

计 算 方 法

南 京 航 空 学 院

1975.11.

前言

随着工农业生产发展和国防建设的需要，提出了大量的数学计算问题。“计算方法”就是研究计算这些数学问题的方法。由于电子计算机的使用日益广泛，学习“计算方法”就显得更为重要。只有掌握了各类数学问题的计算方法，才能更好地使用计算机，解决生产和科学实验提出的各种问题。可以毫不夸大地说，没有计算方法，电子数字计算机就只能给小学生用做算术题了。

这份讲义着重选择一些电子数字计算机上常用的行之有效的计算方法予以介绍，全书共分七章。

第一、二、四章介绍了插值、数值积分以及常微分方程初值问题的数值解，阅读这一部分只需要工科院校高等数学中微积分与常微分方程的基础，第三、五、六章介绍了线性代数方程组的解法，矩阵特征值及特征向量的计算以及抛物型偏微分方程的差分方法；有关线代数基础知识我们分别在第三章与第五章的开头作了介绍，第七章对样条函数作了一个简单介绍。

除了第五、六两章外，其它各章内容今年元、七月间在南昌320厂的一个“计算机应用”学习班上都作过介绍，这次的补充修改工作是应331厂与608所之约举学习班而进行的，这次修改过程除参考了各章所附的一些参考书目外，还参考了近年来南京大学、复旦大学以及中国科学院计算技术研究所等兄弟单位的有关讲义和资料。

这份讲义能与331厂与608所的同志们见面，我们感到非常高兴，由于编者实践经验少，水平低，难免有错误，希望使用的同志能给我们提出批评和建议，以便改进。

编者

1975年国庆前夕于南京。

目 录

第一章、插值与曲线拟合

§ 1.1、引言	1
§ 1.2、线性插值与二次插值	3
§ 1.3、均差插值多项式(牛顿插值多项式)	7
§ 1.4、拉格朗日插值多项式	12
§ 1.5、关于数值微分	15
§ 1.6、线性经验公式	16
§ 1.7、多项式经验函数的正规方程组	18
§ 1.8、应用的例	19

第二章、数值积分

§ 2.1、引言	23
§ 2.2、几个简单的求积公式的回顾	24
§ 2.3、奥列	28
§ 2.4、等距内插求积公式	32
§ 2.5、龙贝法(Romberg法)、三角形法	38

第三章、线性代数方程组的解法

§ 3.1、矩阵的一些简单知识	44
§ 3.2、行列式概念和它的一些性质	52
§ 3.3、逆矩阵的概念及几种特殊类型的矩阵	59
§ 3.4、 n 维向量空间	63
§ 3.5、正定矩阵的概念	72
§ 3.6、主元消去法	74
§ 3.7、普通迭代法	87
§ 3.8、塞德尔迭代法(高斯——塞德尔迭代法)	93
§ 3.9、追赶法求实三对角线方程组的解	96
§ 3.10、实对称正定带型阵线性方程组的直接解法	99

第四章、常微分方程初值问题的数值解

§4.1. 引论	105
§4.2. 应用台劳级数求方程的数值解	107
§4.3. 尤拉法(折线法)	108
§4.4. 改进的尤拉法(梯形法则)	112
§4.5. R-K型方法(龙格——库塔型方法)	116

第五章、矩阵特征值及特征向量的计算

§5.1. 线性变换与相似矩阵	121
§5.2. 正交矩阵及其性质	125
§5.3. 特征值问题的提出	126
§5.4. 矩阵特征值与特征向量的一些概念	129
§5.5. 求矩阵特征值的迭代法(乘幂法)	129
§5.6. 迭代法求矩阵特征值的应用及改进	139
§5.7. 求实对称矩阵全部特征值的雅可比(Jacobi)方法	146

第六章、抛物型偏微分方程的差分方法

§6.1. 差分格式的建立	158
§6.2. 热传导方程混合边值问题的差分解法	168
§6.3. 热传导方程初值问题的差分解法	176
§6.4. 半显式格式	177
§6.5. 二维热传导方程的交错方向隐式方法	179
§6.6. 拟线性抛物型方程的预报——校正方法	182

第七章、样条插值简介

§7.1. 引论	184
§7.2. 三次样条插值	186

第一章、插值与曲线拟合

§ 1.1. 引言、

在生产 and 科研中，函数是表达现实空间物质运动规律的数量关系的。实际问题遇到函数 $y=f(x)$ ，虽然从原则上说，它在某个区间 $[a, b]$ 上是存在的。但是，通常是通过实验观察得到的，因此也只能知道在 $[a, b]$ 区间上一系列 x_i 上的相应函数值， $y_i=f(x_i)$ 。对于 x 的其他值， $y=f(x)$ 的变化情况是不知道的，也就是说我们往往只知道函数 $y=f(x)$ 的一张表格 (x_i, y_i) ， $i=1, \dots, n$ ；用它来研究函数的性质是不方便的，也不能知道表格以外的点上的值，若函数能用公式表示，即使是近似的，对于我们研究、分析函数的性质、计算表中没有列出的函数值都是非常有用的。问题是，这种近似式有没有？若有，我们怎么来构造？

例1，某号飞机模型进行风洞吹风试验。对同一攻角 α 测得不同 M 数所对应的阻力系数 C_x 值如下表

M	0.527	0.727	0.807	0.927	0.973	1.005	1.066
C_x	0.01075	0.01219	0.01188	0.01426	0.01668	0.02214	0.02895

现在的问题是：怎样根据上表求出 M 与 C_x 的近似关系式，从而计算出表中未给出的 M 值处相应的 C_x 值：

插值法就是为了解决上面提出的，根据已经给出的函数在一些点上的值寻求函数近似表达式的的一种方法。

由于代数多项式是简单的函数，人们很早就用它去近似地表示复杂的函数，代数插值法就是以代数多项式作为工具，去近似地表达函数的方法，既然寻求的代数多项式能近似地表达用列表法给出的函数关系，当然要求在表中给出的自变量点上，代数多项式的值与相应的表中给出的函数值相等，插值多项式的构造就是从这一点出发的。现用数学语言表述如下：

设 $y=f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，已知它在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互不相同的点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上取值 $y_0, y_1, \dots, y_n$ 。若代数多项式 $P(x)$ 在点 x_i 上满足 $P(x_i)=y_i$ ， $(i=0, 1, \dots, n)$ ，则称 $P(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的插值多项式。 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是插值点或基点，包括基点的区间 $[a, b]$ 称为插值区间。 $y=f(x)$ 称为

被插函数，它通常是列表函数。插值法就是求满足上述条件的多项式 $P(x)$ 的方法。

用 $P(x)$ 求出的插值区间内不是基点的 x 上的值就作为被插函数在该点的近似值。

在区间 $[a, b]$ 上用 $P(x)$ 近似 $f(x)$ ，其几何意义就是通过 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 作代数曲线 $y=P(x)$ 来近似曲线 $y=f(x)$ ，如图 1 所示。当 $n=1$ 时，曲线就是通过 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 的直线。当 $n=2$ 就是通过 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的抛物线。

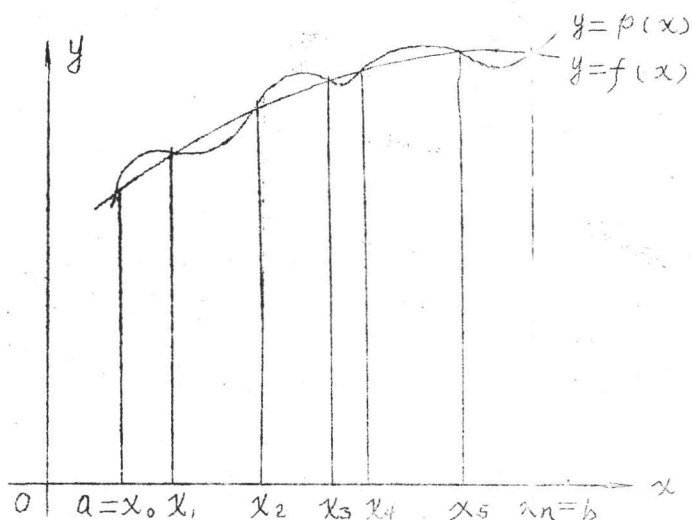


图 1

由图可见，在基点上， $P(x_i)=f(x_i)$ ， $i=0, 1, \dots, n$ 。而在其他点上会有误差，令

$$R(x) = f(x) - P(x).$$

$R(x)$ 称为插值多项式的余项，它表示了用 $P(x)$ 来近似表示 $f(x)$ 的近似程度。一般来说 $|R(x)|$ 越小则近似程度就越好。插值法就是要求满足上述条件的多项式 $P(x)$ 及其余项。

用插值多项式来近似地表示被插函数，不仅因为 $f(x)$ 是由一张表格给出而需要，有时在 $f(x)$ 的解析式子已经给出，但计算起来相当复杂，工作量极大，而又无法简化该式，也可以根据该函数在一些基点上的值构造插值多项式来近似表达它，以减少工作量。用插值多项式来表达函数也是数值微分，数值积分，微分

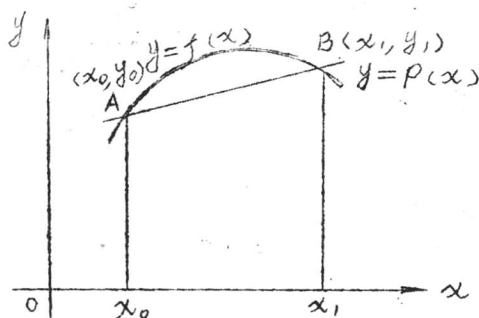
方程数值解法等的基础。可以说它是计算方法中最基本的方法，在实际工作中，经常会遇到这类问题。插值多项式的形式多种多样，本章我们着重介绍数字电子计算机上常用的两种：牛顿均差插值多项式与拉格朗日插值多项式。关于插值问题的进一步讨论可参考书目〔1〕，〔2〕，〔3〕。

§1.2. 线性插值与二次插值：

1. 线性插值：

已知函数 $f(x)$ 在实 x_0, x_1 上的值为 y_0, y_1 ；要求多项式 $P_1(x)$ ，使得 $P_1(x_0) = y_0$ ， $P_1(x_1) = y_1$ 。

显然通过 $A(x_0, y_0)$ ， $B(x_1, y_1)$ 两点的直线方程就满足上述要求（参2）



参 2

由平面解析几何知道，过 A, B 两点的直线方程是：

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.$$

即：

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

所以

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (1-1)$$

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) \quad (1-2)$$

$P_1(x)$ 是 x 的一次插值多项式（显然 $P_1(x_0) = y_0$ ， $P_1(x_1) = y_1$ ），这种插值法叫做线性插值。

倘若 x 在区间 (x_0, x_1) 之外， x 离 x_0 或 x_1 不远，也可用 $P_1(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的近似值。为了区别这两种情况，前者叫内插，

后者叫外推。当 $|x_1 - x_0|$ 很小 (或问题的要求不高时) 线性插值是经常使用的。

2. 二次插值 (抛物插值) :

线性插值只利用 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 一对值来求 $f(x)$ 的近似值, 由误差分析可知误差较大。为了减少误差, 我们设想再利用户一对值来求 $y = f(x)$ 的近似值, 其结果比线性插值要好些。因此现在的问题就是已知在点 x_0, x_1, x_2 上自对应的值为 y_0, y_1, y_2 , 要求一个多项式 $P_2(x)$, 使得 $P_2(x_0) = y_0, P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$ 。

前已看到, 过两点的插值多项式是一次式, 可以设想过三点的插值多项式是二次式, 设为 $P(x) = ax^2 + bx + c$ 。在几何上这是过 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的一条抛物线。现在的问题是求系数 a, b, c 使满足 $P_2(x_0) = y_0, P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$, 当然可以由联立方程

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \end{cases}$$

来解出 a, b, c 。这样作既比较麻烦, 且不利于在插值问题中作深入的理论研究, 因此我们由另一途径来求处理这一问题。

前面已得到了满足 $P_1(x_0) = y_0, P_1(x_1) = y_1$ 的一次插值多项式 $P_1(x)$ 。

现在把所要求的 $P_2(x)$ 分为两项, 一项为 $P_1(x)$, 剩下的一项称为 $P_2^*(x)$, 则

$$P_2(x) = P_2^*(x) + P_1(x)$$

由 $P_1(x_0) = y_0, P_1(x_1) = y_1$, 要使 $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1$, 必然要 $P_2^*(x_0) = P_2^*(x_1) = 0$, 故可取 $P_2^*(x) = A(x - x_0)(x - x_1)$ 。问题归结为求 A 。

由 $P_2(x_2) = y_2 = P_2^*(x_2) + P_1(x_2)$ 得:

$$\begin{aligned} A &= \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{y_2 - y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}.$$

故有：

$$\begin{aligned} p_2(x) = & y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \\ & + \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}(x - x_0)(x - x_1) \quad (1-3) \end{aligned}$$

显然

$$p_2(x_0) = y_0, \quad p_2(x_1) = y_1, \quad p_2(x_2) = y_2,$$

所以 $p_2(x)$ 为我们所要求的二次插值多项式。分别把 y_0, y_1, y_2 前面的系数合并可得

$$\begin{aligned} p_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \quad (1-4) \end{aligned}$$

这是二次插值多项式的另一种形式。二次插值又称抛物插值。

其余项为 $R_2(x) = f(x) - p_2(x)$

例1. 由表

M	0.527	0.727	0.807
C _x	0.01075	0.01219	0.0118

求 $C_x(0.7)$ 的值

解：由 $x_0 = 0.527, \quad x_1 = 0.727, \quad x_2 = 0.807;$
 $y_0 = 0.01075, \quad y_1 = 0.01219, \quad y_2 = 0.0118;$

现用式 (1-4) 来求 $p(0.7)$ 。

由于：

$$\begin{aligned} x - x_0 &= 0.7 - 0.527 = 0.173, \\ x - x_1 &= 0.7 - 0.727 = -0.027, \\ x - x_2 &= 0.7 - 0.807 = -0.107, \\ x_0 - x_1 &= 0.527 - 0.727 = -0.2, \\ x_0 - x_2 &= 0.527 - 0.807 = -0.28, \\ x_1 - x_2 &= 0.727 - 0.807 = -0.08, \end{aligned}$$

代入 (1.4) 式，可得：

$$p(0.7) = \frac{(-0.027) \times (-0.107)}{(-0.2) \times (-0.28)} \times 0.01075 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{(0.173) \times (-0.107)}{(0.2) \times (-0.08)} \times 0.01219 + \\
 &+ \frac{(0.173) \times (-0.027)}{(0.28) \times (+0.08)} \times 0.0118 \\
 &= 0.0005546 + 0.0141014 - 0.0024605 \\
 &= 0.0121955.
 \end{aligned}$$

$\therefore C_x(0.7) = 0.0121955.$

例2、由某飞机的对称翼型下列横坐标处的纵坐标数据(见下表), 计算当横坐标为0.05时的纵坐标值

x_m	0.0381	0.0843	0.146
y_m	0.0365	0.0535	0.0593

解: 问题归结为求 $y_m | x_m = 0.05$ 的值,

我们用三次插值公式(1-4)

由于 $x_0 = 0.038$, $x_1 = 0.0843$, $x_2 = 0.146$;
 $y_0 = 0.0365$, $y_1 = 0.0535$, $y_2 = 0.0593$,
 $x = 0.05$,

∴ 有:

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= 0.05 - 0.038 = 0.012, \\
 x - x_1 &= 0.05 - 0.0843 = -0.0343, \\
 x - x_2 &= 0.05 - 0.146 = -0.096, \\
 x_0 - x_1 &= 0.038 - 0.0843 = -0.0463, \\
 x_0 - x_2 &= 0.038 - 0.146 = -0.108, \\
 x_1 - x_2 &= 0.0843 - 0.146 = -0.0617.
 \end{aligned}$$

以之代入(1.4)式, 可得:

$$\begin{aligned}
 p(0.05) &= \frac{(-0.0343) \times (-0.096)}{(-0.0463) \times (-0.108)} \times 0.0365 + \\
 &+ \frac{(0.012) \times (-0.096)}{(0.0463) \times (-0.0617)} \times 0.0535 + \\
 &+ \frac{(0.012) \times (-0.0343)}{(0.108) \times (0.0617)} \times 0.0593 \\
 &= 0.02404 + 0.02157 - 0.00366 \\
 &= 0.04195.
 \end{aligned}$$

§ 1.3. 均差插值多项式 (牛顿插值多项式)

前面, 从最简单的插值问题推出, 二次插值多项式。我们看到: 两个插值点可求出一度插值多项式 $P_1(x)$, 而三个插值点可求出二次插值多项式 $P_2(x)$ (它有三个待定系数), 一般说, 当插值点增加到 $n+1$ 个时, 所求的插值多项式次数也不会超过 n 次, 其一般形式如下:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (1.5).$$

因此, 插值问题的一般提法是:

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互不相同的点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上取值 $y_0, y_1, \dots, y_n$, 要求一个次数不超过 n 次的多项式 $P_n(x)$, 使

$$P_n(x_j) = y_j, \quad (j=0, 1, \dots, n).$$

现在的问题是用什么方法求出满足此条件的 $P_n(x)$, 一种做法是根据给出的条件从 (1.5) 中求出 $n+1$ 个待定系数 $a_0, a_1, \dots, a_n$, 这样作需要解 $n+1$ 个联立方程, 计算复杂。另一种做法就是上节推导二次插值多项式的方法。我们采用后一方法。为此, 对 (1.3) 作进一步分析, 从中找出规律性的东西。

1. 均差的定义、性质及均差表:

公式 $P_1(x)$ 中出现的 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, 实际上是函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的平均变化率, 我们称它为 $f(x)$ 的一阶均差 (或称差商), 记作

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};$$

类似地, 有:

$$f(x_0, x_2) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

公式 $P_2(x)$ 中的二次因子的系数 $\frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$ 实际上就是:

$$\frac{f(x_0, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_1}.$$

也就是说是一阶均差的均差, 记作

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_1}.$$

称为 $f(x)$ 的二阶均差 (或二阶差商)。

一般地, 可定义 n 阶均差为:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0} \quad (1.6)$$

可用归纳法证明各阶均差与点的排列次序无关, 即:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \quad (1.7)$$

这种性质称为均差的对称性, 证明的推导极烦琐, 从略。

从均差的对称性, 可知:

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0);$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_2, x_1) = f(x_2, x_1, x_0) =$$

$$= f(x_2, x_0, x_1) = f(x_1, x_2, x_0) =$$

$$= f(x_1, x_0, x_2),$$

.....

为了计算各阶均差, 通常采用下列均差表 (以 $n=4$ 为例)

x_i	$f(x_i)$	一阶均差 $f(x_{i-1}, x_i)$	二阶均差 $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$	三阶均差 $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	四阶均差 $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3, x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

(表 1.1)

2. 均差插值多项式及其余项.

引入均差的定义后, 公式 $P_1(x)$ 及 $P_2(x)$ 的规律就更明显了, 这时 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 可写成:

$$P_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0),$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1).$$

事实上, 从均差定义极易得到以上的插值多项式, 并且可推广到 $n+1$ 个插值点的情况, 并得到相应的余项。为此, 除前述 $n+1$ 个插值点 x_j 外需再给出一个点 $x \neq x_j$, 它可以是插值区间 (a, b) 上的任一实数。

据均差的定义，可知：

$$(1.8) \begin{cases} f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0) & (1.8.1) \\ f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + f(x, x_0, x_1)(x - x_1), & (1.8.2) \\ f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + f(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2), & (1.8.3) \\ \dots \dots \dots \\ f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_n). \end{cases}$$

兹用 (1.8.2) 代入 (1.8.1) 可得：

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1). \quad (1.9)$$

即：

$$f(x) = p_1(x) + R_1(x), \quad R_1(x) = f(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

类似地，用 (1.8.3) 代入 (1.9)，可得：

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + f(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

即：

$$f(x) = p_2(x) + R_2(x), \quad R_2(x) = f(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

由此，可总结出一般规律：每增加一个插值点，只要将 (1.8) 中高阶的均差代入前一公式，依此类推，可得：

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots \\ \dots (x - x_{n-1}) + f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (1.10)$$

记

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (1.11)$$

$$\text{则 } R_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (1.12)$$

$p_n(x)$ 称为 n 次均差插值多项式 (或 n 次牛顿插值多项式)，

$R_n(x)$ 称为 n 次均差插值多项式的余项。

(1.10) 称为均差插值公式 (或牛顿插值公式)

引入记号： $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ ，

则，余项可表为：

$$R_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \omega(x). \quad (1.13)$$

必须指出，(1.10)、(1.11) 及 (1.12) 是插值理论最基本的结果。

从上面的讨论，可以看出：均差插值多项式在结构上有一个重要特点 (也是它的最大优点)，即每增加一个插值点，只要多计算一项，而 $p_n(x)$ 的各项系数恰好是各阶均差值，很有规律，且它们可互

均差表中第一条斜线上找到。

3、实例：

例1、给定 $f(x)$ 的函数表如下，作插值多项式并计算 $f(0.596)$ 的值。

解：

(1) 根据给定函数表作均差表如下：

k	x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	$0.596 - x_k$
0	0.40	0.41075	1.1160				0.196
1	0.55	0.57815	1.1860	0.2800			0.046
2	0.65	0.69675	1.2757	0.3588	0.197	0.034	-0.054
3	0.80	0.88811	1.3841	0.4336	0.214	0.034	-0.204
4	0.90	1.02652	1.5156	0.5260	0.231		
5	1.05	1.25386					

(2) 决定插值多项式的阶：

∵ 从均差表看出，四阶均差是常数，故五阶均差必为零。

因此可作四阶插值多项式： $P_4(x)$

(3) 选定插值点、写出 $P_4(x)$ 。

为了计算 $f(0.596)$ ，选靠近 $\bar{x} = 0.596$ 的三个点 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 作插值点。

则有：

$$P_4(x) = 0.41075 + 1.1160(x-0.4) + 0.2800(x-0.4)(x-0.55) + 0.197(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) + 0.034(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80).$$

因此，

$$f(0.596) \approx P_4(0.596).$$

(4) 补充 $(\bar{x} - x_k)$ 列， $(k=0, 1, 2, 3)$ ：

∵ $P_4(0.596) = P_4(\bar{x})$ 的计算中，需要用到 $\bar{x} - x_k$ ($k=0, 1, 2, 3$)。因此将 $\bar{x} - x_k$ 写在均差表的最后一列。

(5) 计算 $P_4(0.596)$ ：

为了充分利用中间结果以节省运算时间及机器内存，我们对多项式的计算采用下列程序：

为了确切起见以一四次多项式为例阐明如下：(其思想适用于一般多项式)。

设 $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

则可改写为:

$$F(x) = \{[(a_4x + a_3)x + a_2]x + a_1\}x + a_0.$$

仿此, 我们可将计算 $R_4(\bar{x})$ 的程序改写为:

$$\begin{aligned} R_4(\bar{x}) &= \{[0.034(\bar{x} - 0.80) + 0.197](\bar{x} - 0.65) + 0.28\}(\bar{x} - 0.55) + 1.116 \\ &\quad (\bar{x} - 0.40) + 0.41075 \\ &= \{[(0.034)(-0.204) + 0.197](-0.054) + 0.28\}(0.046) + 1.116 \\ &\quad (0.196) + 0.41075 \\ &= 0.63192 \end{aligned}$$

4、均差与导数的关系、余项的进一步研究、

前曾指出:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \\ &= f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \omega(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

但在某些场合应用(1.13)作估计相当不便, 也往往不够准确, 为此, 我们寻求余项的其它表示形式。

据微分学中值定理, 可知:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

也就是说, 在一定的条件下, 一阶均差与一阶导数有如上非常紧密的联系。

一般而言, 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 n 阶导数, 则有:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (1.14)$$

式中 $\xi \in (a, b)$,

证明从略, 可参考书目[2]

据(1.14)可知:

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, b)$$

以之代入(1.13), 可得:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \quad (1.15)$$

(1.15)式称为带导数的余项; 而(1.13)称为带均差的余项。

应用(1.15)估计 $R(x)$ 一般比(1.13)较好, 但仍有困难; 困难在于对 $f^{(n+1)}(x)$ 的估计。

如果

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1},$$

则有

$$\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|. \quad (1.16)$$

5. 关于余项极小化问题:

由前述讨论可知: 余项大小与插值点的选择有密切关系。

如果函数 $f(x)$ 由表给出, 如何选择插值点使余项最小?

由于

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|, \quad (1.17)$$

可见, 应选插值点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 离插值点 x 最近, 则可使:

$$\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \text{ 最小}$$

*当 $f(x)$ 由分析式子表达时, 余项极小化问题的研究可参考书目{1}

§1.4. 拉格朗日插值多项式:

1. 问题的提出:

上节讨论的均差插值多项式, 虽然计算很有规律, 实际计算中也常用, 但有一个缺陷, 即不够直观。

兹介绍另一种形式的插值多项式。

已知: $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的值为 $y_0, y_1, \dots, y_n$ 。

试求一次数不高于 n 的插值多项式 $L_n(x)$ 使得

$$L_n(x_j) = y_j, \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (1.18)$$

我们希望对于新的形式的插值多项式能一眼看出条件(1.18)成立。

2. 拉格朗日插值多项式的构造:

不难看出, 如果能将均差插值多项式(1.11)中的系数(用均差表示的), 换为用已知参数 x_j, y_j 来表示, 则可得出一种新的形式的插值多项式, 而这是能够办得到的。回顾一下前述讨论可知(1.2)式即可起到这个作用。

事实上, 由(1.11)式有:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

而 (1.7) 有,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} y_j.$$

用 (1.7) 代入 (1.11) 经过计算和整理, 可得:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) y_j, \quad (1.19).$$

式中 $\omega_j(x)$ 为次数不超过 n 的多项式:

$$\omega_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \quad (1.20).$$

显见, $\omega_j(x)$ 满足下列条件:

$$\omega_j(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k=j. \\ 0, & \text{当 } k \neq j. \end{cases} \quad (1.21).$$

从而由 (1.21) 可一眼看出条件 (1.18) 成立.

形如 (1.19) 的插值多项式我们称之为拉格朗日多项式.

为了与均差插值多项式加以区别, 我们用 $L_n(x)$ 来表示, 即:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} y_j \quad (1.22).$$

或

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (1.23).$$

(1.22) 或 (1.23) 通称 n 次 (或 $n+1$ 点) 拉格朗日插值多项式.

若取 n 个插值点, 则相应的插值多项式称为 n 点插值多项式.

3. 关于插值多项式的唯一性:

必须指出, 通过 $n+1$ 个不同点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 取值相同的插值多项式只有一个, 意即:

$$L_n(x) \equiv P_n(x).$$

证明从略, 可参考书目 [2].

还应指出, 插值多项式 $P_n(x)$ 的次数可能小于 n , 例, 当 $y_0 = y_1$ 时,