国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列·13

四元数物理学

许方官 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列・13

四元数物理学

许方官 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

四元数物理学/许方官著. —北京:北京大学出版社,2012.7
(中外物理学精品书系·前沿系列)
ISBN 978-7-301-20834-2

Ⅰ.①四…　Ⅱ.①许…　Ⅲ.①四元数-应用-物理学　Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 132383 号

书　　　名:四元数物理学
著作责任者:许方官　著
责 任 编 辑:尹照原
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-20834-2/O·0872
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
　　　　　　出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
　　　　　　730 毫米×980 毫米　16 开本　12.75 印张　236 千字
　　　　　　2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
定　　　价:35.00 元

《中外物理学精品书系》
编 委 会

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会 主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

这是一本与通行的物理学教科书籍略有不同的书，叙述了相对论物理学的基本原理，不多涉及具体应用方面的内容．主要的不同之处有以下几个方面：

1．所用的数学方法不同．除了通常的微分积分外，还应用了四元数的代数运算．

2．以时间和空间具有同等地位，以及时间和空间构成的四维空间——时空的认识为前提，导出了不同惯性参考系之间的洛伦兹变换，使得所谓的光速不变原理成为时和空度量单位之间的换算常数不随惯性参考系而改变的必然推论．

3．用时空中每一维的距离随时空中四维间隔的变化规律来描述相对论力学．

4．用四元数电磁场的四梯度与四元数电磁源成正比的规律来描述电磁理论．

5．用四元数对相对论性的能量动量关系进行因式分解，建立了不同种类的波动方程，用以描述不同种类的微观粒子的运动规律，叙述了对克莱因-戈尔登方程，以及对轨道角动量和自旋的不同认识．

一方面，由于笔者学术水平较低，知识领域狭窄，因此如量子场论、广义相对论等更深层次的物理内容没能涉及，实为遗憾．

另一方面，因为用四元数来描述物理理论的资料也未多见，此文只属尝试之举，故缺点错误在所难免，理所当然地欢迎批评指正，如能深入探讨和进一步发展更是所期盼的．

目　　录

第 1 章　四元数代数

§1.1　四元数的代数运算

一、四元数的定义

一个三维空间的实矢量

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

与一个实数 a_0 组合成一个数

$$A = a_0 + \boldsymbol{a} \tag{1.1.2}$$

称为**四元数**. 其中实数 a_0 称为四元数 A 的**标部**,实矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为四元数 A 的**矢部**. 分别用下标 S 和 V 表示标部和矢部,记作

$$\begin{cases} A_{\mathrm{S}} = a_0, \\ A_{\mathrm{V}} = \boldsymbol{a}. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

在四元数 A 的矢部中,三个矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三维空间中三个互相垂直且方向固定的单位矢量.

一个四元数实际上是由四个基 $1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合构成的.

二、代数运算法则

1. *相等*

两个四元数 A 和 B,若他们相应的四个分量分别相等,即

$$a_n = b_n, \quad n = 0,1,2,3.$$

则称他们**相等**,记作

$$A = B. \tag{1.1.4}$$

一个四元数的等式相当于四个实数等式.

2. *加法*

两个四元数 A 和 B 之和 C 仍为四元数,记作

$$C = A + B. \tag{1.1.5}$$

其定义为

$$c_n = a_n + b_n, \quad n = 0,1,2,3.$$

由实数加法的交换律、结合律知,四元数加法也存在着交换律和结合律.

3. 乘法

两个四元数 A 和 B 乘积的定义是

$$\begin{aligned} AB &= (a_0 + \boldsymbol{a})(b_0 + \boldsymbol{b}) \\ &= a_0 b_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + a_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \end{aligned} \tag{1.1.6a}$$

$$\begin{aligned} BA &= (b_0 + \boldsymbol{b})(a_0 + \boldsymbol{a}) \\ &= a_0 b_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + a_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{1.1.6b}$$

两个四元数的乘积仍是四元数,但因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$$

故

$$AB \neq BA.$$

所以,一般来说四元数的乘法不存在交换律.

有一种特殊情形:若两个四元数 A 和 B 的矢部平行,即 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$,那么由于

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = 0,$$

则有

$$AB = BA.$$

所以两个矢部平行的四元数相乘时是满足交换律的.

由四元数乘法的定义(1.1.6)式易证,四元数的乘法仍存在结合律和分配律.当相乘的两个四元数的标部均为0时,其乘积

$$AB = \boldsymbol{ab} = -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

仍是四元数.写法 $\boldsymbol{ab}$ 不是张量代数中的并矢,而是两个特殊四元数之积,是一个四元数.

四元数的乘法规则实际上是由三个互相垂直的空间单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 之间的乘法规则

$$\begin{cases} \boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = -1, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.1.7}$$

所导致的.

4. 共轭和模方

(1) 四元共轭:与四元数 $A = a_0 + \boldsymbol{a}$ 对应的另一个四元数

$$\widetilde{A} = a_0 - \boldsymbol{a} \tag{1.1.8}$$

称为 A 的**四元共轭**.反之,A 也称为 $\widetilde{A}$ 的**四元共轭**.

由

$$\widetilde{AB}=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a_0\boldsymbol{b}-b_0\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{B}\widetilde{A}&=(b_0-\boldsymbol{b})(a_0-\boldsymbol{a})\\&=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a_0\boldsymbol{b}-b_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

可知

$$\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}. \tag{1.1.9}$$

(2) 模方：称实数

$$\|A\|=\|\widetilde{A}\|=A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=a_0^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.1.10}$$

为四元数 A 或 $\widetilde{A}$ 的**模方**.

由简单的运算可知，两个四元数之积的模方等于两个四元数模方之积，即

$$\|AB\|=\|A\|\,\|B\|. \tag{1.1.11}$$

5. 逆

若四元数 A 的模方不为 0，则称四元数

$$A^{-1}=\frac{\widetilde{A}}{\|A\|} \tag{1.1.12}$$

为 A 的**逆**. 显然有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=1,$$

$$\|A^{-1}\|=\frac{\widetilde{A}}{\|A\|}\,\frac{A}{\|A\|}=\frac{1}{\|A\|}.$$

且因

$$\frac{\widetilde{AB}}{\|AB\|}=\frac{\widetilde{B}\widetilde{A}}{\|B\|\,\|A\|},$$

故

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}. \tag{1.1.13}$$

6. 关于除法

在四元数的算法中没有定义除法. 不过，如果四元数 A 的模方 $\|A\|\neq 0$，那么仍可借用 $\frac{A}{A}=1$ 的形式，得出

$$BA^{-1}=BA^{-1}\frac{A}{A}=B\frac{1}{A},$$

$$A^{-1}B=\frac{A}{A}A^{-1}B=\frac{1}{A}B.$$

上面二式可理解成 B 用四元数 A 来除. 只是一般情况下“左除”还是“右除”的结果

并不相同,所以四元数算法中不用除法,在需要的时候则以乘其逆来代替.

三、四元数的指数表示

用无穷级数

$$\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{e}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\boldsymbol{e})^n}{n!} \tag{1.1.14}$$

作为四元数指数函数的定义,其中 α 是实数,$\boldsymbol{e}$ 是四元数 $\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{e}}$ 矢部的单位矢量. 由四元数乘法

$$\boldsymbol{e}^2 = -1, \quad \boldsymbol{e}^3 = -\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e}^4 = 1$$

得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{e}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\boldsymbol{e} \\ &= \cos\alpha + \sin\alpha\boldsymbol{e}.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

所以四元数可以表示成指数的形式

$$A = a_0 + \boldsymbol{a} = |A|\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{e}}, \tag{1.1.16}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{e} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{a}, \\ a_0 = |A|\cos\alpha, \\ a = |A|\sin\alpha,\end{cases}$$

$|A|$ 称为四元数 A 的**模**,有

$$\begin{cases}\alpha = \arctan\dfrac{a}{a_0}, \\ |A| = \sqrt{a_0^2 + a^2} = \sqrt{\|A\|}.\end{cases} \tag{1.1.17}$$

所以

$$A = a_0 + \boldsymbol{a} = \sqrt{\|A\|}\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{a}{a_0}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{a}}.$$

当两个四元数 A 和 B 的矢部平行,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,

$$A = \sqrt{\|A\|}\mathrm{e}^{\alpha_1\boldsymbol{e}}, \quad B = \sqrt{\|B\|}\mathrm{e}^{\alpha_2\boldsymbol{e}}.$$

则

$$\begin{aligned}AB = BA &= a_0b_0 - ab + (a_0b + b_0a)\boldsymbol{e} \\ &= \sqrt{\|A\|\,\|B\|}\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{e}}.\end{aligned}$$

如果两个四元数 A 和 B 的矢部不平行,则因为

$$\mathrm{e}^{\alpha_1\boldsymbol{e}_1}\mathrm{e}^{\alpha_2\boldsymbol{e}_2} \neq \mathrm{e}^{\alpha_2\boldsymbol{e}_2}\mathrm{e}^{\alpha_1\boldsymbol{e}_1}.$$

所以,一般来说四元数的乘法并不能用指数的加法来简化,其原因是四元数的加法

满足交换律，而乘法并不满足交换律，因此四元数的指数表示法在四元数的算法中并不占重要地位，只在特殊情况下，如快度的计算中才应用.

§ 1.2　四元数在数中的地位

在数的发展历程中，经历了自然数、负数、整数、有理数、无理数，这些数总称为实数. 一根数轴被实数充满. 实数间的运算结果总保持在同一数轴上——称之为封闭性；除 0 以外的任一实数，总可用另一个实数与其相乘使其乘积历遍整个数轴——称之为完备性. 因此实数的集合构成了一个代数，用实数之间的运算就能承担在一条直线上发生的物理事件. 至于在另一条直线上发生的事件，则需要进行另一套实数运算来解决.

复数的诞生开创了数观念的新阶段，它使数从一条直线发展到了一个平面. 复数的乘法规则既保持了它的封闭性，即两个复数的乘积仍然是复数；又保持了它的完备性，即给定了任一个非 0 复数后，总存在另外的复数与该复数相乘并使其乘积历遍整个复数平面. 这样复数的集合也构成了一个代数，一个平面上发生的事件就总可通过复数间的运算来解决.

直线只是平面的特例，实数也只是复数的特例，于是实数之间的运算规则也只是复数之间运算规则的特例. 因此，复数既是以实数为其基础，又是比实数高一层次的数的形态.

能不能把数的形态进一步发展至体，成为一个"三维数"？人们在这方面作了极大的努力.

一方面，人们建立了三维矢量，用它来与三维空间的点一一对应，并且发展出了一套矢量之间的运算法则. 但是这种矢量能否成为"三维数"呢？问题在于怎样来规定矢量之间的乘法. 两个矢量之间点乘的结果不再是矢量，而是一个数量，破坏了封闭性；两个矢量之间叉乘的结果虽仍是一个矢量，然而它总与相乘的两个矢量垂直，因此不可能在任意给定一个非 0 矢量后，用其他矢量与它叉乘使其积矢量历遍整个空间，所以破坏了完备性. 至今，人们还没有找到一种矢量之间的乘法规则，使得矢量成为一个"三维数".

另一方面，哈密顿于 1843 年发现创造了四元数. 上一节已经对四元数作了简单的介绍，说明了四元数的乘法既保持了它的封闭性，又保持了它的完备性，表明四元数的集合也构成了一个代数——四元数代数. 四元数的乘法是集数与数的乘法、数与矢量的乘法、矢量间的点乘和叉乘于一身的乘法.

如果只讨论矢部均是同一方向的四元数，那么它们就蜕化成了复数，这时四元

数的乘法就蜕化成了复数的乘法，表明复数的代数只是四元数代数的子代数. 更进一步，若只讨论矢部为0的四元数，那么它们就蜕化成了实数. 实数代数既是复数代数的子代数，更是四元数代数的子代数. 所以，四元数是比实数、复数更高一层次的数的形态.

一个四维空间中点的位置可以与一个四元数一一对应，于是在四维空间中产生的种种现象及其演变的规律总可以借四元数来描述和运算，这就已经显现出了四元数的应用价值. 不仅如此，数的形态，从实数（一维）、复数（二维），越过了三维数而直接到达四元数的事实，可能已经提醒了人们，自然界在本质上就是四维的. 因此在自然界中发生的各种事件及其演变的规律性，本来就应该用四元数来表述和运算才是正确的方法，而其他的表述和运算很可能只是四元数表述和运算方法的特例、推论或者近似.

数的形态还可以进一步发展. 把两个四元数 A 和 B 再组起来成为一个数——八元数：

$$A+B\boldsymbol{e}.$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 是独立于 $1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之外的一个新的单位矢量，满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}^2=-1,\quad \boldsymbol{e}1=1\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e},\\&\boldsymbol{ei}=-\boldsymbol{ie},\quad \boldsymbol{ej}=-\boldsymbol{je},\\&\boldsymbol{ek}=-\boldsymbol{ke}.\end{aligned}$$

两个八元数之间的加法和乘法规定为

$$(A+B\boldsymbol{e})+(C+D\boldsymbol{e})=(A+C)+(B+D)\boldsymbol{e},$$

$$(A+B\boldsymbol{e})(C+D\boldsymbol{e})=(AC-\widetilde{D}B)+(DA+B\widetilde{C})\boldsymbol{e}.$$

八元数乘法既不满足交换律，也不满足结合律. 不过它却仍然具有封闭性和完备性，因此八元数的集合也构成一个代数——八元数代数，而四元数代数仅是八元数代数的一个子代数.

八元数的理论、八元数的几何意义及其在物理学中的应用可参阅有关文献，不属本书的讨论范畴.

§1.3 四元数的发展

四元数是数观念发展阶段上一个新的层次，在四维空间中发生的事情可以由它来描述和运算. 为了增强四元数的运算功能，拓广它的应用范围，还可以将四元数本身进一步地发展.

一、双四元数

在四元数

$$A = a_0 + a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k} = a_0 + \boldsymbol{a} \tag{1.3.1}$$

中，如果 $a_n(n=0,1,2,3)$ 中有一个以上（含一个）是复数（或纯虚数），那么就称 A 为**双四元数**.

两个双四元数间的相等、相加和相乘，与两个（单）四元数间的相等、相加和相乘完全相同. 一个双四元数的等式相当于八个实数的等式.

双四元数的集合构成了一个代数，而（单）四元数的代数则是双四元数代数的子代数.

对于一个双四元数 A，有五个双四元数与它相对应，或与它共轭，分别是

四元共轭：　$\widetilde{A} = a_0 - a_1 \boldsymbol{i} - a_2 \boldsymbol{j} - a_3 \boldsymbol{k} = a_0 - \boldsymbol{a}$；　(1.3.2a)

反共轭：　$A^{c} = a_0^* + a_1^* \boldsymbol{i} + a_2^* \boldsymbol{j} + a_3^* \boldsymbol{k} = a_0^* + \boldsymbol{a}^*$；　(1.3.2b)

转置：　$A^{T} = a_0 + a_1 \boldsymbol{i} - a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k}$；　(1.3.2c)

复共轭：　$A^* = a_0^* - a_1^* \boldsymbol{i} + a_2^* \boldsymbol{j} - a_3^* \boldsymbol{k}$；　(1.3.2d)

厄米共轭：　$A^{\dagger} = a_0^* - a_1^* \boldsymbol{i} - a_2^* \boldsymbol{j} - a_3^* \boldsymbol{k} = a_0^* - \boldsymbol{a}^*$.　(1.3.2e)

容易验证

$$A^{\dagger} = (\widetilde{A})^{c} = \widetilde{A^{c}} = (A^{T})^* = (A^*)^{T}. \tag{1.3.3}$$

双四元数模方的定义与（单）四元数模方的定义相同，即

$$\| A \| = A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \sum_{n=0}^{3} a_n^2. \tag{1.3.4}$$

但在一般情况下它是复的. 在一些特殊情况下它可能是实的，不过此时它也并非总是正的.

(1.3.2)式表明，双四元数 A 及其各种共轭的模方之间满足关系

$$\| A \| = \| \widetilde{A} \| = \| A^{T} \| = \| A^{c} \|^* = \| A^* \|^* = \| A^{\dagger} \|^*. \tag{1.3.5}$$

两个双元数 A 和 B 的各种共轭之间的乘法的规律是

$$\begin{cases} A^{c}B^{c} = (AB)^{c}, \\ A^*B^* = (AB)^*, \\ \widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{BA}, \\ A^{T}B^{T} = (BA)^{T}, \\ A^{\dagger}B^{\dagger} = (BA)^{\dagger}. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

在用四元数表述量子力学的规律时，微观粒子态函数的表述依赖于两个特殊的双四元数

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\boldsymbol{i}), \\ v = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{j} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}). \end{cases} \tag{1.3.7a}$$

他们的四元共轭、反共轭、复共轭、转置和厄米共轭分别为

四元共轭：
$$\begin{cases} \tilde{u} = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\boldsymbol{i}), \\ \tilde{v} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{j} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}) = -v; \end{cases} \tag{1.3.7b}$$

反共轭：
$$\begin{cases} u^{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\boldsymbol{i}) = \tilde{u}, \\ v^{\mathrm{c}} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{j} - \mathrm{i}\boldsymbol{k}); \end{cases} \tag{1.3.7c}$$

复共轭：
$$\begin{cases} u^{*} = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\boldsymbol{i}) = u, \\ v^{*} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{j} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}) = v; \end{cases} \tag{1.3.7d}$$

厄米共轭和转置：
$$\begin{cases} u^{\dagger} = u^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\boldsymbol{i}) = u, \\ v^{\dagger} = v^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{j} - \mathrm{i}\boldsymbol{k}) = -v^{\mathrm{c}}. \end{cases} \tag{1.3.7e}$$

他们有重要的运算性质：

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}u = \mathrm{i}u, \quad \boldsymbol{j}u = -v, \quad \boldsymbol{k}u = \mathrm{i}v, \\ \boldsymbol{i}v = -\mathrm{i}v, \quad \boldsymbol{j}v = u, \quad \boldsymbol{k}v = \mathrm{i}u; \end{cases} \tag{1.3.8a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}u^{\mathrm{c}} = -\mathrm{i}u^{\mathrm{c}}, \quad \boldsymbol{j}u^{\mathrm{c}} = -v^{\mathrm{c}}, \quad \boldsymbol{k}u^{\mathrm{c}} = -\mathrm{i}v^{\mathrm{c}}, \\ \boldsymbol{i}v^{\mathrm{c}} = \mathrm{i}v^{\mathrm{c}}, \quad \boldsymbol{j}v^{\mathrm{c}} = u^{\mathrm{c}}, \quad \boldsymbol{k}v^{\mathrm{c}} = -\mathrm{i}u^{\mathrm{c}}. \end{cases} \tag{1.3.8b}$$

以及

$$\begin{cases} u^{\dagger}u = v^{\dagger}v = u, \\ u^{\dagger}v = v^{\dagger}u = 0. \end{cases} \tag{1.3.8c}$$

和

$$\begin{cases} u^{\mathrm{c}}v = v, \\ v^{\mathrm{c}}v = -u. \end{cases} \tag{1.3.8d}$$

这些运算性质在求解微观粒子的波动方程时会经常应用，例如对于四元形式的方程

$$A(\phi u + \psi v) = 0, \tag{1.3.9}$$

其中，A 是四元数形式的运算符号，ϕ 和 ψ 是标量函数. 把上式展开得

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(\phi u + \psi v) \\ &\quad = [(a_0 + \mathrm{i}a_1)\phi + (a_2 + \mathrm{i}a_3)\psi]u + [(a_0 - \mathrm{i}a_1)\psi - (a_2 - \mathrm{i}a_3)\phi]v \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$