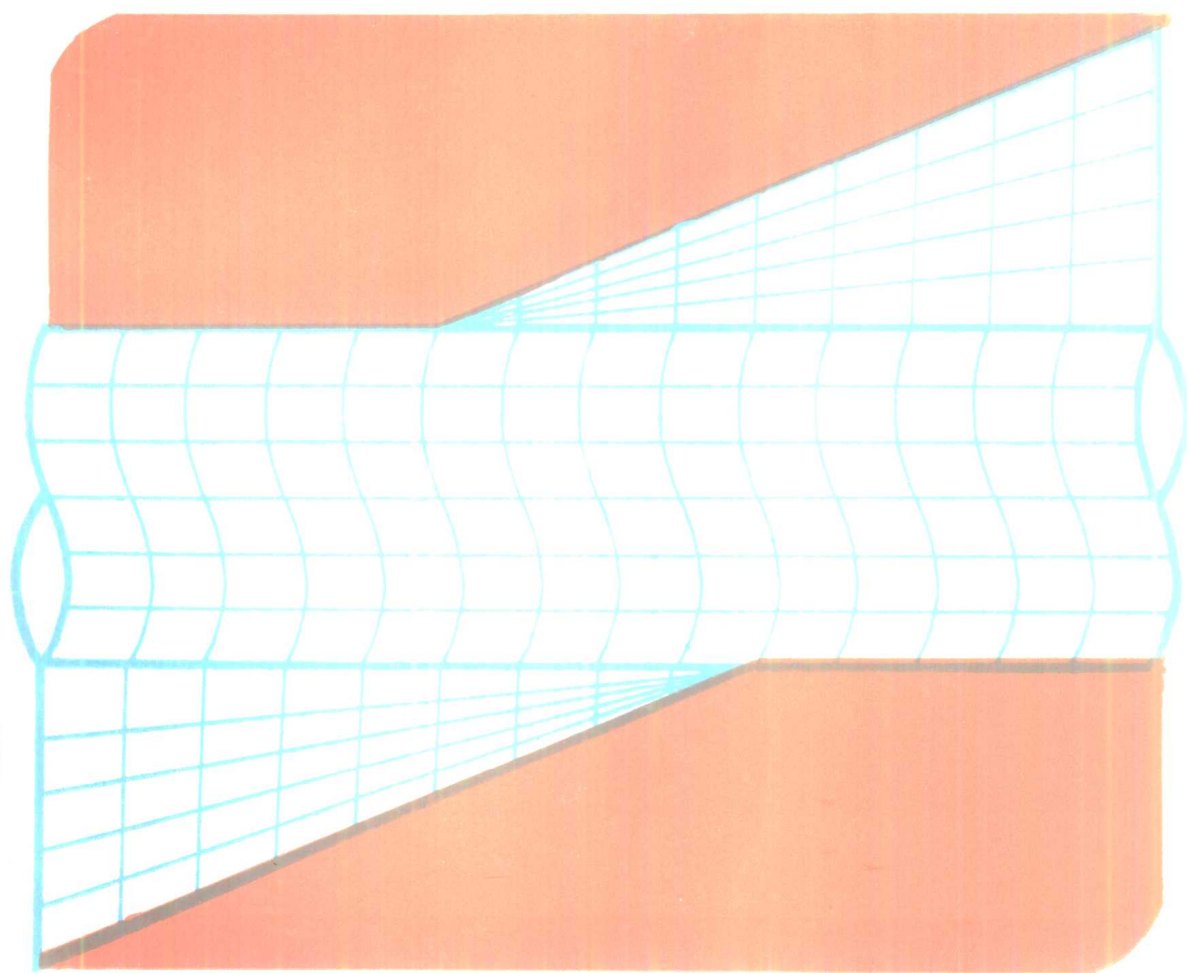


高等院校教材

材料力学教程(下)

● 刘济庆 杨存厚 臧修亮 编 ● 北京工业学院出版社



TB301

68/2

材料力学教程

(下册)

刘济庆 杨存厚 臧修亮 编

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书的特点是突破了原有的材料力学课程体系,提出了将相同性质的问题相对集中,按问题划分篇章的新体系。每篇、章的主题鲜明,重点明确,注意突出基本概念和分析方法。各篇、章内容之间编排合理、紧密相连。并且编有若干基本要求以外的内容,以便于读者进一步学习和提高。

全书分上、下两册,共六篇,计三十二章。下册包括,第三篇的两章;第四篇:超静定问题的研究(包括力法、位移法、矩阵位移法);第五篇:压杆的稳定研究(包括压杆稳定);第六篇:强度问题的进一步研究(包括强度计算的几个特殊问题、构件在动载荷时的强度计算、构件在交变应力时的强度计算、构件在塑性状态时的强度计算)。

本书是高等工业学校机械类专业的适用教材。也可供土建、道桥、航空、水利等专业或电大、函授大学学员及工程技术人员参考。

材 料 力 学 教 程 (下 册)

刘济庆 杨存厚 臧修亮 编

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北新城县印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 18.25印张 452千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

ISBN7-81013-026-9/TH·8

印数:1-10,000册 定价:3.05元

目 录

第十三章 用能量法计算构件的位移

§13-1 概述	(1)
§13-2 外力功和弹性变形能的计算	(2)
§13-3 莫尔定理及其应用	(9)
§13-4 图形互乘法	(18)
§13-5 卡氏定理及其应用	(23)
§13-6 互等定理	(28)
§13-7 弹性变形比能的概念	(29)
§13-8 剪力对弯曲变形的影响	(31)
习 题	(34)

第十四章 能量法的进一步研究

§14-1 虚功原理	(42)
§14-2 应变能和余应变能	(44)
§14-3 卡氏定理·最小应变能原理	(47)
§14-4 势能及最小势能原理、端利—李兹法	(50)
习 题	(55)

第四篇 超静定问题的研究

第十五章 用力法解超静定问题

§15-1 超静定结构的概念	(59)
§15-2 用几何关系法解拉压超静定问题	(60)
§15-3 用位移比较法解简单超静定问题	(70)
§15-4 力法正则方程	(74)
§15-5 利用对称性简化超静定问题的计算	(79)
习 题	(83)

第十六章 用位移法解超静定问题

§16-1 位移法的基本概念	(91)
§16-2 位移法基本方程及其应用	(93)
§16-3 位移法同力法的对比和小结	(105)
习 题	(106)

第十七章 矩阵位移法

§17-1 矩阵位移法概述	(107)
§17-2 单元特性分析·单元刚度矩阵	(108)
§17-3 整体结构分析·整体刚度矩阵与整体载荷向量	(116)
§17-4 整体刚度方程求解	(122)
习 题	(136)

第五篇 压杆的稳定研究

第十八章 压杆稳定

§18-1	压杆稳定的概念	(139)
§18-2	两端铰支细长压杆的临界力	(142)
§18-3	端部约束条件对压杆临界力的影响	(145)
§18-4	临界应力·临界应力总图	(152)
§18-5	压杆的稳定校核	(157)
§18-6	折减系数法	(161)
§18-7	提高压杆稳定性的措施	(165)
§18-8	用能量法计算压杆的临界力	(166)
§18-9	压力偏心及压杆初曲率的影响	(171)
习 题		(174)

第六篇 强度问题的进一步研究

第十九章 强度计算的几个特殊问题

§19-1	非圆截面杆的扭转	(180)
§19-2	非对称截面梁的弯曲	(185)
§19-3	弯曲中心	(188)
§19-4	组合梁	(190)
§19-5	变截面梁·等强度梁	(195)
习 题		(197)

第二十章 构件在动载荷时的强度

§20-1	概述	(203)
§20-2	考虑惯性力时构件的应力计算	(203)
§20-3	受冲击载荷时构件的应力计算	(207)
§20-4	提高构件抗冲击能力的措施	(214)
习 题		(216)

第二十一章 构件在交变应力时的强度计算

§21-1	概述	(223)
§21-2	循环特性·应力幅度和平均应力	(224)
§21-3	材料的持久极限及其曲线	(226)
§21-4	构件的持久极限	(229)
§21-5	构件的疲劳强度计算	(235)
§21-6	提高构件疲劳强度的措施	(243)
习 题		(245)

第二十二章 构件在塑性状态时的强度计算

§22-1	概述	(249)
§22-2	材料的塑性性质	(249)
§22-3	简单桁架的弹塑性分析	(252)
§22-4	圆轴的弹塑性扭转	(259)
§22-5	梁的弹塑性弯曲	(264)
习 题		(269)
习题答案		(273)
主要参考资料		(286)

第十三章 用能量法计算构件的位移

§13-1 概 述

在前两章已经研究了构件在拉压、扭转和弯曲时计算其位移的基本方法和叠加法, 这些方法对于简单受力构件或形式简单的结构的位移计算是比较方便的。但是在工程上, 经常会遇到一些比较复杂的结构, 例如桁架〔图13-1 (a)〕、刚架〔图13-1 (b)〕、曲杆〔图13-1 (c)〕等, 如果需要计算这些结构中某指定点、某构件指定截面的位移, 用前面讲述的方法, 往往很不方便, 甚至无法求出。因此, 本章将介绍一种计算位移时得以普遍应用的方法——能量法。

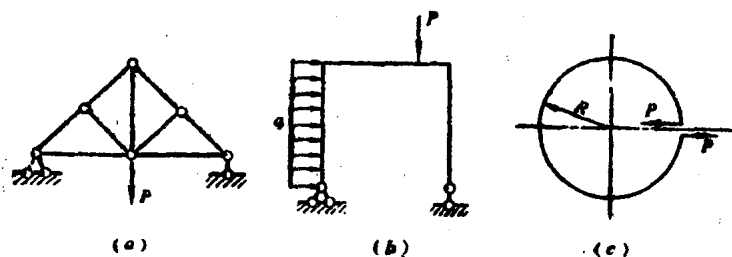


图13-1

这里先介绍有关能量的基本概念。一般情况下, 构件在外力作用下要发生弹性变形。构件在外力作用点处也将产生沿外力作用方向的位移, 这种位移简称为相应位移。显然, 外力沿相应位移作功, 这种功我们称为外力功, 通常用 W 表示。

在构件发生弹性变形时, 其内部将贮存能量, 从而使构件具有作功的能力。例如被跳水运动员压弯的跳板, 因变形而贮存了能量, 再利用释放出的能量对运动员作功, 以加强运动员的弹跳力; 钟表发条拧紧后, 因其变形使发条贮存了能量, 这种能量不断释放出来, 拨动齿轮不停地运转而作功。构件因弹性变形而贮存的能量称为弹性变形能, 或简称应变能, 用 U 表示。单位体积的弹性变形能称为比能, 常用 u 表示。

根据能量守恒定律, 当外力由零开始缓慢增加 (即静载荷) 时, 构件始终处于平衡状态, 动能的变化及其它能量的损耗均可忽略不计。在此情况下, 贮存在构件内的弹性变形能在数值上等于外力所作的功, 即

$$U = W \quad (13-1)$$

此关系称为功能原理。

利用上述功、能概念及其功能原理, 进行分析、计算构件或结构位移的方法, 称为能量法。为了求解结构的位移, 本章将介绍基于功能原理的几种基本的能量方法。

§13-2 外力功和弹性变形能的计算

(一) 外力功的计算 在外力作用下, 如果弹性体的变形很小, 且其材料服从虎克定律, 则弹性体的内力、应力和位移均与外力成正比, 满足上述条件的弹性体, 称为线性弹性体。

现在讨论线性弹性体外力功的计算。以图 13-2 (a) 所示悬臂梁为例。梁上所受载荷 p 由零缓慢地增加到终值 P , 与载荷 p 相应的位移 δ 也由零渐增到终值 Δ 。在加载过程的某一时刻, 如果载荷由 p 增加到 $p + \Delta p$, 则相应位移也必有一增量 $d\delta$ 。于是, 载荷在位移增量 $d\delta$ 上所作的功应为

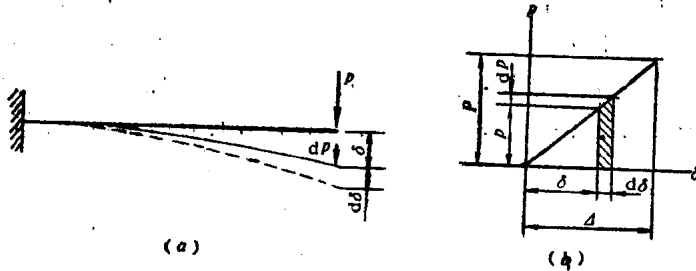


图13-2

$$dW = (p + dp) d\delta \approx p d\delta$$

在整个加载过程中, 外力 p 所作的总功应为

$$W = \int dW = \int_0^{\Delta} p d\delta$$

显然, 其值等于图 13-2 (b) 中斜直线下三角形面积, 即

$$W = \frac{1}{2} P \Delta \quad (13-2)$$

公式 (13-2) 表明, 外力功等于载荷的终值 P 与相应位移的终值 Δ 乘积之半。此式中载荷 P 为广义力, 表示集中力或集中力偶; Δ 为广义位移, 表示线位移或角位移。

在线性弹性体上, 如果作用有多个广义力 (图 13-3), 在这些广义力共同作用下, 任一广义力 P_i 作用点处都产生与 P_i 相应的广义位移 Δ_i 。可以证明, 作用于该弹性体上所有外力 $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ 在其相应位移上所作的总功应为

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \Delta_i \quad (13-3)$$

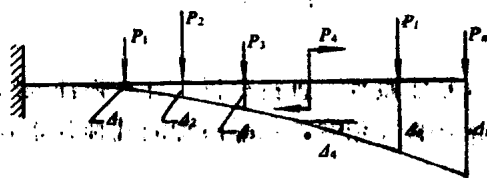


图13-3

即在线性弹性体上，所有广义力所作的功等于各广义力的终值与其相应的广义位移的终值乘积之半的代数和。此结论表明外力功只与外力的终值有关，而与各外力加载次序无关。

(二) 弹性变形能的计算 根据功能原理 $W=U$ ，弹性变形能可以通过外力功的计算求得。

1. 轴向拉压时的弹性变形能 当杆件受轴向拉伸（或压缩）时，在线弹性范围内，轴向变形 Δl 与轴向外力 P 成正比，如图13-4所示。故外力功为

$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

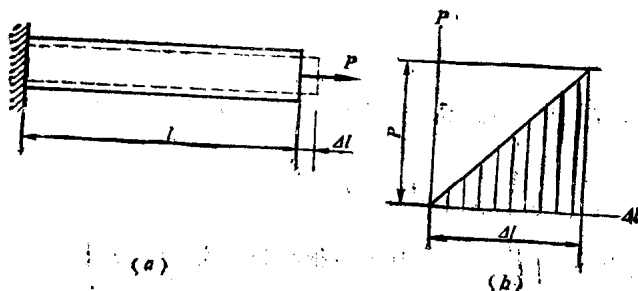


图13-4

也就是说，外力功的数值等于图13-4(b)中阴影三角形的面积。由功能原理知，拉(压)杆的弹性变形能为

$$U = W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

由于轴力 $N = P$ ，杆的轴向变形为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

所以

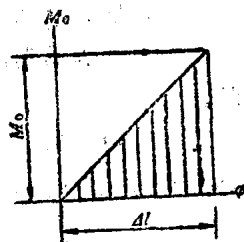
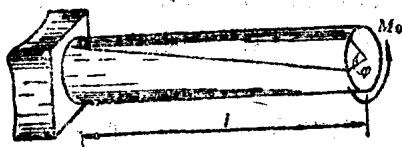
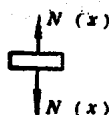
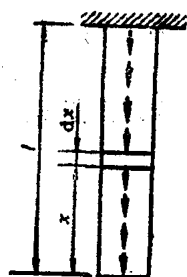
$$U = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (13-4)$$

若轴力 N 沿杆轴线为一变量，如图13-5所示考虑自重的拉杆，则可首先计算 dx 微段内的弹性变形能

$$dU = \frac{N^2(x) dx}{2EA}$$

然后对全杆积分，即得整个杆件的弹性变形能

$$U = \int_0^l \frac{N^2(x) dx}{2EA}$$



(a)

(b)

图13-5

图13-6

若结构为由 n 根直杆组成的桁架时，则整个结构内的弹性变形能应为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}$$

式中， N_i 、 l_i 、 E_i 和 A_i 分别为桁架中第 i 根杆件的轴力、杆长、弹性模量和横截面面积。

2. 圆轴扭转时的弹性变形能 图 13-6 (a) 所示的受扭圆轴，在线弹性范围内它的端面扭转角 φ 与外力偶 M_0 成正比 [图 13-6 (b)]。与轴向拉压杆类似，由功能原理求得圆轴的弹性变形能为

$$U = \frac{M_0^2 l}{2GI_p} \quad (13-5)$$

同理，若扭矩 M_x 沿轴线为一变量，如图 13-7 所示圆轴，需先计算微段内的扭转弹性变形能，然后对全轴积分，即得整个轴的弹性变形能为

$$U = \int_l \frac{M_x^2(x) dx}{2GI_p}$$

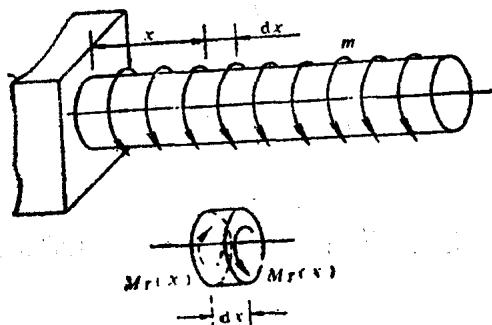


图13-7

3. 梁弯曲时的弹性变形能 一般情况下，梁的横截面上弯矩和剪力均为 x 的函数。因此，研究梁的弹性变形能，需从梁上取一微段 dx 如图 13-8 (a)、(b) 所示。

在弯矩 $M(x)$ 作用下，微段 dx 的两端截面产生相对转动 [图 13-8 (c)]，相对转角为

$$d\theta = \frac{M(x) dx}{EI}$$

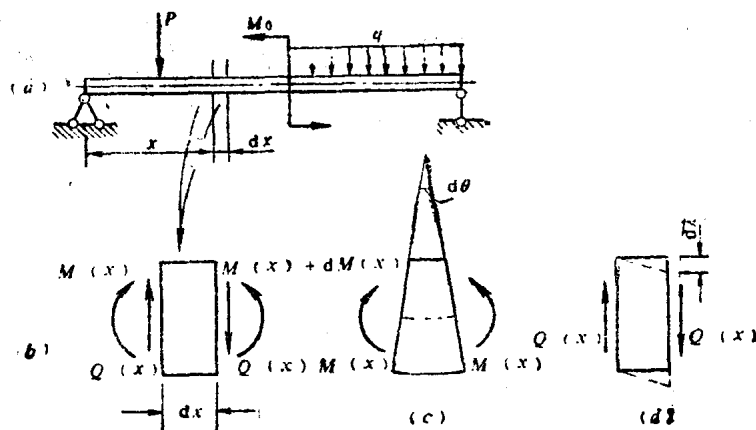


图13-8

因此, $M(x)$ 作的功为

$$dW = \frac{1}{2} M(x) d\theta$$

在剪力 $Q(x)$ 作用下, 微段 dx 两端截面产生相对错动 (图13-8, d), 使剪力在位移 $d\lambda$ 上作功。但是, 对细长梁而言, 剪力 $Q(x)$ 作的功与弯矩 $M(x)$ 作的功相比, 小得很多, 可忽略不计。因此, 微段梁上的弹性变形能可近似地表示为

$$\begin{aligned} dU = dW &= \frac{1}{2} M(x) d\theta \\ &= \frac{M^2(x) dx}{2EI} \end{aligned}$$

然后对全梁积分, 即得整个梁的弹性变形能

$$U = \int \frac{M^2(x) dx}{2EI} \quad (13-6)$$

作为横力弯曲的特例, 纯弯曲梁横截面上的弯矩 $M(x)$ 为一常量, 根据式 (13-6), 其弹性变形能为

$$U = \frac{M^2 l}{2EI}$$

4. 组合变形构件的弹性变形能 对于组合变形的圆截面构件, 所取微段如图13-9(a) 所示。

在微段的横截面上, 同时存在着轴力 $N(x)$ 、扭矩 $M_T(x)$ 、弯矩 $M(x)$ 和剪力 $Q(x)$, 它们分别在各自的相应位移上作功, 由于是小变形, 各力只在其相应位移上独立作功, 相互之间并无影响。如果略去剪力对变形的影响, 根据功能原理, 微段的弹性变形能等于

$$dU = dW = \frac{1}{2} N(x) d(\Delta l) + \frac{1}{2} M_T(x) d\varphi + \frac{1}{2} M(x) d\theta$$

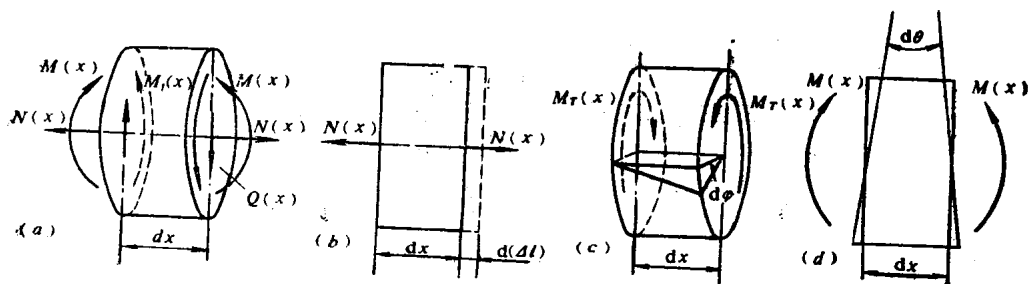


图13-9

$$= \frac{N^2(x)dx}{2EA} + \frac{M_T^2(x)dx}{2GI_T} + \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

整个构件的弹性变形能应为上式对构件全长的积分，即

$$U = \int_l \frac{N^2(x)dx}{2EA} + \int_l \frac{M_T^2(x)dx}{2GI_T} + \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (13-7)$$

式(13-7)即为组合变形构件的弹性变形能计算公式。显然，当构件为等截面杆时，式中 A 、 I_T 和 I 均为常量；若构件为变截面杆时， A 、 I_T 和 I 则均为 x 的函数。

弹性变形能具有如下性质：

(1)弹性变形能 U 恒为正值。从公式(13-7)不难看出，由于各内力是以其平方的形式出现的，故各项积分结果恒为正值。

(2)弹性变形能 U 的大小只与载荷的终值有关，而与加载的次序无关。前已谈到外力功具有这种性质，由功能原理 $U=W$ ，故知弹性变形能也具有这种性质。

(3)弹性变形能不能叠加。从公式(13-4)~(13-7)中看出，变形能是内力的二次函数，或者为载荷的二次函数，因此在一般情况下，弹性变形能不能叠加的。以悬臂梁为例(图13-10)，梁在集中力 P 单独作用下，弯矩方程为 $M_1(x)$ ，梁的弹性变形能为

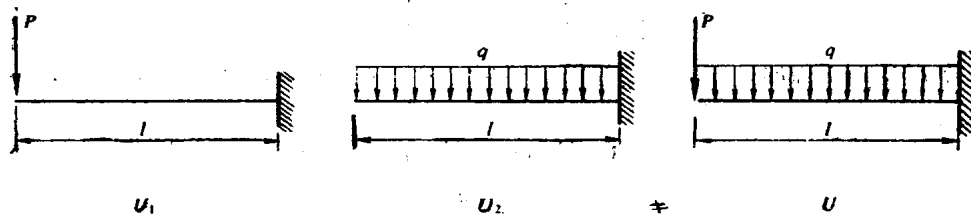


图13-10

$$U_1 = \int_l \frac{M_1^2(x)dx}{2EI}$$

梁在均布载荷 q 单独作用下，弯矩方程为 $M_2(x)$ ，梁的弹性变形能为

$$U_2 = \int_l \frac{M_2^2(x)dx}{2EI}$$

若 P 和 q 同时作用在梁上, 弯矩方程为

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x)$$

此时, 梁的弹性变形能应为

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} = \int_l \frac{[M_1(x) + M_2(x)]^2}{2EI} dx \\ &= \int_l \frac{M_1^2(x)dx}{2EI} + \int_l \frac{M_2^2(x)dx}{2EI} + \int_l \frac{M_1(x)M_2(x)dx}{EI} \\ &= U_1 + U_2 + \int_l \frac{M_1(x)M_2(x)}{EI} dx \end{aligned}$$

由于

$$\int_l \frac{M_1(x)M_2(x)}{EI} dx \neq 0$$

因此,

$$U \neq U_1 + U_2$$

由此可见, 叠加原理不适用于弹性变形能的计算。

例13-1 圆截面折杆如图13-11所示。在端点 C 处受集中力 P 作用。试计算该折杆的弹性变形能, 并求出 C 点的铅垂位移。

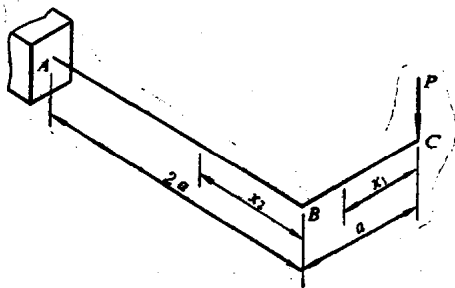


图13-11

〔解〕 计算弹性变形能 将折杆分为两段, 分别计算弹性变形能, 然后叠加。

BC 段的横截面上只有弯矩。将坐标原点取在 C 点, 则其弯矩方程为

$$M(x_1) = -Px_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

于是求得 BC 段的弹性变形能为

$$U_1 = \int_0^a \frac{M^2(x_1)dx_1}{2EI} = \int_0^a \frac{(-Px_1)^2 dx_1}{2EI} = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

AB 段的横截面上存在弯矩和扭矩, 故属于弯扭组合变形。弯矩方程和扭矩方程分别为

$$M(x_2) = -Px_2 \quad (0 \leq x_2 < 2a)$$

$$M_T(x_2) = -Pa \quad (0 \leq x_2 < 2a)$$

故该段的弹性变形能为

$$U_2 = \int_0^{2a} \frac{M^2(x_2)dx_2}{2EI} + \int_0^{2a} \frac{M_T^2(x_2)dx_2}{2GI_p}$$

$$= \int_0^{2a} \frac{(-Px_2)^2 dx_2}{2EI} + \int_0^{2a} \frac{(-Pa)^2 dx_2}{2GI_p}$$

$$= \frac{4P^2 a^3}{3EI} + \frac{P^2 a^3}{GI_p}$$

整个折杆的弹性变形能为

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3P^2 a^3}{2EI} + \frac{P^2 a^3}{GI_p}$$

2° 求C点的铅垂位移 利用功能原理计算 f_c 。载荷 P 所作的外力功为

$$W = \frac{1}{2} P f_c$$

根据功能原理 $W = U$, 得

$$\frac{1}{2} P f_c = \frac{3P^2 a^3}{2EI} + \frac{P^2 a^3}{GI_p}$$

于是求得

$$f_c = \frac{3Pa^3}{EI} + \frac{Pa^3}{GI_p} \quad (1)$$

结果为正值, 表明 f_c 与载荷 P 方向相同。

从上例可以看出, 当结构中只有一个载荷(广义力), 且只计算载荷作用点的相应(广义)位移时, 由功能原理求解是很方便的。但是, 如果结构上作用有多个载荷, 如欲求其中某一载荷作用点的相应位移, 或者载荷只有一个, 但所求的位移不在载荷作用点处, 而是其它点处的某一位移, 在这些情况下, 功能原理就不能奏效了, 道理请读者思考。为了解决这类问题, 我们将在下一节作深入研究。

例13-2 某圆柱形密圈螺旋弹簧平均直径 $D=125\text{mm}$, 簧丝直径 $d=18\text{mm}$, 材料的剪切弹性模量 $G=80\text{GPa}$, 弹簧有效圈数 $n=9$, 已知作用于弹簧的轴向压力 $P=0.5\text{kN}$ 。试求弹簧的轴向压缩量。

〔解〕 现在利用功能原理计算弹簧的轴向变形(对于弹簧的受力和强度计算, 我们在第十章已经讨论过)。

1° 外力功 设弹簧轴向压缩量为 Δ , 则外力功应为

$$W = \frac{1}{2} P \Delta \quad (a)$$

2° 弹性变形能 在弹簧受力分析中已知, 簧丝横截面上主要有扭矩 $M_r = PD/2$, 另外还有剪力 $Q = P$, 在忽略剪力 Q 对弹簧变形的影响后, 弹簧的弹性变形能应为

$$U = \int \frac{M_r^2 ds}{2GI_p} = \frac{(\frac{1}{2}PD)^2 \pi D n}{2GI_p}$$

已知

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

所以

$$U = \frac{4P^2 D^3 n}{Gd^4} \quad (b)$$

3° 利用功能原理计算弹簧的轴向变形 将式(a)和(b)代入

$$W = U$$

得

$$\Delta = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}$$

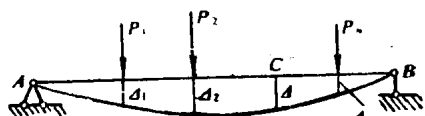
将有关数据代入上式, 即

$$\Delta = \frac{8 \times 0.5 \times 10^3 \times 125^3 \times 9}{80 \times 10^3 \times 18^4} = 8.37 \text{ mm}$$

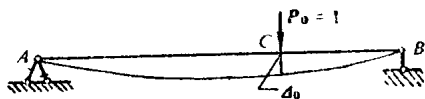
§13-3 莫尔定理及其应用

现在介绍计算线性弹性体位移的一种方法——莫尔(O. Mohr)定理。

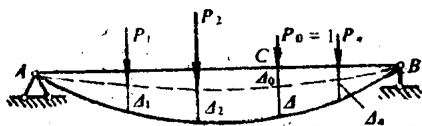
现以简支梁为例来推证莫尔定理。设梁上作用有广义力 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 在各力作用点处引起的相应位移为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, 如图 13-12(a) 所示。为求梁上任一点 C 处的铅垂位移 Δ , 现假想地在该梁上 C 点加一与欲求的铅垂位移同方向的广义力 $P_0=1$, 称为单位力(图 13-12(b))。



(a)



(b)



(c)

图 13-12

(一) 弹性变形能分析 (1) 当梁上仅作用有载荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 时(图 13-12 (a)), 梁的弯矩方程为 $M(x)$, 则梁的弹性变形能为

$$U_P = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI} \quad (a)$$

在梁上 C 点仅作用有单位力 P_0 时(图 13-12(b)), 梁的弯矩方程为 $\bar{M}(x)$, 则梁的弹性变形能为

$$U_{P_0} = \int_l \frac{\bar{M}^2(x) dx}{2EI} \quad (b)$$

当载荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 和单位力 P_0 同时作用在梁上时(图13-12(c)), 根据叠加原理, 梁的弯矩方程应为 $M(x) + \bar{M}(x)$, 梁的弹性变形能应为

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{(M(x) + \bar{M}(x))^2}{2EI} dx \\ &= \int_l \frac{M^2(x) + \bar{M}^2(x) + 2M(x)\bar{M}(x)}{2EI} dx \\ &= \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI} + \int_l \frac{\bar{M}^2(x) dx}{2EI} + \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x) dx}{EI} \\ &= U_P + U_{P_0} + \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x) dx}{EI} \end{aligned} \quad (c)$$

(二) 外力功分析 如前所述, 外力功的大小只与载荷的终值有关, 与加载的顺序无关。现在, 先将单位力 P_0 加在梁上 C 点处, 则梁的挠曲线如图 13-12 (c) 的虚线所示, C 点的位移为 Δ_0 ; 然后再将载荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 加到梁上, 则梁的挠曲线变到图 13-12 (c) 的实线位置。在上述加载过程中, 载荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 所作的功为

$$W_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (d)$$

单位力 P_0 所作的功由两部分组成: 当单位力 P_0 先单独作用时, 它所作的功为 $P_0 \Delta_0 / 2$; 继而把载荷 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 作用到梁上之后, 在单位力 P_0 作用点又产生了新的位移 Δ , 在此过程中, 单位力作为常力再次作功, 其值为 $P_0 \Delta$ 。因此, 单位力所作的功总计为

$$W_{P_0} = \frac{1}{2} P_0 \Delta_0 + P_0 \Delta \quad (e)$$

所有力作功为

$$\begin{aligned} W &= W_P + W_{P_0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i + \frac{1}{2} P_0 \Delta_0 + P_0 \Delta \end{aligned} \quad (f)$$

(三) 用功能原理导出莫尔定理 根据功能原理 $W = U$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i + \frac{1}{2} P_0 \Delta_0 + P_0 \Delta &= \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx \\ &= U_P + U_{P_0} + \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx \end{aligned}$$

其中 $\int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx = U_P + U_{P_0}$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i = U_P, \quad \frac{1}{2} P_0 \Delta_0 = U_{P_0}$$

故得

$$P_0 \Delta = \int_i \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx \quad (9)$$

式中 $P_0 = 1$ ，故上式可写为

$$1 \cdot \Delta = \int_i \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$$

或直接写为

$$\Delta = \int_i \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx \quad (13-8)$$

公式 (13-8) 即为莫尔定理的表达式，又称为莫尔积分。由于该方法采用假想加单位力的方式，故又称为单位力法或单位荷载法。为了正确利用这一公式进行计算，我们有必要在这里再强调一下式中各个符号的含义：式 (13-8) 中， Δ 为梁上任一点 C 处，由载荷作用而引起的（广义）位移； $M(x)$ 为载荷（广义力）作用时的弯矩方程； $\bar{M}(x)$ 为单位力（广义力）作用于 C 点时的弯矩方程。

因 Δ 为梁上任一点 C 处由载荷作用而引起的位移，则 $1 \cdot \Delta$ 为作用于 C 点的单位力作为常力在 Δ 上所作的功，它在数值上等于载荷在 C 点引起的位移。可以认为，利用莫尔定理求载荷作用下 C 点的位移是我们的目的，而在 C 点加单位力 P_0 计算 $1 \cdot \Delta = \Delta$ 只是达到上述目的的手段。

由公式 (13-8) 可以看出，如果积分 $\int_i \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$ 值为正，则位移 Δ 的方向与所加单位力 P_0 的方向相同；如果积分值为负，则位移 Δ 的方向与单位力方向相反。

利用莫尔定理可以求线性弹性体上任一点处的线位移或任一截面处的角位移。若求某点的线位移，可在该点沿位移方向加一单位力；若求某截面的角位移，则可在该截面处加一单位力偶。二者的计算步骤和过程是相同的。

（四）莫尔定理的应用 上面在推导莫尔定理时，是以简支梁为例。实际上，通过构件的其它受力情况，均可导出形式相同的公式。所以说，莫尔定理对计算任何线性弹性体的位移都是适用的。因此，该定理可用于构件在各种基本变形以及组合变形时的位移计算，也可用于各种复杂结构（如桁架、刚架等）的位移计算。

（1）对于组合变形构件，其横截面上一般存在有轴力 N 、剪力 Q 、弯矩 M 和扭矩 M_T ，略去剪力 Q 对变形的影响，则莫尔定理的一般表达式为

$$\Delta = \sum \int_i \frac{N(x) \bar{N}(x)}{EA} dx + \sum \int_i \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx + \sum \int_i \frac{M_T(x) \bar{M}_T(x)}{GI_T} dx \quad (13-9)$$

（2）对于桁架，其位移计算通常是计算其节点位移。因桁架各杆横截面上只有轴力 N ，故莫尔定理的表达式为

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{E_i A_i} \quad (13-10)$$

实际计算表明，利用莫尔定理计算桁架的节点位移是很方便的。

①公式 (13-9) 中的第三项，只对圆截面构件适用。对非圆截面构件，只需作相应地改变，按非圆截面杆的扭转公式计算即可，详见第十九章。

(3) 对于刚架, 在各段杆的横截面上, 通常存在轴力 N 、剪力 Q 和弯矩 M , 但轴力 N 和剪力 Q 对变形的影响与弯矩 M 影响相比很小, 可以略去, 而只考虑弯矩的作用, 故计算刚架位移的莫尔定理表达式为

$$\Delta = \sum \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx \quad (13-11)$$

至于利用莫尔定理计算其它形状的构件 (如曲杆) 的位移, 我们将通过例题加以说明。

例13-3 图13-13 (a) 所示悬臂梁作用有集度为 q 的均布载荷。试求自由端 A 处的挠度 f_A 和截面转角 θ_A 。

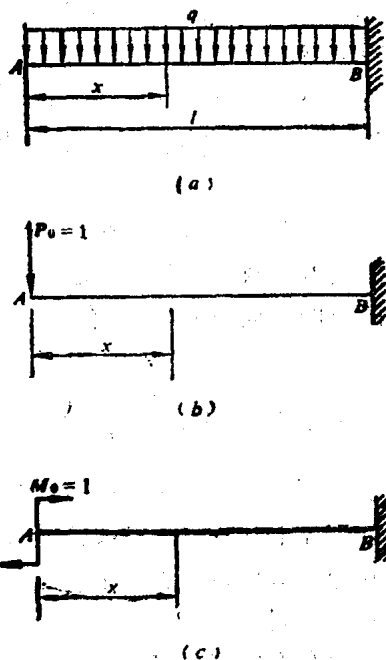


图13-13

[解] 1. 计算 A 点的挠度 在梁上 A 点加一单位力 $P_0 = 1$ [图13-13 (b)], 然后分别列出梁在均布载荷和单位力作用下的弯矩方程, 它们分别为

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x < l)$$

$$\bar{M}(x) = -P_0 x = -x \quad (0 \leq x < l)$$

代入莫尔积分式 (13-8), 求得 A 点挠度为

$$\begin{aligned} f_A &= \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-\frac{1}{2}qx^2)(-x)dx}{EI} \\ &= -\frac{ql^4}{8EI} \quad (1) \end{aligned}$$

结果为正值, 说明挠度 f_A 的方向与单位力 P_0 方向相同。

2. 计算 A 截面的转角 在梁上端面 A 处加一单位力偶 $M_0 = 1$ [图13-13 (c)] 并分别列出由均布载荷和单位力偶 M_0 引起的弯矩方程, 它们分别为