高等学校教材

线性代数

主　编　戴跃进
副主编　蔡丽娟　陈桂芝　林玉闽

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　戴跃进
副主编　蔡丽娟　陈桂芝　林玉闽

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书旨在讲授线性代数的基本概念、基本理论和基本运算技能，并为学习后继课程和进一步获得数学知识充实必备的代数基础。主要内容分为矩阵、线性方程组、矩阵的可对角化、二次型和线性空间与线性变换五章。各章各节均配备一定数量的练习题，书末附有部分习题答案。书中第一至第四章(除带有 * 的内容外)符合教学基本要求，教学时数约为 46 学时。第一至第四章中带有 * 的内容供读者选读(约 16 学时)，第五章供对数学基础要求较高的专业选用。

本书可供高等学校理工类各专业使用，也可供自学者和科技工作者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／戴跃进主编. -- 北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-037907-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①戴… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 157335 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 蕊　　封面设计 李小璐　　版式设计 于 婕
责任校对 胡晓琪　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	化学工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	15.75	版 次	2013 年 8 月第 1 版
字 数	280 千字	印 次	2013 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	23.40 元

物 料 号 37907-00

前　言

2003 年，厦门大学根据高等教育面向 21 世纪国家建设和发展的需要，为培养一大批“厚基础，宽口径，高素质”的人才，进行了一系列的教学改革，其中对数学基础课程的改革较为系统。在“福建省高等学校教学名师奖”获奖者、厦门大学教务处处长、博士生导师谭绍滨教授的领导下，制定了教学管理的“四个统一”的举措，即统一大纲，统一教材，统一要求和统一考试，为人才培养营造一个较为科学和公平的环境。

目前，我国绝大多数的综合性大学、工科院校和经管院校的许多专业对线性代数的要求虽有差异，但基本要求大致相同，即应注重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、线性运算能力和综合运用所学知识去分析并解决问题的能力。作为非数学类专业的数学基础教材，本书关注多数院校的线性代数的教学实际、专业后继课程的需求并兼顾学生继续深造的需要。书中各节均配备了 A，B 两组练习题，在每章后配备复习题，其中 A 组练习题的水平符合本课程的基本要求，B 组练习题为线性代数要求较高的专业准备，每章后配备的复习题为使学生能更系统和全面地理解并掌握相关的理论与方法而设置。各章中带有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的专业编写的，可作为选学或学生自学内容。

“高等学校教学名师奖”获奖者、厦门大学数学科学学院院长、博士生导师林亚南教授的关心和支持是本书出版的重要推力，对学院的有关领导和教师们的大力支持以及高等教育出版社的协助，我们一并表示衷心的感谢！

限于编者的水平，书中难免有疏漏，恳请同仁及读者指正。

编　者

2013 年 5 月

目录

第一章　矩　　阵

矩阵形式上是“矩形的”数表，许多与生活、生产及科研相关问题均可通过矩阵表述或处理. 矩阵理论是线性代数的重要组成部分，它不仅是求解线性方程组的有力工具，并可揭示相关事物之间构成的线性系统的内在联系，因而在数学、自然科学、工程技术、计算机图形学以及经济管理等诸多领域有着广泛的应用.

本章主要介绍矩阵的基本运算与分块技巧、方阵的行列式与可逆矩阵、矩阵的初等变换与秩等相关内容.

§1.1　基本概念

人类对数的认识、使用和研究促成了数学的形成与发展，而建立在公理化集合论基础之上的现代数学更是与几乎所有的学科有着密不可分的联系. 对数的集合的基本运算进行研究是现代数学中最基础的工作.

一、数域

定义 1.1.1　设 F 是复数集的一个含有非零数的子集. 若 F 关于数的减法和除法是封闭的，即 F 中任意两个数的差与商(分母不为零)仍在 F 中，则称 F 是**数域**.

例 1.1.1　全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 及全体复数的集合 $\mathbf{C}$ 均为数域，但全体整数的集合 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

例 1.1.2　数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$ 与数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 均为数域，但数集 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$ 不是数域.

二、连加号与连乘号

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 F 中 n 个数，规定

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

$$a_1a_2\cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

其中$\sum$与$\prod$分别称为“连加号”与“连乘号”.

可以证明，在数域 F 中连加号具有以下的性质：

（1）可数乘性：$a\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(aa_k)$；

（2）可加性：$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$；

（3）可交换性：$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

三、矩阵的概念

据史料记载，英国数学家西尔维斯特(J. J. Sylvester)于 1850 年首先提出 matrix 一词，而英国数学家凯莱(Cayley)首先将矩阵作为一个独立的数学对象加以研究，给出了现在通用的一系列定义，因而被认为是矩阵论的创立者.

引例 某中学的甲、乙、丙三位同学的期末考试成绩如下表：

	数学	语文	英语	综合
甲	94	93	95	91
乙	90	95	95	94
丙	98	91	93	90

那么，数表$\begin{bmatrix} 94 & 93 & 95 & 91 \\ 90 & 95 & 95 & 94 \\ 98 & 91 & 93 & 90 \end{bmatrix}$就具体反映了这三位同学四门课程的期末考试成绩.

定义 1.1.2 由数域 F 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 按照规定的次序排成的 m 行 n 列的矩形数表称为 F 上 m 行 n 列的(数字)矩阵，简称 $m\times n$ **矩阵**，记作

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素($i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$).

注记 矩阵通常用大写英文字母表示，其元素用带下标的小写英文字母或数字表示.

四、几类特殊的矩阵

定义 1.1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为实数(复数)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**实矩阵**(**复矩阵**)；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或 $\boldsymbol{O}$；

(3) 令 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，称 $[-a_{ij}]_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$；

(4) 当 $m=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,...,a_n]$ 为**行矩阵**，或 n **维行向量**；

(5) 当 $n=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 为**列矩阵**，或 m **维列向量**；

(6) 当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶矩阵**(或 n **阶方阵**)，并将从左上角到右下角的斜线称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**；

(7) 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，若它的主对角线下方(或上方)的元素全为 0，即 $a_{ij}=0(i>j(\text{或 } i<j),i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上(或下)三角形矩阵**；

(8) 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，若除了它的主对角线上的元素外的其余元素全为 0，即 $a_{ij}=0$，$(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**，记作

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}[k_1,k_2,\cdots,k_n],$$

其中 $k_i=a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对角元；

(9) 在 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，若它的对角元均等于 a，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**；特别地，当 $a=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$，或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

除非特别声明，本书中所讨论的矩阵均指实矩阵.

练习 1.1

A1. 证明：数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$ 为数域，但数集 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$ 不是数域.

A2. 证明：任何数域都是无穷集合.

A3. 证明：连加号的可交换性：$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$.

A4. 数域 F 上的零矩阵共有多少个，为什么？

A5. 二人零和对策问题. 两个儿童玩石头—剪子—布的游戏，每人的出法只能在{石

头,剪子,布}中选择一种，当他们各选定一种出法时，就确定了一个“局势”，也就决定了各自的输赢. 若规定胜者得 1 分，负者得 -1 分，平手各得零分，则对于各种可能的局势(每一局势得分之和为零即零和)试用矩阵表示他们的输赢状况.

B1. 证明：数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in\mathbf{Q}\}$ 是数域.

B2. 证明：有理数域是最小数域，即任何数域都包含有理数域.

B3. 设在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 中，除了次对角线(即从右上角到左下角的斜线)上的元素外的其余元素全为 0，试确定 $\boldsymbol{A}$ 的元素所满足的条件.

B4. 现有 5 支足球队参加循环赛，比赛成绩如下：甲队胜乙队、丙队和戊队，但负于丁队；乙队胜丙队和戊队，平丁队；丙队胜丁队，平戊队；丁队平戊队. 若规定：胜一场得 3 分，平一场各得 1 分，负一场得 0 分. 试用矩阵表示各队的比赛状况.

§1.2 矩阵的运算

初等代数主要是研究数(含代数式)的性质及运算的学科，而线性代数的主要内容是以矩阵为工具来研究线性方程组(含矩阵的线性方程)的解集合的存在、结构及其应用等问题，故对矩阵的运算进行讨论是十分必要的. 我们先给出矩阵相等的概念，它是矩阵运算的基础.

一、矩阵的线性运算

定义 1.2.1 若两个矩阵的行数与列数对应相等，则称它们是**同型矩阵**；如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 的对应元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1.2.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b+1 & 2 & 4-a\\ 3 & c-2 & 5\end{bmatrix}$ 相等，求 a,b,c 的值.

解 依定义 1.2.1 知 $a=4-a$，$1=b+1$，且 $-1=c-2$. 解得 $a=2$，$b=0$，$c=1$.

定义 1.2.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，

(1) **矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的加法**是一个 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix};$$

(2) **数 k 与矩阵 A 的乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵，记作 kA，规定为

$$kA=[ka_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法及数与矩阵的乘积(简称"数乘")统称为矩阵的**线性运算**.

注记 当 $k=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{A}=[-a_{ij}]=-\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，这样，即可定义矩阵的**减法**

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

例 1.2.2 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -\sin 1 & 0 \\ \pi & 5 & 0.2 & 8 \\ -6 & \sqrt{2} & 3 & 9 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sin 1 & 10 \\ -2\pi & 3 & 0.2 & -8 \\ -6 & -3\sqrt{2} & -6 & 9 \end{bmatrix},$$

试求矩阵 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 依定义 1.2.2 知

$$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -3\sin 1 & 10 \\ 0 & 13 & 0.6 & 8 \\ -18 & -\sqrt{2} & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

注记 由数的运算性质可以证明，对于任意的 $m\times n$ 矩阵 A, B, C, 及 a, $b\in F$, 矩阵的线性运算满足下列八条运算规律：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) 加法有零元：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 加法有负元：$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) 数乘恒等律：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) 数乘结合律：$a(b\boldsymbol{A})=(ab)\boldsymbol{A}$;

(7) 数乘分配律：$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$;

(8) 数乘分配律：$(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}$.

简而言之，数域 F 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合 $F^{m\times n}$ 关于矩阵的线性运算构成 F 上的线性空间(线性空间的理论参见本书第五章).

例 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$，求满足条件 $2\boldsymbol{A}+3(2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{X})=5\boldsymbol{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 依题设条件可得 $12\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 故 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{12}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1 & 8 & 11\\ 2 & 1 & 13\end{bmatrix}$.

二、矩阵的乘法

设有两个变量替换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\end{cases}\tag{1.2.1}$$

$$\begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2,\\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2,\\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2,\end{cases}\tag{1.2.2}$$

将式(1.2.2)代入式(1.2.1)，便可得从 t_1，t_2 到 y_1，y_2 的变量替换

$$\begin{cases}y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})t_2\\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})t_2.\end{cases}\tag{1.2.3}$$

变量替换(1.2.3)可视为是先作变量替换(1.2.2)，再作变量替换(1.2.1)所得，称为变量替换(1.2.1)与(1.2.2)的乘积，相应地把(1.2.3)所对应的矩阵定义为(1.2.1)与(1.2.2)所对应的矩阵的乘积，即

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}.$$

一般地，我们有

定义 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，规定**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 的幂定义为 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$，对一切正整数 k，并规定

$A^0=E$.

进而，设 $\psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m(a_m\neq0)$ 是 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶矩阵，则称矩阵

$$\psi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

为矩阵 A 的 m 次多项式.

容易证明，如果 $A=\mathrm{diag}[k_1,k_2,\cdots,k_n]$ 是 n 阶对角矩阵，则

$$\begin{aligned}\psi(A)&=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m\\&=a_0\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}+\cdots+a_m\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}^m\\&=\begin{bmatrix}\psi(k_1)&&&\\&\psi(k_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\psi(k_n)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 1.2.4 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$，求矩阵 AB.

解 依定义 1.2.3 知 $AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\28\end{bmatrix}$.

注记 例 1.2.4 说明矩阵 AB 有定义(AB 是 A 左乘 B,也是 B 右乘 A)，但 BA 未必有定义.

例 1.2.5 设 $A=[1,2,3]$，$B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，求矩阵 AB 和 BA.

解 依定义 1.2.3 知 $AB=[14]$，而 $BA=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$.

注记 例 1.2.5 说明矩阵 AB，BA 均有定义，但它们未必同型.

例 1.2.6 设 $A=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}$，计算 AB，BA，A^2，B^2，$(AB)^2$ 和 A^2B^2.

解 依定义 1.2.3 知

$$AB=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&-32\\8&16\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-16\\-4&8\end{bmatrix},$$

$$B^2=\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-16\\12&24\end{bmatrix},$$

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}-16&-32\\8&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-16&-32\\8&16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$A^2B^2=\begin{bmatrix}8&-16\\-4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8&-16\\12&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-256&-512\\128&256\end{bmatrix}.$$

注记 例 1.2.6 说明，即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 同型，但 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 未必相等，故矩阵的乘法不满足交换律；而两个非零矩阵的乘积为零矩阵，揭示矩阵的乘法不满足消去律；又 $(\boldsymbol{AB})^2\neq \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$，说明矩阵的乘法不满足异底指幂律.

然而，我们可以证明矩阵的乘法满足下列运算规律（假设运算都是可行的）：

（1）乘法恒等律：$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n$；

（2）乘法结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（3）乘法对加法的分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

（4）同底指幂律：$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$，$(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$.

这里我们只证明乘法结合律，其余的留作练习.

***证明** 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times t}$，$\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{t\times n}$，则依矩阵乘法的定义知，$\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times t$ 矩阵，进而 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵；同理，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 也是 $m\times n$ 矩阵.

注意到 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行元素为

$$\left[\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1},\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kt}\right],$$

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

同理，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{t}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

再依连加号的性质知

$$\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t}a_{ik}b_{kl}c_{lj},(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

因此$(\boldsymbol{AB})C=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. 证毕

例 1.2.7 设 $\boldsymbol{A}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，求矩阵$(\boldsymbol{BA})^{11}$.

解 依矩阵乘法的结合律知

$$(\boldsymbol{BA})^{11}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{10}\boldsymbol{A}=14^{10}(\boldsymbol{BA})$$

$$=14^{10}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14^{10}&2\cdot 14^{10}&3\cdot 14^{10}\\2\cdot 14^{10}&4\cdot 14^{10}&6\cdot 14^{10}\\3\cdot 14^{10}&6\cdot 14^{10}&9\cdot 14^{10}\end{bmatrix}.$$

三、矩阵的转置

定义 1.2.4 将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行都变为同序数的列所得的 $n\times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 1.2.8 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-5&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.

解 依定义 1.2.4 知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-5\\-3&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$.

注记 例 1.2.8 中，矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不同型，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同型但不相等，而 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}$.

定义 1.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**反称矩阵**.

易见，对称矩阵与反称矩阵均为 n 阶方阵.

矩阵的转置可视为一种矩阵运算，它满足下列运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) 二次互反性：$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) 可加性：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) 可数乘性：$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) 乘积反序性：$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

* **证明** 事实上，依转置矩阵的定义，容易证明运算规律(1)~(3).

现证算律(4). 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

于是，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}(j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,m),$$

又 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为 $[b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si}]$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为 $[a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js}]$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}=c_{ji}(j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m).$$

因此，依矩阵相等的定义知 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 证毕

运用数学归纳法不难证明，对任意有限个可乘矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$，有

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{s-1}\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{s-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

例 1.2.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\-5&6\\4&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}$，求矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法一 依矩阵乘法的定义知 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-5&11\\-17&8\\0&14\end{bmatrix}$，故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-5&-17&0\\11&8&14\end{bmatrix}$.

解法二 依题设知

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-5&4\\3&6&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-2\\2&3\end{bmatrix},$$

故依矩阵转置的性质得

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-5&-17&0\\11&8&14\end{bmatrix}.$$

例 1.2.10 设列矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=1$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.

证明 依题设知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=1$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

证毕

*四、矩阵的共轭

定义 1.2.6 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$为复矩阵，用$\overline{a}_{ij}$表示 a_{ij}的共轭复数，记$\overline{\boldsymbol{A}}=[\overline{a_{ij}}]_{m\times n}$，称$\overline{\boldsymbol{A}}$为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.

例 1.2.11 设$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2+3\sqrt{-1} & -5 & 1-2\sqrt{-1}\\ 0 & -6+\sqrt{-1} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 由共轭复数的性质及依定义 1.2.6 知

$$\boldsymbol{A}=\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\begin{bmatrix}2-3\sqrt{-1} & -5 & 1+2\sqrt{-1}\\ 0 & -6-\sqrt{-1} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

易见，矩阵的共轭可视为矩阵的一种运算. 运用复数的运算性质，可以证明(留作练习)，矩阵的共轭运算具有下列性质(假设运算都是可行的)：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为复矩阵，k 为复数，

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$;

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

五、方阵的迹

定义 1.2.7 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是 n 阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素之和称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

例 1.2.12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的迹.

解 依矩阵乘法的定义知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-1&10\\-1&28\end{bmatrix},\ \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}13&17&21\\7&8&9\\4&5&6\end{bmatrix},$$

故依定义 1.2.7 知，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=27$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=27$.

方阵的迹可视为方阵的一种运算，它具有下列性质(假设运算都是可行的)：

(1) **可加性**：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$;

(2) **可数乘性**：$\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$;

(3) **乘积可换性**：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.