

特高级教师

点拨高一

2000 最新版

数学

主编：乔家瑞

（北京市教育学院崇文分院

特级教师）

民族出版社

三精丛书

(修订版)

特高级教师点拨高一数学

乔家瑞
鲁有专
彭林
编写

民族出版社

责任编辑:章代伦

图书在版编目(CIP)数据

特高级教师点拨高一数学/乔家瑞主编;鲁有专等编写。

北京:民族出版社,1998.8

(三精丛书)

ISBN 7-105-03163-8

I. 特… II. ①乔… ②鲁… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 22713 号

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64234411-6918 或 6920

民族出版社出版发行

(北京市和平里北街 14 号 邮编 100013)

北京管庄永胜印刷厂印刷

各地新华书店经销

1999 年 6 月第 2 版 1999 年 6 月北京第 1 次印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:10.625 字数:374 千字

印数:10001—18000 册 定价:11.50 元

该书如有印装质量问题,请与本社发行部联系退换
(总编室电话:010-64212794;发行部电话:010-64211734)

夯实基础有捷径 实现理想在点拨

——《特高级教师点拨高中各科》(修订版)序

如何使高中学生从高一一开始就能在学习知识、培养能力、提高素质、夯实基础的过程中,逐渐了解高考,树立高考观念,这是学生、家长和老师们共同关心的话题。怎样做到这一点呢?北京名校的京派名师们,对此进行了辛勤探索,于1998年推出的三精丛书《特高级教师点拨高中各科》,以其鲜明的京派风格,一流的编写质量和丰富的前沿信息,风靡大江南北,好评如潮。纷纷来信赞扬:

●这套书的确是非常有用的辅导资料。例题、讲解、习题样样精,并且层次清晰,内容易懂,多种解题方法并出,有利于我们多方面思维的训练。又在“全章总结”中进行专题讲解,例如,初中数学几何中三种角的求法及折叠问题等等,这样对我们系统掌握知识有很大好处。确实是套好书。(山东日照三中高一四班 李惠)

●为使自己从上高一就得到点拨,以便能提前两年进入高考临战状态,在老师的参谋下,购买了一套《三精丛书——特高级教师点拨高中各科》,自从有了该书以来我各科的成绩都有显著的上升,原因就是 I 坚持每天与教材同步阅读此书。……我代表所有你们的读者再一次道一句:“你们辛苦了,谢谢你们!”(贵州省遵义市钢绳厂子弟中学高二,张大为)

●我是一名高二学生,我读了《特高级教师点拨高中各科》中高二年级的5本书,发现很好,觉得无论做哪一道题都受益匪浅。……我很喜欢该书的安排,从教学精华中,能进一步理解课文内容,还有单元总结,帮助我们梳理了脑袋中零散的知识,真是太好了。我们真谢谢你们。(福建省光泽县一中高二(1)班 张保强)

赞美之词,不一而足。

应广大读者的要求,我们对本丛书进行了重新修订。在修订过程中,特别注重以下几点:

第一,突出对学生能力和综合素质的培养。根据全面推进素质教育的要求,在修改时,注重培养学生收集处理信息的能力、分析和解决问题的能力,激发学生独立思考和创新的意识。

第二,突出原版书的编写体例。这也是第一版书畅销全国的重要原因所在。每科仍按统编教材顺序,分章节编写。每课分教学精华、三题举要和精题练习三部分:“**教学精华**”充分体现北京名师的教学特色,融注作者多年的教学经验,精辟独到,极具启发性。“**三题举要**”部分, **例题剖析**可使学生根据对经典题型的深刻剖析而做到举一反三,更好地把握教材;**错解**分析能使学生拓宽思路,防范错误,找到正确的应试思路和避免错误的有效对策;**试题精选**,引导学生消除“高考神秘”和“高考恐惧”心理,循序渐进地掌握高考命题方向,增强学习信心。“**精题练习**”部分以京派老师们常给自己学生布置的作业为主,极具典型性、启发性和新颖性。每章或单元结束后的“全章(单元)总结”从更高的视觉将全章知识进行归纳和综合,强调知识系统化,突出复习思路点拨,根据素质教育的要求,培养学生对所学知识的灵活、综合运用能力。

第三,本丛书仍把“高考在平时”作为贯穿全书的主线。全书贯穿这条主线旨在将高三总复习时的压力分解到高一、高二阶段,即学生从进入高一开始就对迎战高考所必备的知识、能力和题型进行了解,并循着名师们的思路理解教材,巩固知识,提高能力,掌握解题技巧,最终走向高考。

播种在春天,放飞绿色的希望;收获于秋季,捧回沉甸甸的喜悦。同学们,让京派名师为你指点迷津,送你到达成功的彼岸吧!

鉴于书中调换增删的内容较多,错误之处在所难免,请读者斧正。来信请寄:100081 北京 8163 信箱 编委会 任晓君老师收。

荣德基

1999年6月·北京

— 目 录 —

高一代数

✓ 第一章 幂函数 指数函数 对数函数	(1)
第一单元 集合	(1)
第二单元 一元二次不等式	(6)
第三单元 映射与函数 幂函数	(11)
第四单元 指数函数和对数函数	(23)
全章总结	(32)
高一上学期期终测试题	(39)
× 第二章 三角函数	(41)
第一单元 任意角的三角函数	(41)
第二单元 三角函数的图象和性质	(53)
全章总结	(62)
× 第三章 两角和与差的三角函数 <u>解斜三角形</u>	(71)
第一单元 两角和与差的三角函数	(71)
第二单元 二倍角的正弦 余弦 正切	(78)
第三单元 半角的正弦 余弦 正切	(86)
第四单元 三角函数的积化和差与和差化积	(94)
第五单元 解斜三角形	(101)
全章总结	(106)
× 第四章 反三角函数	(113)
第一单元 反三角函数	(113)
全章总结	(120)
高一下学期期终测试题	(124)

立体几何

✓第一章 直线和平面	(126)
第一单元 平面	(126)
第二单元 空间两条直线	(132)
第三单元 空间直线和平面	(141)
第四单元 空间两个平面	(158)
全章总结	(173)
高一上学期期末测试题	(206)
×第二章 多面体和旋转体	(209)
第一单元 多面体	(209)
第二单元 旋转体	(227)
第三单元 多面体和旋转体的体积	(240)
全章总结	(264)
高一下学期期末测试题	(273)
提示与答案(高一代数)	(275)
提示与答案(立体几何)	(307)

高一代数

第一章 幂函数 指数函数 对数函数

第一单元 集合

一、教学精华

(一)集合的概念

“集合”是数学里不定义的原始概念,常被描述为“由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的”.集合里的各个对象叫做这个集合的元素.

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.

(二)集合的分类

1. 含有有限个元素的集合叫作有限集;
2. 含有无限个元素的集合叫作无限集.

(三)集合的表示法

1. 列举法:把集合的全部元素一一列出来,写在大括号内表示集合的方法.
2. 描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.

(四)元素与集合的关系

1. 元素与集合的从属关系

如果元素 a 是集合 M 的元素,就说 a 属于集合 M ,记作 $a \in M$;

如果元素 a 不是集合 M 的元素,就说 a 不属于集合 M ,记作 $a \notin M$.

2. 集合与集合的容量关系

对于两个集合 P, Q ,如果集合 P 的任何一个元素都是集合 Q 的元素,那么集合 P 叫作集合 Q 的子集,记作 $P \subseteq Q$ 或 $Q \supseteq P$,读作“ P 包含于 Q ”或“ Q 包含 P ”.

如果 P 是 Q 的子集,并且 Q 中至少有一个元素不属于 P ,那么集合 P 叫作集合 Q 的真子集,记作 $P \subset Q$ 或 $Q \supset P$.

对于两个集合 P 与 Q ,如果 $P \subseteq Q$ 同时 $Q \subseteq P$,则称两个集合相等,记作 $P = Q$.

(五)集合与集合的运算关系

1. 交集 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;
2. 并集 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;
3. 补集 $\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A, I \text{ 是全集}\}$.

(六)集合间运算的基本性质

1. $A \cap A = A \cup A = A$;
2. $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$;
3. $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A$;
5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

二、三题举要

(一)例题剖析

【例 1】 设集合 $E = \{-4, m+3, m^2-2m+2, m^3+m^2+3m+7\}$, 集合 $F = \{2, 4, m^3-2m^2-m+7\}$, 且 $E \cap F = \{2, 5\}$, 求 m 的值.

命题意图: 考查集合与集合的运算关系.

解题点拨: 应抓住 $E \cap F$ 中的元素既属于集合 E , 也属于集合 F . 同时应根据集合元素的确定性、互异性和无序性判定满足条件的集合或集合中的元素.

解: $\because 5 \in E \cap F$,

$\therefore 5 \in F$, 即 $m^3-2m^2-m+7=5$.

$\therefore m^2(m-2)-(m-2)=0$.

$(m-1)(m+1)(m-2)=0$.

解之, 得 $m=1, m=-1, m=2$.

(1) 当 $m=1$ 时, $m+3=4$, 即 $4 \in E \cap F$, 但这与 $E \cap F = \{2, 5\}$ 矛盾, 所以应舍去;

(2) 当 $m=-1$ 时, $m+3=2, m^2-2m+2=5, m^3+m^2+3m+7=4$, 所以 $4 \in E \cap F$, 也与已知条件矛盾, 应舍去.

(3) 当 $m=2$ 时, $m+3=5, m^2-2m+2=2, m^3+m^2+3m+7=25$. 则集合 $E = \{-4, 5, 2, 25\}, F = \{2, 4, 5\}$, 满足 $E \cap F = \{2, 5\}$.

$\therefore m=2$.

(二)错解分析

【例2】 设集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 求集合 M 的所有子集的总数.

命题意图: 考查集合的子集的概念以及空集是任何集合的子集.

错解: 从集合 M 中每次取出 1 个, 2 个, 3 个, 4 个元素组成集合 M 的子集. 所以集合 M 的所有子集的总数为 $5+10+10+5=30$ (个).

错误原因: 上述解法是错误的, 产生错误的原因在于对子集的概念理解模糊所致. 实际上, 空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集, 任意一个集合也是它自身的子集.

正确解法: 集合 M 的所有子集的总数为

$$1+5+10+10+5+1=32(\text{个})$$

防范措施: 除了正确理解子集概念可以防止上述错误外, 还可以利用总结此类问题的规律防止发生类似错误:

集合 $\{a_1\}$ 的子集有 $2=2^1$ (个);

集合 $\{a_1, a_2\}$ 的子集有 $4=2^2$ (个);

集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 的子集有 $8=2^3$ (个);

集合 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的子集有 $16=2^4$ (个);

.....

集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的子集有 2^n (个).

【例3】 集合 $P = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $Q = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $P \supset Q$, 则实数 a 的值为().

(A) 1, 2

(B) $1, \frac{1}{2}$

(C) 0, 1, 2

(D) $0, 1, \frac{1}{2}$

命题意图: 考查空集是任何集合的子集, 是非空集合的真子集.

错解: 由集合 P , 得 $x_1=1, x_2=2$. 由集合 Q , 得 $x = \frac{1}{a}$.

$$\therefore P \supset Q, \therefore \frac{1}{a} = 1 \text{ 或 } \frac{1}{a} = 2, \text{ 即 } a=1, a=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 应选 B.

错解分析: 产生错解的原因在于忽略了空集是任何集合的子集, 即当 $a=0$ 时, $Q=\emptyset$, 此时也满足 $P \supset Q$.

正确解法: 应选 D, 因为满足条件的实数 a 的值为 $1, \frac{1}{2}, 0$.

【例 4】 集合 P, Q, M 满足 $P \cap Q = P, Q \cap M = Q$, 则 P, M 的关系为 ().

- (A) $P \subset M$ (B) $P \supset M$
(C) $P = M$ (D) $P \subseteq M$

命题意图: 考查集合相等在研究集合之间关系时的重要作用.

错解: 如图 1-1-1, 据 $P \cap Q = P, Q \cap M = Q$, 可知 $P \subset M$, 应选 A.

错解分析: 在比较集合之间的关系时, 忽略了集合相等的特殊情况, 从而造成错选.

正确解法: 当 P, Q, M 不相等时, 如图 1-1-1 所示, 有 $P \subset M$.

当 $P = Q = M$ 时, 如图 1-1-2, 则有 $P = M$.

综上所述, 有 $P \subseteq M$, 所以应选 D.

【例 5】 设集合 $M = \{2, 6, a\}, N = \{2, a^2 + 2a - 2\}$, 如果 $N \cup \bar{N} = M$, 则 a 的值等于_____.

命题意图: 考查集合的概念及运算.

错解: 由 $N \cup \bar{N} = M$ 有 $N \subseteq M$, 即 $\{2, a^2 + 2a - 2\} \subseteq \{2, 6, a\}$.

$\therefore a^2 + 2a - 2 = 6$ 或 $a^2 + 2a - 2 = a$.

从而得 $a = -4, a = 2, a = -2, a = 1$.

错误原因: 当 $a = 2$ 时, 集合 M 中出现了两个相同元素 2, 这违背了集合中元素的互异性.

正确答案: $a = -4, a = -2, a = 1$.

(三) 试题精选

【例 6】 (1994 年高考题) 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\bar{A} \cup \bar{B} =$ ().

- (A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{0, 1, 4\}$ (D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

解: 画出框式文氏图, 把 $A \cap B = \{2, 3\}, A \cap \bar{B} = \{0, 1\}, \bar{A} \cap B = \{4\}, \bar{A} \cap \bar{B}$ 分别填入四个空格.

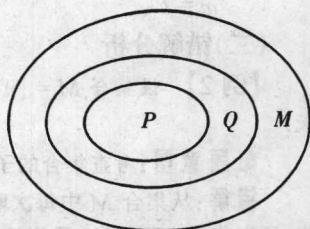


图 1-1-1

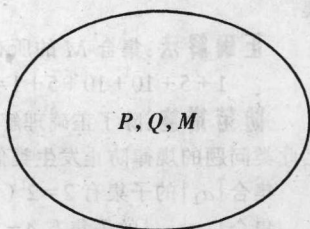


图 1-1-2

	B	$\bar{B}$
A	2, 3	0, 1
$\bar{A}$	4	$\emptyset$

$\therefore \overline{A \cup B} = \{0, 1, 4\}$, 应选 C.

【例 7】 (1995 年高考题) 已知全集 $I = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $\overline{M} \cap N = ()$.

- (A) $\{0\}$ (B) $\{-3, -4\}$
(C) $\{-1, -2\}$ (D) $\emptyset$

	N	$\overline{N}$
M	0	-1, -2
$\overline{M}$	-3, -4	$\emptyset$

解: 画出框式文氏图, 则 $M \cap N = \{0\}$, 显然 $\overline{M} \cap N = \{-3, -4\}$. $\therefore$ 应选 B.

【例 8】 (1996 年高考题) 已知全集 $I = N$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in N\}$, 则 $()$.

- (A) $I = A \cup B$ (B) $I = \overline{A \cup B}$
(C) $I = A \cup \overline{B}$ (D) $I = \overline{A \cup \overline{B}}$

解: 如图 1-1-3, 画出圈式文氏图, 进行观察分析知应选 C.

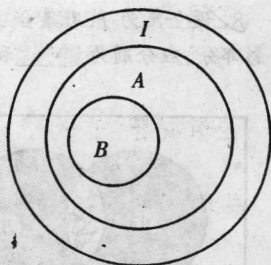


图 1-1-3

三、精题练习

(一) 选择题

1. 设全集 $I = R$, 集合 $M = \{x | 2 < x < 5\}$, $N = \{x | 4 < x < 8\}$, 则集合 $\{x | 2 < x \leq 4\}$ 可表示为 $()$.
(A) $M \cup N$ (B) $M \cap N$ (C) $\overline{M} \cap N$ (D) $M \cap \overline{N}$
2. 全集 I 的子集 M, N, P 满足 $M \cup N = N$, $N \cap \overline{P} = \emptyset$, 则集合 M, P 的关系是 $()$.
(A) $M = P$ (B) $M \subset P$ (C) $M \supset P$ (D) 不能确定
3. 满足 $M \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$ 及 $M \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 1, 2\}$ 的集合 M 有 $()$ 个.
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
4. 已知 I 为全集, 集合 $M \subset I, N \subset I$, 则下列集合中与 $\overline{M \cup N}$ 相等的集合是 $()$.
(A) $\overline{M \cup N}$ (B) $\overline{M} \cap \overline{N}$ (C) $\overline{M \cap N}$ (D) $\emptyset$
5. 设集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < a\}$, 如果 $A \subset B$, 那么实数 a 的取值范围是 $()$.

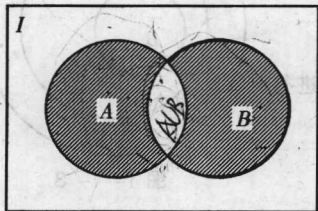
(A) $[2, +\infty)$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $[1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 2]$

(二) 填空题

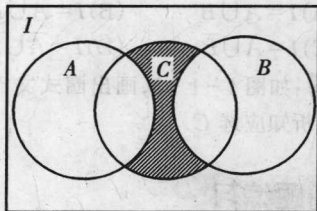
6. 设集合 $M = \{x | x^2 - ax + 15 = 0\}$, $N = \{x | x^2 - 5x + b = 0\}$, 且 $M \cap N = \{3\}$, 则 $a + b =$ _____.

7. 设全集为 $I = R$, 集合 $A = \{x | 0 < x < \frac{5}{2}\}$, $B = \{x | x \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\}$, 则 $\bar{A} =$ _____, $\bar{B} =$ _____, $\bar{A} \cap \bar{B} =$ _____, $\bar{A} \cup \bar{B} =$ _____, $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A =$ _____.

8. 设全集为 I , 用集合 A, B, C 的交、并、补集符号表示图 1-1-4 中的阴影部分, 应分别为 _____ 和 _____.



(1)



(2)

图 1-1-4

9. 设集合 $M = \{-3, a+1, a^2\}$, $N = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 且 $M \cap N = \{-3\}$, 则 $a =$ _____, $M \cup N =$ _____.

10. 设集合 M 有 12 个元素, 集合 N 有 15 个元素, $N \cup M$ 有 20 个元素, 则 $M \cap N$ 有元素 _____ 个.

第二单元 一元二次不等式

一、教学精华

一元二次不等式的解法有两种, 一种是用代数方法求解, 另一种是用二次函数图象求解.

(一)代数法

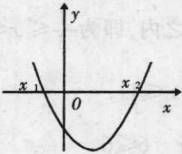
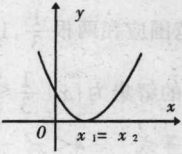
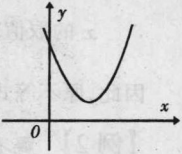
用代数法解一元二次不等式的步骤如下:

达标(把一元二次不等式写成标准形式 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$, 其中 $a > 0$)——分解(把不等式左边二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 分解因式)——化组(利用积的符号法则把原不等式转化成两个不等式组)——求组解(分别解每个不等式组)——写原解(每个不等式的解都是原不等式的解).

如果二次三项式不能分解,那么就可以直接确定解集是 $\emptyset$ 或 R .

(二)图象法

利用抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)解一元二次不等式,具体关系如下表所示:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象				
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的根		有两个不等的实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\} (x_1 < x_2)$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}, x \in R\}$	R
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x_1 < x < x_2\} (x_1 < x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$

二、三题举要

(一)例题剖析

【例1】解不等式 $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

命题意图:考查一元二次不等式的解法.

解题点拨:可以使用两种方法求解.

解法 1:由原不等式,得 $(x-1)(3x-1)\leq 0$.

根据积的符号法则,得

$$(I) \begin{cases} x-1\geq 0, \\ 3x-1\leq 0; \end{cases} \text{ 或 } (II) \begin{cases} x-1\leq 0, \\ 3x-1\geq 0. \end{cases}$$

由(I),得解集为 $\emptyset$;由(II),得 $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{3}\leq x\leq 1\}$.

解法 2:设 $y=3x^2-4x+1$,此抛物线开口向上,且由 $3x^2-4x+1=0$ 知抛物线与 x 轴的交点横坐标为 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$.

$$\therefore 3x^2-4x+1\leq 0,$$

$\therefore x$ 的取值范围应在两根 $\frac{1}{3}, 1$ 之内,即为 $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$.

因此,原不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{3}\leq x\leq 1\}$.

【例 2】解不等式 $-4 < x^2 - x - 6 \leq 6$.

命题意图:考查一元二次不等式组的解法.

解题点拨:应转化成不等式组求解.在求解过程中应注意使用数形结合方法.

解:由原不等式,得

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 6, \\ x^2 - x - 6 > -4. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{由此得 } \begin{cases} -3 \leq x \leq 4, \\ x < -1 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

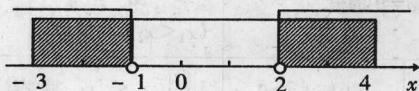


图 1-2-1

如图 1-2-1 所示,所以原不等式的解集为:

$$\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 或 } 2 < x \leq 4\}.$$

(二)错解分析

【例 3】解不等式 $x^2 < 2$.

命题意图:考查一元二次不等式的解法.

错解:由原不等式 $x^2 < 2$,得 $x < \pm\sqrt{2}$.

∴ 原不等式的解集为 $\{x | x < \pm\sqrt{2}\}$.

错解分析: 产生错误的原因在于把解二次方程 $x^2=2$ 的方法, 错误地迁移到解二次不等式上来. 正确答案应为 $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.

防范措施: 应多作对比练习, 明确解二次不等式和解二次方程的区别与联系. 对比练习题如下:

- (1) 解方程 $x^2=1$; (2) 解不等式 $x^2<1$;
(3) 解不等式 $x^2>1$; (4) 解方程 $x^2+1=0$;
(5) 解不等式 $x^2+1<0$; (6) 解不等式 $x^2+1>0$.

【例 4】 解关于 x 的不等式 $x^2-3ax-28a^2\geq 0$.

命题意图: 考查含参数的一元二次不等式的解法.

错解: ∵ 方程 $x^2-3ax-28a^2=0$ 的两个根为 $x_1=-4a, x_2=7a$,

∴ 原不等式的解集为 $\{x | x \leq -4a \text{ 或 } x \geq 7a\}$.

错解分析: 产生错误的原因在于对不等式的性质认识不清, 缺少分类讨论意识.

正确解法: 仿上得 $x_1=-4a, x_2=7a$.

- (1) $a>0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \leq -4a \text{ 或 } x \geq 7a\}$;
(2) $a<0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \leq 7a \text{ 或 } x \geq -4a\}$;
(3) $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \in \mathbb{R}\}$.

(三) 试题精选

【例 5】 (1997 年高考题) 设集合 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N = (\quad)$.

- (A) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x | 0 \leq x < 2\}$
(C) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

命题意图: 考查一元二次不等式的解法及集合的有关运算.

解题点拨: 注意使用数轴求解.

解法 1: 集合 $N = \{x | -1 < x < 3\}$.

在数轴上画出 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$ 及 $N = \{x | -1 < x < 3\}$ 所表示的范围, 如图 1-2-2 所示.

显然 $M \cap N = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 应选 B.

解法 2: 取 $x=1$, 则 $x \in M$, 又 $1^2 - 2 \times 1 - 3 < 0$, 所以 $1 \in N$, 可排除 A.

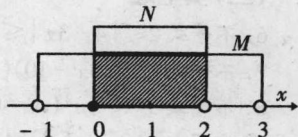


图 1-2-2

取 $x = \frac{3}{2}$, 则 $x \in M$, 又 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} - 3 < 0$, 而 $2 \in M$. $\therefore$ 应选 B.

三、精题练习

(一) 选择题

1. 设全集为 R , 集合 $C = \{x | x^2 + 2x - 8 < 0\}$, $D = \{x | |x| \geq 1\}$, 则 $\overline{C} \cap D =$ ().

(A) $\{x | -4 \leq x \leq 1 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$ (B) $\emptyset$

(C) $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$ (D) $\overline{C}$

2. 已知集合 $P = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$, $Q = \{n | n^2 - 5n + 4 \leq 0, n \in N\}$ 和集合 S , 又 $S \cap P = \{1, 4\}$, $S \cap Q = S$, 则集合 S 的元素个数为 ().

(A) 无数个 (B) 2 个或 3 个或 4 个 (C) 2 个或 4 个 (D) 2 个

3. 设全集为 R , 集合 $E = \{x | 2x^2 + x - 3 \geq 0\}$, $F = \{x | x^2 \leq 2\}$, 则 $E \cap \overline{F} =$ ().

(A) $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x < -\sqrt{2}\}$ (B) $\{x | x > \sqrt{2} \text{ 或 } x < -\sqrt{2}\}$

(C) $\{x | x > \sqrt{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{3}{2}\}$ (D) $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -\frac{3}{2}\}$

4. 集合 $H = \{x | x > a, a^2 - 13a + 30 < 0\}$, $S = \{x | 3 < x < 10\}$, 则 $H \cup S =$ ().

(A) $\{x | x > a\}$ (B) $\{x | x > 3\}$ (C) $\{x | a < x < 10\}$ (D) $\{x | x > 10\}$

5. 已知使 $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 有意义的 x 的取值范围为 S , 使 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ 有意义的 x 的取值范围为 T , 则

(A) $S \subset T$ (B) $S = T$ (C) $S \supset T$ (D) $S \cap \overline{T} = \emptyset$

(二) 填空题

6. 不等式 $2 \leq |4 - 3x| \leq 5$ 的解集为 _____.

7. 不等式 $(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 2x + 1) < 0$ 的解集为 _____.

8. 不等式 $x^2 < 4m^2 (m \neq 0)$ 的解集为 _____.

9. 方程 $x^2 - 2x + 3a^4 - 4a^2 = 0$ 有一正根、一负根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

10. 全集是整数集合, $A = \{n | n^2 + 4n - 5 < 0\}$, $B = \{n | |n+1| > 1\}$, $n \in Z$, 则 $A \cap \overline{B} =$ _____.