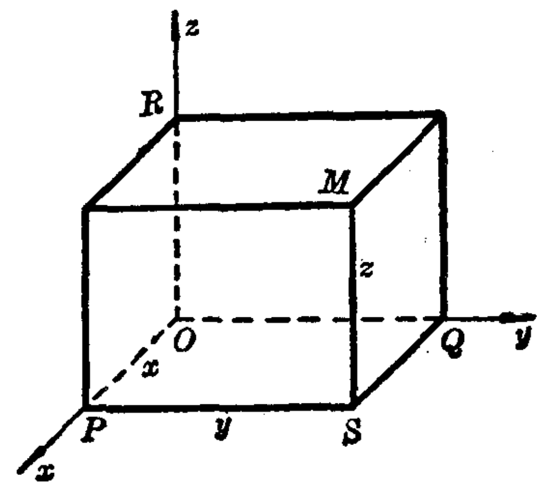


图 7-14

在空间直角坐标系中，三个坐标面把空间分为八个部分，叫做八个卦限．并分别用字母 I、II、…、VIII 表示(图 7-15)，除坐标面上的点外，各卦限内的点的坐标符号规定如下：

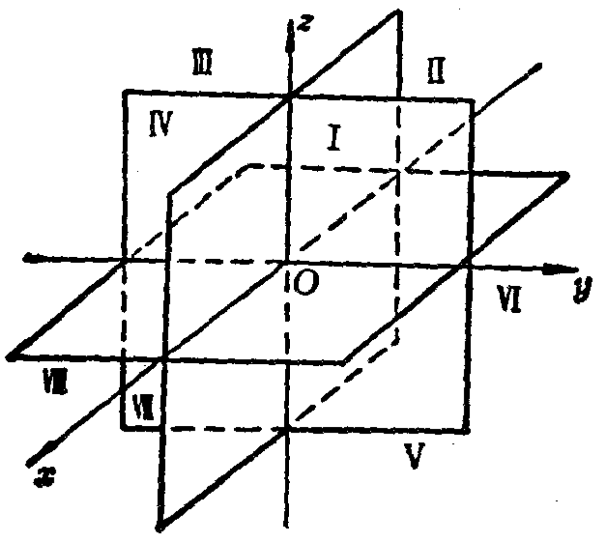


图 7-15

I：(+，+，+)，II：(−，+，+)，III：(−，−，+)，IV：(+，−，+)，V：(+，+，−)，VI：(−，+，−)，VII：(−，−，−)，VIII：(+，−，−)．

例 1 过点 $M(3, 4, 2)$ 分别作三个坐标面的平行平面与坐标面围成一个长方体，

(1) 写出长方体各顶点的坐标；

(2) 写出点 M 分别关于 xOy 平面、y 轴以及原点的对称点的坐标．

解 (1) 设过点 M 所作平行于坐标面的三个平面与三个坐标轴分别交于 P、Q、R，而在三个坐标轴上 P、Q、R 的坐标分别为 3、4、2，故长方体各顶点的坐标为：

$$P(3, 0, 0),\ S(3, 4, 0),\ Q(0, 4, 0),\ O(0, 0, 0),$$

$$T(3, 0, 2),\ M(3, 4, 2),\ U(0, 4, 2),\ R(0, 0, 2).$$

(2) M 关于 xOy 面的对称点 M_1 是在 MS 向下的延长线上与 M 到 xOy 面等距离的点，所以只要将 M 点的竖坐标反号就得 M_1 的竖坐标为 -2，于是 M 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(3, 4, -2)$．

M 关于 y 轴的对称点 M_2 是在过 M 点垂直于 y 轴的垂线上与 M 点到 y 轴距离相等的点，所以 M_2 的纵坐标与点 M 的纵坐

标相同，其余两个坐标与 M 的对应坐标反号，于是得 $M_2(-3,\ 4,\ -2)$；M 关于原点的对称点 M_3 是在过 M 点和原点的直线上，与 M 到原点距离相等的点，所以 M_3 的三个坐标均与 M 的三个对应坐标反号，于是得 $M_3(-3,\ -4,\ -2)$.

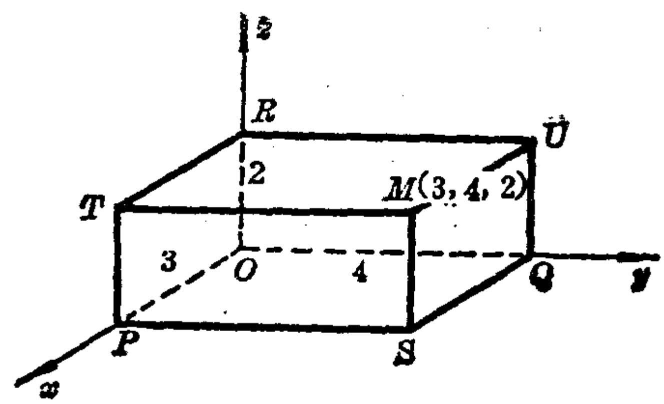


图 7-16

2. 向量的坐标表示式

由力的平行四边形法则，两个不平行的力可以合成为一个合力，反之，一个力也可以分解为两个不平行的分力之和. 而一般向量也有此类似的性质.

设有一个起点为原点终点为 $M(x,\ y,\ z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$（图 7-17）.

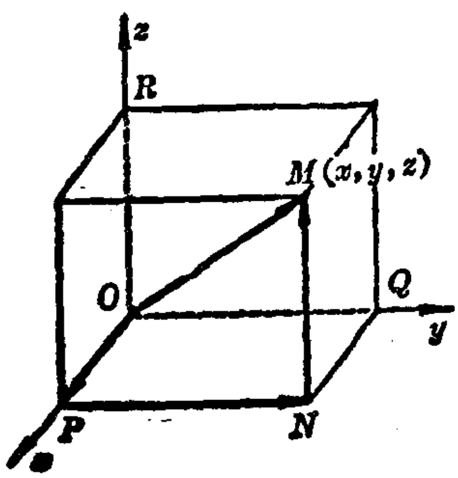


图 7-17

由向量的加法得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

我们沿 x、y、z 轴的正向分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为基本单位向量. 则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

这三个向量分别叫做向量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分向量. 而 x、y、z 分别是 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的投影. 于是

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

上式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式或称投影表示式，简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\},$$

其中 $\{x, y, z\}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 其实 (x, y, z) 就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标，所以任给一个向量 $\overrightarrow{OM}$，都对应着唯一的一个点 M，也就对应着唯一的三元有序数组 (x, y, z)；反之，任给一个三元有序数组 (x, y, z) 都对应唯一的一点 $M(x, y, z)$，也就对应唯一的一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 由此可见，起点在 O 点的向量与三元有序数组 (x, y, z) 有一一对应关系。

一般地，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影为 a_x、a_y、a_z，由于向量可以平行移动，我们可以把 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到原点而经过平移后的向量与原向量相等，它在坐标轴上的投影仍为 a_x、a_y、a_z. 由 (1) 式知 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_y\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

或写为
$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}.$$

这就是说一个向量只要知道它在三个坐标轴上的投影，就可以写出它的坐标表示式(2)。

有了向量的坐标表示式，就可以把原来由几何方法所规定的向量运算转变为向量坐标之间的代数运算. 例如

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$ 其中 λ 为数量.

例 2 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的投影表示式.

解 作向量 $\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$，由图 7-18 知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

由公式(1)知

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$