21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学

（经济管理类及文科专业用）

GAODENG SHUXUE

主编　刘　坤　许定亮

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学

（经济管理类及文科专业用）

主　编　刘　坤　许定亮
副主编　高　枫　王忠英

南京大学出版社

内容提要

本书是作者根据教育部经济管理类本科数学基础课程教学基本要求，在多年从事经济管理及文科专业高等数学教学基础上编写而成的.内容包括函数、极限和连续、一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数和微分方程，并增加了大量利用微积分处理经济问题的例子和习题，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力.

本书适合作为经济管理类以及其他文科专业的本科生教材，也可作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘坤主编.一南京：南京大学出版社，2009.7

21世纪应用型本科院校规划教材.经济管理类及文科专业用

ISBN 978-7-305-06239-1

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学一高等学校一教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第103778号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　　　邮　编　210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　21世纪应用型本科院校规划教材
书　　名　高等数学(经济管理类及文科专业用)
主　　编　刘　坤　许定亮
责任编辑　吴　汀　　　编辑热线　025-83686531

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京人民印刷厂
开　　本　787×960　1/16　印张22　字数360千
版　　次　2009年7月第1版　2009年7月第1次印刷
印　　数　1～3000
ISBN 978-7-305-06239-1
定　　价　39.00元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　Sales@NjupCo.com(销售部)

前言

高等数学是一门基础数学课程.它的基本概念、基本理论和解决问题的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到广泛应用.

本书是作者根据教育部关于经济管理类本科数学基础课程教学基本要求,在多年从事经济管理类等专业高等数学教学基础上编写而成的.

按教育部的基本要求,本书对高等数学的传统内容进行了整合和删减,使其更符合经济管理类专业的实际,更便于学生接受.在难易程度上充分考虑了高等教育大众化背景下的学生特点和教学特点,既删除了较艰深的理论推导,突出了应用性,又保持了理论体系的连贯性和完整性,以便为学生继续深造和考研提供保障.本书注意讲清用数学知识解决实际问题的基本思想和方法,着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力.

本书由刘坤教授和许定亮副教授任主编,高枫副教授和王忠英副教授任副主编.其中第1章、第7章由高枫副教授编写;第2章、第9章由许定亮副教授编写;第3章、第4章、第5章、第6章、第10章由刘坤教授编写;第8章由王忠英副教授编写.刘坤教授撰写编写大纲与统稿.

在本书的编写过程中得到了常州工学院教务处领导和理学院领导的大力支持,同时也得到了南京大学出版社的大力支持,在此向他们深表谢意!

由于编者水平有限,书中错误疏漏之处在所难免,望广大读者和同行专家批评指正.

编　者

2009年6月

目　录

第1章 函 数

关于函数概念，在中学数学中我们已经有了初步了解，本章将对函数的概念和性质做进一步的讨论.

§1.1 函 数

1.1.1 变量与区间

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量. 例如：身高、产量、收入、成本等等. 这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取固定的值，我们称为常量，例如圆周率 π 是个不变的量；另一类量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称为变量，例如，一天中的气温、生产过程中的产量都是不断变化的，它们都是变量.

常量与变量的确定依赖所研究的过程，同一个量，在不同的过程中可能是常量，也可能是变量. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，而在较长时间内则可能是变量.

常量也可看作一种特殊的变量.

2. 区间与邻域

变量的变化范围一般是一个集合. 设有变量 x，a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 集合

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. 集合

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称作闭区间，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间的端点,这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似再有:

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$和$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,$(a,b]$和$[a,b)$都称为半开区间.

以上所述区间都称为有限区间.数 $b-a$ 称为这些区间的长度.此外还有所谓无穷区间,例如区间

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$

(记号$-\infty$读作负无穷大,记号$+\infty$读作正无穷大).

设 δ 是任一正数,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称作以点 a 为中心以 δ 为半径的点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

显然 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$也可记为 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$.

如不强调邻域的半径,则以点 a 为中心的邻域记作 $U(a)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心的 δ 邻域,记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$,即

$$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

1.1.2 函数的概念及其表示法

1. 函数的基本概念

在我们所研究的某个变化过程中,常会同时出现几个变量,这些变量并不是彼此独立变化的,而是相互影响和相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化.如果这些变化是依照某一规则的,则我们常说这些变量之间存在着函数关系.

定义 1.1 **设 x,y 是两个变量,x 取值于实数集合 X,如果对于每一个 $x\in X$,按照某一规则,f 都可以唯一地确定一个 y 值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为**

$$y=f(x),x\in X.$$

其中,x 称为自变量,y 称为因变量,自变量 x 的变域 X 称为函数的定义域,因变量 y 的变域

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数的值域，f 称为函数的对应法则.

由函数定义可知，一个函数 $y=f(x)$ 是由如下三个因素确定的，称为函数的三要素，即：

(1) 定义域 X，即自变量的取值范围；

(2) 对应法则 f；

(3) 函数值域 Y，即函数值的集合 $Y=\{y|y=f(x),x\in X\}$.

对于两个函数，如果它们的定义域、对应法则和值域都相同，那么这两个函数就是等同的. 例如，函数 $f(x)=x^3\sin^2x+x^3\cos^2x$ 和 $g(x)=x^3$ 就是等同的. 又如函数 $y=x^2,x\in(1,2)$ 和 $y=x^2,x\in(-1,2)$，虽然有相同的对应法则，但定义域不同，所以它们是不同的函数.

当自变量 x 取定义域中某个值 x_0 时，对应的因变量的值称为函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 例如对函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，有 $f(0)=1$，$f(u+1)=\dfrac{1}{1+(u+1)^2}$，$y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，等等.

在定义 1.1 中，对自变量 x 的一个确定的取值，y 只能有唯一一个值与之对应，我们称这种函数为单值函数，简称函数. 若对自变量 x 的一个确定的取值有多个 y 值与之对应，则称这种函数为多值函数. 多值函数不是定义 1.1 意义下的函数. 例如，由关系式 $y^2=x$ 所确定的 y 关于 x 的函数就是一个多值函数. 对这一多值函数，可将其分解成两个单值函数：

$$y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty) \text{ 和 } y=-\sqrt{x},x\in[0,+\infty).$$

在研究函数时，必须注意函数的定义域. 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

(1) 对于实际应用问题中的函数，要根据实际问题中变量的实际意义确定.

例如用边长为 $a(a>0)$ 的正方形铁片，从四个角各剪去边长为 x 的小正方形，做成一个无盖铁盒，其体积 V 是 x 的函数，即

$$V=x(a-2x)^2,$$

考虑本问题的实际意义，函数的定义域应为 $X=\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$. 此种情况一定要在函数表达式后表示出函数的定义域.

(2) 对于用数学式子抽象表示的函数,这种函数的定义域通常是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合.对这种约定下的函数,我们可以不必表示出定义域,而把函数用“$y=f(x)$”来表达.例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$.

例 1 确定函数

$$y=\frac{\sqrt{5-x}}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$$

的定义域.

解 要使表达式有意义,必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ 5-x\geqslant 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases},\text{解得}\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\leqslant 5\\ x\geqslant -2\end{cases},$$

所以,函数的定义域为

$$X=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,5].$$

2. 函数的表示方法

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法.

(1) 表格法.

表格法是用表格形式来表示自变量和因变量的函数关系,它在生产实际中应用广泛.例如,某市场一年中各月毛线的零售量(单位千克)列表如下:

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 Q	91	85	50	43	12	10	9	23	123	154	178	123

它表示出毛线的零售量 Q 随月份 x 而变化的函数关系,其定义域为 $X=\{1,2,\cdots,12\}$,值域为 $\{91,85,50,43,12,10,9,23,123,154,178,123\}$.

(2) 图形法.

图形法表示函数就是用坐标平面上的图形来表示函数.坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in X$ 的图形(图 1-1).

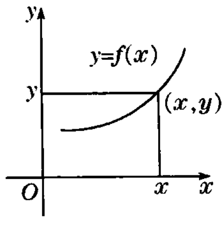

图 1-1

(3) 解析法.

解析法就是将自变量与因变量之间的关系用方程表示.这些方程通常称为函数的解析表达式.例如:$y=\cos x-\lg(1+x)$,$y+\sin y=x^2\cos x$ 和 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ 1-x & x<0\end{cases}$ 都是函数的解析表达式.它们分别代表了三种不同类型的函数:

① 函数 $y=\cos x-\lg(1+x)$,y 已由 x 的解析式直接表示出来,称这种形式的函数为显函数.

② 函数 $y+\sin y=x^2\cos x$,y 没有由 x 的解析式直接表示出来,称这种形式的函数为隐函数.一般地,若一个函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定的,并且 y 未被解成 x 的显函数的形式,则称这个函数为隐函数.

显函数也可被看成一种特殊的隐函数.将隐函数化成显函数的过程,称为函数的显化.但并不是所有的隐函数都能化成显函数.例如,隐函数 $y+\sin y=x^2\cos x$ 就不能显化,而隐函数 $y+2ye^{2x}-5=0$ 就可以显化.

③ 函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ 1-x & x<0\end{cases}$,$y$ 在定义域的不同范围中具有不同的解析式,这种函数称为分段函数.应该注意的是,分段函数是用几个解析式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

例 2 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

称为符号函数,它是一个分段函数.它的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$,它的图形如图 1-2 所示.对任何实数 x,有 $|x|=\operatorname{sgn} x\cdot x$.

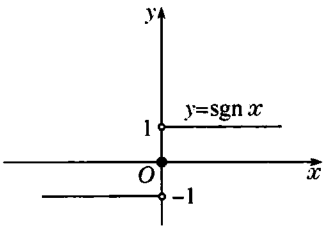

图 1-2

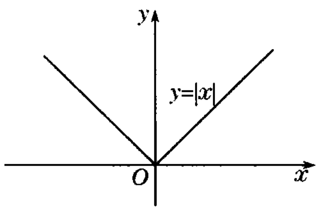

图 1-3

例 3 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，它的图形如图 1-3 所示，这个函数称为绝对值函数.

§1.2 函数的几种特性

1.2.1 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义，如果存在一个数 M，对于所有的 $x\in X$，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界的. 如果存在一个数 m，对于所有的 $x\in X$，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上是有下界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有上界也有下界，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有下界而无上界.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上是无界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$，故函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 对于有界函数，其界正数 M 的取法不唯一，对于 $f(x)=\sin x$，可取任何大于 1 的数作为 M，而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于区间 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界，如可取正数 $M=1$，而有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对 $x\in(1,2)$ 都成立.

容易证明，函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

1.2.2 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义，

(1) 若对任意 $x\in X$，有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 X 上

的奇函数.

(2) 若对任意 $x\in X$,有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 X 上的偶函数.

例如,$y=x^3$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$y=x^2$ 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,$y=\sqrt{1-x^2}$是$[-1,1]$上的偶函数.

奇函数的图像关于原点对称,即如果点 $P(x,f(x))$在函数的图像上,则点 $P'(-x,-f(x))$也在此图像上(如图 1-4).

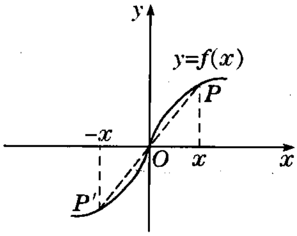

图 1-4

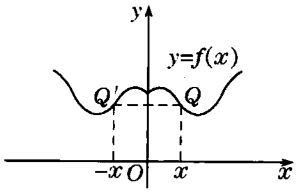

图 1-5

偶函数的图像关于 y 轴对称,即如果点 $Q(x,f(x))$在函数的图像上,则点 $Q'(-x,f(x))$也在此图像上(如图 1-5).

容易证明下列结论:

(1) 两个奇函数的代数和仍是奇函数,两个偶函数的代数和仍是偶函数.

(2) 两个奇函数的乘积是偶函数,两个偶函数的乘积是偶函数,一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

1.2.3 函数的单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$在集合 X 上有定义,区间 $I\subset X$,如果对于 I 上的任意两点 x_1,x_2,

(1) 当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$在区间 I 上是单调增加的.

(2) 当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $y=f(x)$在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.单调增加的函数图像如图 1-6,单调减少的函数图像如图 1-7.

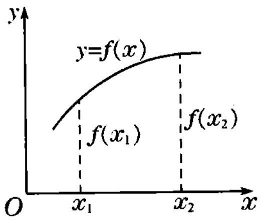

图 1-6

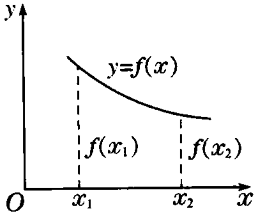

图 1-7

函数的单调性与所讨论的函数的区间有关.例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内并不是单调函数,但它在$(-\infty,0)$内是单调减少的,在$(0,+\infty)$内是单调增加的;函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的,它是单调函数.

1.2.4 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$在集合 X 上有定义.如果存在一个正数 T,对任意 $x\in X$ 有$(x+T)\in X$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$是以 T 为周期的周期函数.满足 $f(x+T)=f(x)$的最小正数 T 称为 $y=f(x)$的最小正周期,简称为周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$是以 π 为周期的周期函数.

对于周期为 T 的函数 $y=f(x)$,只要作出函数在一个周期上的图像,则整个函数的图像就可以将该周期上的图像向左或向右作平移得到.

并非每个周期函数都有最小正周期.

例如,狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{Q}^c\end{cases}$,任何正有理数都是它的周期.因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

§1.3 反函数

在函数的定义中,有两个变量:一个是自变量,一个是因变量,它们地位不同.但在实际问题中,谁是自变量,谁是因变量,并不是绝对的,而要根据所研究的问题而定.在一定的条件下,函数的自变量与因变量的地位是可以交换的,这样就可得到一个新的函数,这个函数通常叫做原来函数的反函数.

定义 1.7 设给定函数 $y=f(x)$,定义域为 X,值域为 Y.如果对 Y 中的

任一 y 的值，按关系式 $y=f(x)$，总有唯一的一个 $x\in X$ 与之对应，这样就得到一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in Y.$$

因习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以总是将 $y=f(x)$ 的反函数表示为

$$y=f^{-1}(x),x\in Y.$$

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(图 1-8).

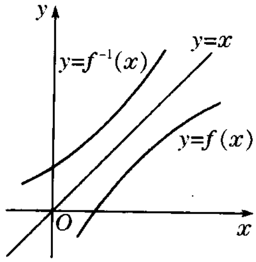

图 1-8

例 1 求函数 $y=2x-3$ 的反函数.

解 由 $y=2x-3$ 解得 $x=\frac{y+3}{2}$，故 $y=2x-3$ 的反函数为 $y=\frac{x+3}{2}$.

值得注意的是，并非每个函数都具有反函数. 例如函数 $y=x^2,x\in X=(-\infty,+\infty)$，对其值域中的每个 $y\in(0,+\infty)$，在 X 中有 x 的两个值 $x=\pm\sqrt{y}$，使得 $x^2=y$，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 没有反函数. 那么，在什么条件下函数 $y=f(x)$ 才具有反函数呢？有如下的结论.

定理 1.1 **若 $y=f(x)$ 在其定义域上单调，则 $y=f(x)$ 存在反函数，且其反函数也是单调的.(证明略)**

例如，$y=x^2,x\in(0,+\infty)$ 存在反函数 $y=\sqrt{x},x\in(0,+\infty)$；$y=x^2,x\in(-\infty,0]$ 存在反函数 $y=-\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$.

§1.4 基本初等函数及图形

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六种函数.

下面给出这些函数的图形和一些主要的性质.

(1) 常量函数 $y=c$(c 为常数). 常量函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是偶函数且有界，其图形如图 1-9.

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实数). 幂函数的定义域依 α 的取值不同而不同，