高等学校试用教材

数学分析

下册

武汉大学数学系编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书为武汉大学数学系编《数学分析》下册．继上册一元函数微积分之后，主要内容有：无穷级数，多元函数的极限理论，多元函数微分学，重积分，线、面积分与场论初步，含参变量的积分以及变分法简介等七章，可供综合大学及师范院校数学系数学专业、计算数学专业作试用教材．

高等学校试用教材

数 学 分 析

下 册

武汉大学数学系编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张13　字数321,000

1978年10月第1版　1979年4月湖北第1次印刷

印数00,001—315,000

书号 13012·0200　定价0.94元

目 录

第六章 无穷级数

第七章 多元函数的极限理论

第八章 多元函数微分学

第九章　重积分

第十章　线、面积分与场论初步

第十一章　含参变量的积分

第十二章*　变分法简介

① 注有*号者为选学内容.

第六章　无穷级数

我们在前一章中曾经看到，函数 e^x 可以用泰勒公式表示：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x)$$

其中 $R_{n+1}(x)$ 为余项，且这里 n 可以取任何大的整数．如果略去 $R_{n+1}(x)$，则不论 n 如何大，只能得出 e^x 的近似公式．但若我们按前面各项的规律一直写下去，而始终不写 $R_{n+1}(x)$，那么我们就得到这样一个形式的式子：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (*)$$

现在右边是无穷个项"相加"了．我们要问，这样的式子是否能精确表达 e^x？这当然首先就要问无穷个项"相加"究竟是什么意思？这种无穷个项"相加"的式子就叫做无穷级数，它是本章研究的对象．

我们研究无穷级数，决不是把它当作有限项相加的一个形式推广而感兴趣的；而是因为它无论在理论上或实际应用中都是研究函数的一种强有力的数学工具．例如，对于 e^x，有了这一工具，通过把它表写为无穷级数的(*)式，就可以更好地研究它的性质，也对它的计算提供了一种简单可行的方法（特别是在数字电子计算机上适用的方法）．

有限项相加与无穷级数是有限和无限一对矛盾．从有限向无限转化时，必须注意，对于我们所熟悉的有限项相加的一些运算规律，在无穷级数中有些仍然有效，有些就失效或者要在补充的条件下才保持有效．我们决不能把有限项相加的一切运算规律无条件

地、盲目地硬搬到无穷级数中来，而要弄清楚那些运算规律在怎样的条件下在无穷级数中仍有效．这是我们在学习本章时必须切实注意的．

§1 数项级数

1.1 无穷级数概念及一般性质 一般说来，式子

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \text{ 或记成} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum a_n \tag{1}$$

称为无穷级数，或简称级数，a_1 称为它的首项，a_2 为第二项等等，a_n 称为它的一般项．如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$都是常数，则(1)称为数项级数；如果所有这些项都是某个变量 x 的函数，则称为(x 的)函数项级数．本节只讨论数项级数．

级数(1)中含无穷多个加号，一项接一项相加是加不完的．因此不能按普通求和来理解它，而必须明确它的意义．从(1)的首项加到第 n 项止，得

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

(2) 称为级数(1)的(前 n 项)部分和．根据 S_n 当 $n\to+\infty$时的趋势，我们给出如下的定义．

定义 如果级数(1)的部分和(2)的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{3}$$

存在(有限)，设为 S，则称级数(1)收敛，而 S 称为它的和，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$；如果这一极限不存在，则称级数 (1) 发散，这时它就没有和[①]．

---

① 当 $S=\pm\infty$时，有时也说$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和为 $\pm\infty$．

用 ε-N 语言来说，级数(1)收敛，其和为 S(也称为收敛于 S)就是：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon$$

我们来看一个例子.

例 1 求证

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

解 因为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

我们再来看一个非常重要的例子.

例 2 考察公比为 r 的等比级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots,\quad a\neq0 \tag{4}$$

的敛散性.

(我们之所以假定 $a\neq0$，是因为如果 $a=0$，(4)的每一项都是零，它当然收敛，且和为 0，这时没有必要进行讨论.)

解 级数(4)前 n 项的部分和为

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & 当\ r\neq1\\ na, & 当\ r=1\end{cases}$$

当 $|r|<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

当$|r|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，因为这时$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$. 所以，当$|r|<1$时，(4)收敛，且其和为$\frac{a}{1-r}$；当$|r|>1$时，(4)发散。

当$r=1$时，级数(4)显然发散，因为当$n\to\infty$时，$S_n=na\to\pm\infty$ ($a>0$时为$+\infty$，$a<0$时为$-\infty$)．当$r=-1$时，(4)成为$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n+1}a+\cdots$. 很明显，当$n$为奇数时，$S_n=a$，当$n$为偶数时，$S_n=0$，所以$n\to\infty$时$S_n$也不可能有极限(注意已假定$a\neq 0$).

概括起来，我们有如下的结果：等比级数(4)当公比$|r|<1$时收敛，且有和$\frac{a}{1-r}$，即

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots=\frac{a}{1-r},\quad (|r|<1)$$

当公比$|r|\geqslant 1$时发散.

从级数的收敛、发散定义可以看出，级数(1)收敛或发散的问题实质上就是部分和的数列$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$有无极限问题，也就是$\{S_n\}$的收敛、发散问题．这是一个极为重要的基本原则．因此，无穷级数的问题从原则上讲都可转化为数列的问题来讨论．但由于级数采用了“无穷项求和”这一新的形式，因此它也就有一些特殊的规律，我们应该注意掌握和利用.

为了说明怎样运用上述基本原则，我们再举一个重要例子.

例 3 求证调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{5}$$

发散.

证 级数(5)的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

我们无法把 S_n 写成一个紧凑的表达式从而来求其极限，因此不再能用前两例的方法．但是我们看到：

$$S_1=1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2}$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}$$

同理，　　$S_{16}>1+\frac{4}{2}$，　　$S_{32}>1+\frac{5}{2}$，…

一般可得　　$$S_{2^n}>1+\frac{n}{2}$$

由此可见，

$$\lim_{n\to\infty}S_{2^n}=+\infty$$

然而$\{S_{2^n}\}$即 $S_1, S_2, S_4, S_8, \cdots$是$\{S_n\}$的子数列，既然这个子数列发散，那么$\{S_n\}$也一定发散，因为，如果$\{S_n\}$收敛，它的任何子数列也应该是收敛的．这就证明了：调和级数 (5)是发散的．这就是例 3.

从前述基本原则出发，可以得出级数的一系列重要性质．

1）在级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前面删去或增添一项或者任意有限个(但数目是确定的)项，不会改变它的敛散性．

2）在级数 $\sum a_n$ 中，每项同时乘一不等于零的常数 k 而得级数 $\sum ka_n$，其敛散性不变；且若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum ka_n=k\sum a_n$．

3) 如 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 都收敛，则逐项相加或逐项相减后所得级数

$$\sum(a_n+b_n)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)+\cdots$$

$$\sum(a_n-b_n)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)+\cdots$$

也收敛，且 $\sum(a_n\pm b_n)=\sum a_n\pm\sum b_n$.

4) 对于收敛级数，可以在各项间任意加括号而不改变其收敛性与和.

我们只来证明 1)，而其余的留给读者自己思考.

设在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面添加一项 a_0 成为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

那么它的前 n 项部分和

$$S'_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=a_0+S_{n-1},$$

这里 S_{n-1} 是原来级数前 $n-1$ 项的部分和. 于是,

$$\lim_{n\to\infty}S'_n \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

同时存在或否，即新级数与原级数同时收敛或否. 而且可以看出，如果 $S_n\to S$, $S'_n\to S'$, 则

$$S'=a_0+S$$

对于增添一项是如此，再增添若干项就可利用每次添一项的结果来证明. 对于删去若干项也可类似地证明，或利用上述结果，用反证法来证明，请读者自己思考.

从上面的证明中，我们可以看出，如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛，则可写

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \tag{6}$$

这个式子的意思是说，如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛，则 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 也收敛，且前者

的和等于它的部分和 S_n 再加上 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 的和. 后一级数称为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 前 n 项后的余级数，而它的和称为余和. 当然，如 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散，那末 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 也发散，这时就谈不上余和了.

另外，从 (6) 式还看出：如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛则余和 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 随着 n 无限增大而趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=0$$

思　考　题

若级数 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)+\cdots$ 收敛，级数 $a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n+\cdots$ 是否收敛？

练　　习

1. 直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(3) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

2. 研究下列级数的敛散性：

(1) $1-1+1-1+1-1+\cdots$　　(2) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$

(3) $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$

3. 若两个级数之中

(1) 一个收敛，而另一个发散；　(2) 两个级数都发散；

它们逐项相加后所成级数是怎样的(收敛或发散)？

1.2 级数收敛的条件 给出一个级数，我们首先关心的就是它是否收敛，以及如果收敛，它的和又是多少. 关于收敛级数求和的问题，除少数例外(象前面举的例 1,2)，一般是很困难的，因为其部分和一般都很难写成一个紧凑的式子. 但是，从计算的观点来看，如果能断定级数收敛，虽不能求出其和的精确值，我们可以用它的部分和S_n作为它的近似值，而且当 n 取得充分大时，用这样近似代替所发生的误差可以达到任意小，从而完全满足实践中的需要. 这样，本节以后的中心问题就集中在怎样判断级数的敛散上.

一般说来，这一问题仍然不是很简单的. 但有一点至少是很明显的:

定理 1（**级数收敛的必要条件**） 如果级数 $\sum a_n$ 收敛，则其一般项必趋于零:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1}$$

证 既然 $\sum a_n$ 收敛，它就有和 S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

这里 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为级数的部分和. 但 $a_n = S_n - S_{n-1}$，注意到 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

证毕.

运用这一原理，我们可以立即判断某些级数不收敛. 例如，我们再来看等比级数 $\sum ar^n$. 当 $|r| \geqslant 1$ 时，显然

$$\lim_{n\to\infty} ar^n \neq 0,\ （因为\ a \neq 0）$$

所以这时它不会收敛.

但要注意，条件(1)只是级数 $\sum a_n$ 收敛的必要条件，并不充分；就是说，即使(1)成立，也不能保证 $\sum a_n$ 收敛. 例如调和级数，

虽然它的一般项 $a_n=\frac{1}{n}\to 0$，但我们已知它是发散的.

所以，我们应该记住：要判断级数 $\sum a_n$ 的敛散时，应首先观察其一般项 a_n 是否趋于零(当 $n\to\infty$)：如果 a_n 不趋于零，则立刻可断定 $\sum a_n$ 发散；如 $a_n\to 0$，那么对 $\sum a_n$ 的敛散还不能立即判断，还必须作具体分析，用别的方法进一步研究.

条件(1)既只是级数收敛的必要条件而不能完全解决判断级数敛散的问题，那么是否可以找出级数收敛的一个必要充分条件呢？从原则上讲，这完全可以，因为级数的收敛实质上就是部分和数列的收敛，而数列收敛的必要充分条件我们已在第四章中讨论过，从而只要把这个条件转化到级数形式上来便是我们所要的条件：

定理 2(级数收敛的准则) 级数 $\sum a_n$ 收敛的必要充分条件是：任给 $\varepsilon>0$，必有正整数 N 存在，使当 $n>N$ 时，对任何自然数 p，恒有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \tag{2}$$

在证明之前我们先来说明一下这准则的意思. 不等式(2)左边绝对值记号内的和数实际上是在级数中截下自第 $n+1$ 项起到第 $n+p$ 项止的一段的和数，我们不妨形象地把它称作级数的一个"片段". 因此，上述级数收敛的必要充分条件的意思是：当 N 充分大时，从级数的第 $N+1$ 项 a_{N+1} 之后任意截取一个片段(由于 n 可以是比 N 大的任意数，p 也是任意的，所以不论从 a_{N+1} 的后面哪一项开始截起，也不论截多么长的一段都行)，其和的绝对值总小于事先指定的任何正数 ε.

现在来证明. 事实上，我们只要说明这准则就是 $\sum a_n$ 的部分和序列 S_1, S_2, $\cdots$, S_n, $\cdots$ 的收敛准则的变形. 我们知道，$\{S_n\}$ 的收敛准则是：任给 $\varepsilon>0$，必有 N 存在，使当 $m>N$, $n>N$ 时，恒有

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

注意 m，n 中总有一个较大的，不妨把大的一个记作 m，于是 $m=n+p$，其中 p 可以是任何正整数．于是上面不等式就成为

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

另一方面，注意 $S_{n+p}-S_n$ 就是 $a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$，因此本准则成立．

我们要注意，一方面，这一准则是级数收敛的必要充分条件，因而它在级数理论分析方面有着极为重要的作用．但另一方面，要用它来判断一些具体级数的敛散一般说来仍是很困难的，正如用数列的收敛准则来判断具体数列是否收敛时一样地困难．所以这一准则不能代替我们以后要讲的级数的一些具体判别法．

思 考 题

定理 2 能否包括定理 1？

练 习

1．利用级数收敛的准则，证明下列级数的收敛性：

(1) $a_0+\dfrac{a_1}{10}+\cdots+\dfrac{a_n}{10^n}+\cdots$，$(|a_n|<10)$

(2) $\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{2^n}+\cdots$

2．证明若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,\quad (n=1,2,\cdots)$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛．

1.3 正项级数 本段我们讨论一种最简单的级数——正项级数，其特点是级数的每一项 $a_n\geqslant 0$($n=1,2,\cdots$；严格讲，这样的

级数应是非负项级数，不过遵从传统，我们仍称它为正项级数）．我们首先讨论这种级数，因为它在应用中是重要的，更因为正项级数的许多规律性常常在讨论到一般的级数时可以取作借鉴．

1. 对于正项级数，我们必须注意它的特殊点．这时

$$S_1=a_1,\qquad S_2=a_1+a_2,\qquad S_3=a_1+a_2+a_3,\cdots$$

是一个单调不减的数列，如果它有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 必存在，从而 $\sum a_n$ 收敛；如果它无上界，则必 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，从而 $\sum a_n$ 发散．因此我们得到一个简单的规律：

正项级数收敛的准则 正项级数 $\sum a_n$ 收敛的必要充分条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界．

运用这个规律，我们可以导出判别正项级数敛散的一个重要法则：

比较判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数，且 $a_n\leqslant b_n$，则若 $\sum b_n$ 收敛，那么 $\sum a_n$ 也收敛；若 $\sum a_n$ 发散，那么 $\sum b_n$ 也发散．

这是很明显的．因为，既然 $a_n\leqslant b_n$，所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k=S'_n$$

如果 $\sum b_n$ 收敛，因而 $\{S'_n\}$ 有上界，从而 $\{S_n\}$ 也有上界，于是 $\sum a_n$ 也收敛；如果 $\sum a_n$ 发散，因而 $\{S_n\}$ 无上界，从而 $\{S'_n\}$ 也无上界，于是 $\sum b_n$ 也发散．证毕．

我们已经看到过，正项等比级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots,\quad (a>0)$$

当 $0\leqslant r<1$ 时收敛，$r\geqslant 1$ 时发散；又看到过，调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 是发散的．以这些（或者别的已知收敛或发散的）级数为基础，运用比

较判别法，就可以判别另一些正项级数的敛散性.

下面我们看几个例子.

例1 证明级数

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2^2+a}+\frac{1}{2^3+a}+\cdots+\frac{1}{2^n+a}+\cdots,\ (a>0)$$

收敛.

证 因为

$$\frac{1}{2^n+a}<\frac{1}{2^n}$$

而$\sum\frac{1}{2^n}$收敛，所以$\sum\frac{1}{2^n+a}$也收敛.

例2 证明级数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

是发散的.

证 这个级数的各项超过了下面这个级数的相应的项:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$$

而后者是发散的，因为它是调和级数 $\sum\frac{1}{n}$各项乘以$\frac{1}{2}$的结果.

例3 证明级数

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

收敛.

证 因为

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdots n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$是公比 $r=\frac{1}{2}$的等比级数，所以是收敛的. 根据比较判

别法，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$也收敛，从而在它前面增添一项1的级数也收敛.

在比较判别法中，如果把条件$a_n\leqslant b_n$改为$a_n\leqslant cb_n$，其中c是某一正常数，则判别法结论显然仍成立.

2. 比较判别法运用起来有时还嫌不太方便. 但从它可以推导出另一个常用的判别法来：

比值判别法 设$\sum a_n$是一正项级数($a_n>0$)，又设

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

则当$l<1$时，$\sum a_n$收敛；当$l>1$时，$\sum a_n$发散(如果正好$l=1$，则本判别法失效).

证 1) 先设$l<1$. 既然当$n\to+\infty$时$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to l$，就是说，当n充分大后，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$与l将充分接近. 我们取一个常数r，使$l<r<1$. 因此，当n充分大后，例如，从第N项起，将有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r \text{ 或即 } a_{n+1}<ra_n, \quad (n\geqslant N)$$

详细地说，就有

$$\begin{aligned}&a_{N+1}<ra_N\\&a_{N+2}<ra_{N+1}<r^2a_N\\&a_{N+3}<ra_{N+2}<r^3a_N\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

然而正项等比级数

$$a_Nr+a_Nr^2+a_Nr^3+\cdots, \quad (r<1)$$

是收敛的，所以级数

$$a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\cdots$$

也是收敛的. 在它前面再添加$a_1+a_2+\cdots+a_N$不会改变它收