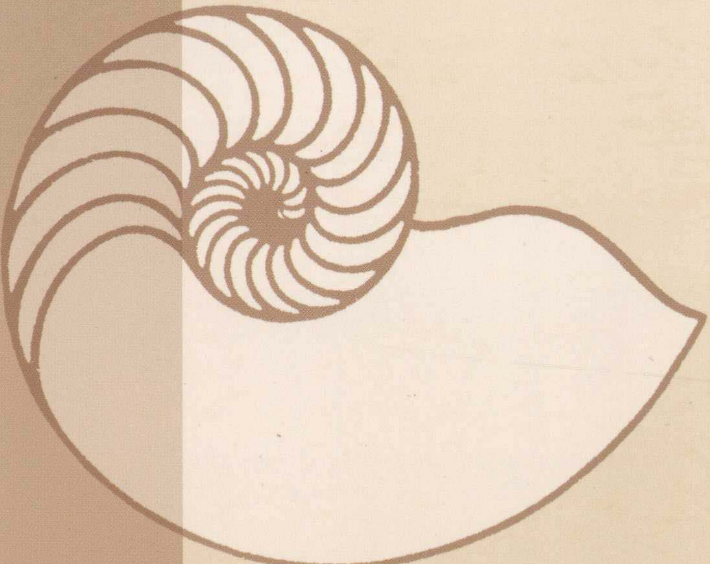
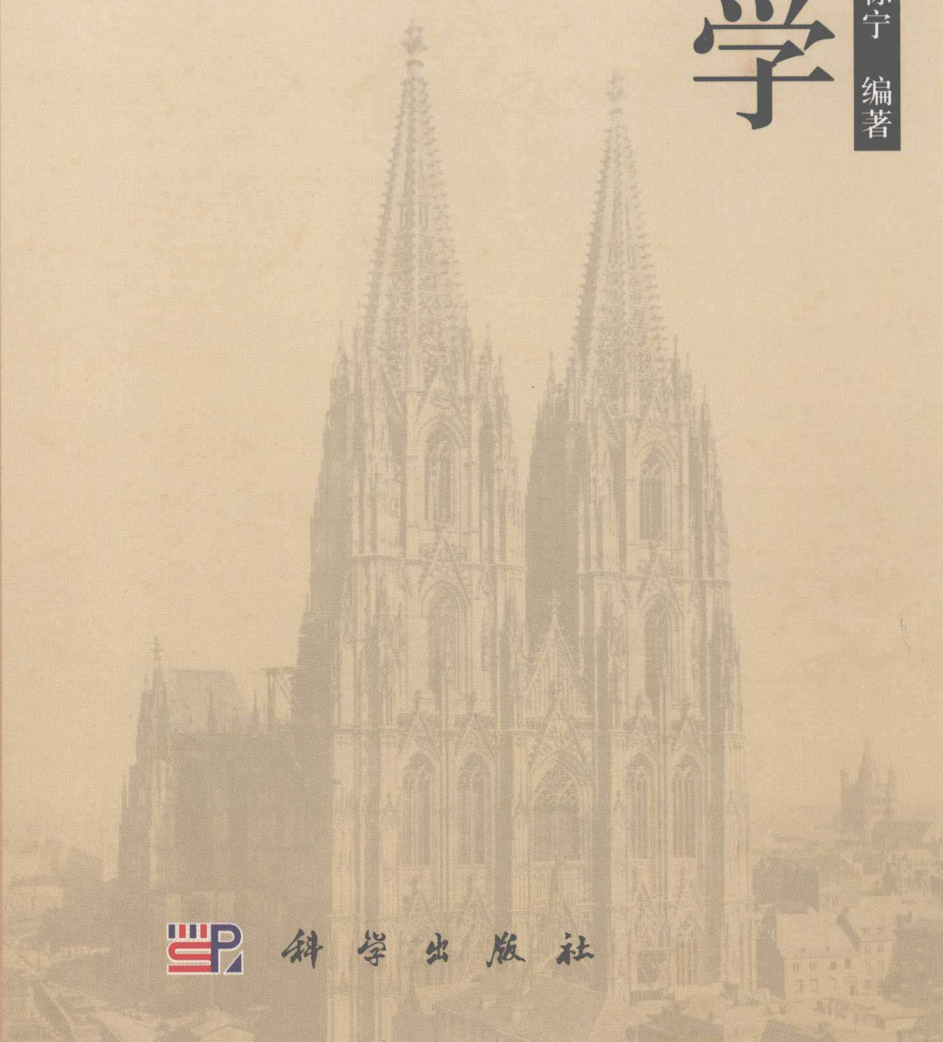
# 艺术数学

马传渔 邵进 李栋宁 编著





科学出版社

# 艺 术 数 学

马传渔　邵　进　李栋宁　编著

科 学 出 版 社
北 京

# 内 容 简 介

全书共5章，包括数列的极限、函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分等数学内容，涉及音乐、美术、雕塑等各个艺术学领域，以及股市艺术、分形艺术、建筑艺术等“艺术”知识.

本书以“艺术”中的数学元素为鸿线，发掘和建立艺术与数学彼此之间知识的融合、理念的沟通和思维的创新.

本书采用直观明了的几何论证和通俗易懂的逻辑推理的方法，强调知识性、趣味性、鉴赏性和可读性.

本书可作为高等院校艺术系“数学”课程的教材，或文科其他各专业的数学参考书，也可作为提高学习兴趣、增强文化素养的课外读物.

**图书在版编目(CIP)数据**

艺术数学/马传渔,邵进,李栋宁编著. —北京：科学出版社, 2012
ISBN 978-7-03-036160-8

Ⅰ. ①艺… Ⅱ. ①马… ②邵… ③李… Ⅲ. ①数学-关系-艺术
Ⅳ. ①O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字 (2012) 第296573号

责任编辑：相 凌／责任校对：张怡君
责任印制：阎 磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年12月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012年12月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：207 000
**定价：26.00元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

数学家兼哲学家罗素说:“数学,从正确的观点来看,它不仅是真理,而且是至上的美丽——一种严峻的美、雕刻的美,没有向弱点做任何的迁就,没有音乐和绘画那样的装饰,但却有令人惊异的纯真,具有最伟大的艺术品所显示的完美.”奥斯瓦尔德·斯宾格勒的见解是:“雕塑家、画家、作曲家的形式感觉,本质上是数学感.”弗格森在他的非凡的塑像中传递出数学的美. 1990 年,他指出:“数学既是艺术形式又是科学,我相信把数学沿着美学渠道传达给一般观众是行得通的.”正如他们所说,艺术作品与数学有密不可分的联系. 艺术诠释了数学内涵,使数学变得通俗易懂;数学开拓了艺术蕴涵,使艺术变得绚丽多彩. 艺术究源于数学,数学赋灵感于艺术. 艺术创作具有相应的科学性,科学研究具有一定的艺术性,数学与艺术结下了不离不弃的姻缘. 希望本书的问世有利于数学研究和艺术探索中的发明、发现和发掘.

20 世纪 80 年代,美国就开始实施以提高人民的科学素养为主要目标的科学技术教学计划,这个科学素养指的是公众必须具备的科学、数学与技术基本知识和具有用科学方法进行思维与解决各类问题的能力. 本书借助千姿百态的插图中数学元素的闪光点,运用直观的几何论证和通俗易懂的逻辑推理,层次分明地在全书共 5 章的内容里适时地插入初等数学和微积分的内容,并介绍两种常用的数学方法——反证法和探索归纳法,以期能达到诠释数学与艺术完美结合的初步目标,从而激发思维,提高兴趣. 本书内容丰富,引人入胜,便于自学,便于接受. 本书旨在陶冶人们成为传送生活、知识和欢笑的人.

本书强调趣味性,从古代经典艺术作品到 21 世纪旷世杰作,涉及音乐、美术、建筑、雕塑等各个艺术学领域. 书中所展现的各类艺术作品中,不仅出现费马点、黄金数、黄金图形、斐波那契数、正多边形、正多面体、几何变换等初等数学知识,还用到对数螺线、极坐标、数项级数、一元函数微积分、谐波叠加原理、傅里叶级数、三维和四维空间、分形直至抽象的拓扑学的内容. 读者不必为书中如此丰富的数学内容而感到惊奇,因为不仅古代的艺术家,如阿基米德、丢勒、达·芬奇等都是数学家,而且近代艺术家兼数学家的更是不乏其人. 例如,荷兰雕刻家埃舍尔擅长用拓扑变形作画,被人们称为举世无双的艺术大师. 更令人难以置信的是,艺术家、数学家和股票分析大师结合在一起能预测股市的走势;当今闻名于世的科学家霍金把时间与三维空间彼此间的关系,通畅直观地描绘在埃舍尔杰作“三叶形结的带”

上疾驶的火车. 古往今来,艺术家和数学家们用他们的睿智和灵感,遨游在艺术和数学交汇的知识海洋里.

编写本书是尝试,是改革,是创新. 本书是南京大学金陵学院教学改革的新作品. 书中的实例和作品令人遐思,启发人们去创造,去实践;书中的内容开阔人们的眼界,吸引人们去学习,去思考;书中的理念和思路锤炼人们教养有素,那就是"完美的音乐和高度的和谐".

本书是一本教材,同时,也是一本通俗读物,对提高人们的学习兴趣和对艺术作品的鉴赏能力可能会有帮助;它会使人们通晓数学和艺术中美的原则,它们是如此相似;它会给人们的艺术活动、艺术创作带来新的理念、新的方法和更加丰富的创作源泉.

黄金分割与黄金数在中外艺术史诸多名作中都有呈现,是艺术家们所遵循和追求的表现美的原则之一. 满足 $F_1=1,F_2=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant1)$ 的斐波那契数列 $\{F_n\}$,随着 $n$ 的逐渐增大,比值 $F_{n+1}/F_n$ 越来越接近于黄金数,这一结论的证明可见第 1 章数列极限的内容. 在第 2 章中介绍函数、函数的极限和连续性. 声乐中音量、音高与简谐运动 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的振幅 $A$、周期 $T=2\pi/\omega$ 有关,音质取决于简谐运动谐波的叠加. 一元函数 $y=f(x)$ 的图形为平面上的一条曲线. 图形的对称美受到艺术家们的青睐;"无穷" 的艺术与数学上的无穷大量是否具有相似之处,这些可见第 2 章中的内容. 黄金图形在艺术作品中占有一席之地,三个全等的黄金矩形可以组成正十二面体和二十面体. 第 3 章中展示的正多面体和星形多面体的巧妙组合的美术作品给予人们极其丰富的空间想象能力. 通过第 3 章导数和微分的学习和计算,不仅能导出大自然迷人螺线的方程,而且能获得对数螺线保角性的证明. 第4章介绍用微分法描绘函数 $y=f(x)$ 的图形,并且通过三维空间直角坐标系的引入,逐步将二维平面推广到高维空间,由浅入深地导出四维超立方体的图形. 由于视幻觉的存在,第4章中所展示的"不可能" 图形都是名作,值得人们深思和鉴赏;默比乌斯带、三叶形结的带、拓扑变形的《画廊》与《阳台》以及高维图形,足以证明艺术和数学具有交叉板块知识的亮点. 第 5 章中雪花曲线的周长是无限的,但其面积是有限的. 通过不定积分和牛顿 - 莱布尼茨公式的学习,能计算位于 $Ox$ 轴下方函数 $y=f(x)$ 图形的面积. 本章中镶嵌艺术、盖销数学和雕塑艺术的内容能使人们拓展知识,了解艺术家们的数学造诣,明白当今艺术发展的点滴动态.

本书每章末都附有20道思考探究题,题型新颖多样,内容丰富且不拘泥于初等数学或高等数学,旨在对教材的了解、理解、掌握和运用. 正如本书末的结束语中所说:艺术与数学的逐步融合能启迪人们的睿智,让读者在愉快中求知,在欣赏中提高,在遐思中创新.

本书能与读者见面,得益于南京大学金陵学院王殿祥院长的厚爱和指导,感谢

教务主任王均义教授和基础部主任钱钟教授的指导和支持，并对文科数学组青年教师的认真校对致以谢意.

由于编者水平所限和资料不足，书中难免有纰漏和不足之处，请同行和读者不吝赐教.

编　者

2012 年 8 月

# 目　　录

# 第 1 章　黄　金　数

黄金数是希腊数学家欧多克斯(Eudoxus)发现的，然而，“黄金”两个字则是意大利著名科学家、艺术家达·芬奇最早冠以的美称，黄金数被当作美的信条，统治着当时欧洲的建筑和艺术，并且这种影响一直延续到今天. 用 $\varphi=0.618\ 033\ 988\cdots$ 和 $\Phi=1.618\ 033\ 618\cdots$ 表示两个黄金数.

1.1 节引入黄金分割与黄金数的含义及黄金点的作法. 黄金分割与黄金数有广泛的应用：人体的黄金分割点能烘托出人的体型美，艺术作品中的黄金分割点屡见不鲜. 1.2 节从《维纳斯》和《蒙娜丽莎》两幅作品中，透彻说明黄金数的应用，道出艺术与数学之间深入的关系. 1.3 节从园林艺术花瓣或叶子的数目引入通常所指的斐波那契数列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,…，该数列中的数称为斐波那契数，同时还给出了数列极限的各种计算方法. 1.4 节中的定理 1.6 深刻阐明了黄金数与斐波那契数之间的关系. 本节介绍的探索、归纳法在各个领域中都是常用的. 另外，本章介绍的斐波那契数和定理 1.6 在股票市场上的应用是值得一读的.

## 1.1　黄金分割与体型美

意大利数学家菲披斯注意到数学界不屑一顾的“冷门”——人体的黄金分割. 他认为：一般人在人体肚脐上下的长度比值为 0.618，或者与此比值相近是人体上下结构的最优比例. 此外，他发现，人体结构还有三个黄金分割点：上肢的分割点在肘关节、肚脐以下的分割点在膝盖、肚脐以上的分割点在咽喉. 如果一个人各部分的结构比都符合这个黄金分割律，那么他的体型就是最标准的. 这一发现为评价体型的优劣提供了科学依据.

公元前 5 世纪，哲学家毕达哥拉斯认为：“凡是美的东西，都具有共同的特性，这就是部分与部分和部分与整体之间的协调一致.”

假定线段 $AB$ 上有一个分点 $C$，如图 1.1 所示. 要使部分与部分和部分与整体之间协调，则有

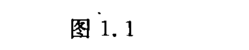



图 1.1

$$\frac{\text{一部分}}{\text{另一部分}}=\frac{\text{另一部分}}{\text{整体}},$$

即

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

不妨令 $AB=1, AC=x\ (0<x<1)$，则

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1},$$

整理得 $x^2+x-1=0$，解得

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\,033\,988,$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-1.618\,033\,988\cdots\text{(舍去)}.$$

线段 $AB$ 的这一分割称为黄金分割，点 $C$ 称为黄金分割点，简称黄金点. 比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金分割比，简称黄金比或黄金数.

记 $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，则

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}=\varphi. \tag{1.1}$$

再记 $\Phi=\frac{1}{\varphi}$，则得

$$\Phi=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618\,033\,988.$$

若将(1.1)取倒式，于是有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\varphi},$$

即

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{AC}=\Phi. \tag{1.2}$$

因此，也称 $\Phi$ 为黄金数.

由 $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 知

$$\begin{cases}\Phi-\varphi=1,\\ \Phi\cdot\varphi=1.\end{cases} \tag{1.3}$$

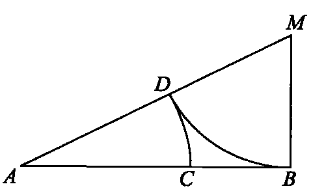


图 1.2

下面介绍黄金点的作法.

公元前 300 年左右，欧几里得就用圆规和直尺找出了线段 $AB$ 的黄金分割点 $C$，如图 1.2 所示.

设 $AB=1$，过 $B$ 作 $AB$ 的垂线 $MB$，取 $BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，连接 $AM$，在 $AM$ 上截取 $DM=BM=\frac{1}{2}$，再在

$AB$ 上截取 $AC=AD$，由于

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AB}=\frac{AM-\frac{1}{2}AB}{AB}$$

$$=\frac{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618,$$

因此，点 $C$ 就是 $AB$ 的黄金分割点.

黄金数在生活中有广泛的应用. 在生活中穿衣时，

$$\frac{\text{下装长}}{\text{上装长}+\text{下装长}}=\varphi\approx 0.618.$$

下面描画了两种风格稍异的四层女式接裙(图 1.3)，你觉得哪一种更为可取呢？当然，你会选右边逐层加深的那种. 在那个设计中，每一层与其上一层深度的比都恰为黄金分割比.

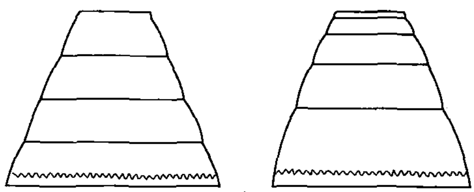


图 1.3

购买衣服时，

$$(\text{高档价}-\text{低档价})\times 0.618+\text{低档价}$$

是合理的价格.

人的体温是 37 ℃，因为 37 ℃×0.618≈23 ℃，所以空调的温度调到 23 ℃，人感到最舒服.

彼得·脱普钦说："在柏拉图的时代里，提出了黄金分割比例 $\Phi$，这个比例是所有数学关系中最具约束力者，目前也被视为解答宇宙物理学之论."毕达哥拉斯兄弟选了 5 个指定的星球作为标志，标志的每一部分与其次小的部分均维持黄金比例的关系. 16 世纪，约翰尼斯·开普勒写到黄金分割时说，它实际上描述了宇宙万物，并且特别以"相似来自相似"作为神所创造的宇宙万物的象征.

两个黄金比 $\Phi$ 和 $\varphi$ 同三角函数具有下面的关系：

(1) $2(\sin 45°)^2=\Phi-\varphi$；

(2) $4(\sin 18°)^2=1-\varphi$；

(3) $4(\cos 36°)^2=1+\Phi$.

早在16世纪欧洲文艺复兴时期，德国画家丢勒有一幅名作，画面上仅有一双手，但手的中心位置却不在画面中央，而是在靠左下3/5(接近0.618)处(图1.4).

丢勒(1471—1528)是德国宗教改革运动时期著名的油画家、版画家、雕塑家、建筑家，也是一名著名的数学家．他的著作《圆规直尺测量法》，无论在艺术界还是数学界，都产生过很大的影响．他发明的幻方具有深刻的历史意义和现实价值，堪称稀世珍品(图1.5).

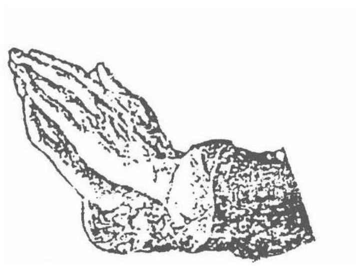


图1.4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

图1.5

什么叫幻方呢？$n$阶幻方就是把$1,2,3,\cdots,n^2$排成$n$行$n$列的一个数表，使得每行每列以及两条对角线上$n$个数之和都等于$\frac{1}{2}n(n^2+1)$，并称此数为幻和．丢勒给出的是4阶幻方，幻和为34.

我国古代数学家称幻方为纵横图．在公元80年成书的《大戴礼记》中就有了3阶幻方的记载，南宋数学家杨辉已构造出直至10阶的幻方．

在丢勒的4阶幻方中，中心的4个数之和为

$$10+11+6+7=34(\text{幻和}).$$

四角上的4个数之和

$$16+13+4+1=34(\text{幻和}).$$

下边一行中间的两个数15，14合在一起，恰为丢勒作此幻方的年份1514年．第一行4个数的平方和加上第三行4个数的平方和是

$$16^2+3^2+2^2+13^2+9^2+6^2+7^2+12^2=748,$$

它恰好等于第二行4个数的平方和加上第四行4个数的平方和．这一切绝不是偶然的巧合，这是艺术家丢勒深厚的数学功底的见证．

在20世纪雕刻家M. C. Escher(爱舍尔)的下面两幅作品(图1.6，图1.7)中，$C$都是线段$AB$的黄金点，即

$$\frac{AB}{AC}\approx 1.68\approx \Phi.$$

A C B

图 1.6

《水洼》,M. C. Escher 的木刻画,作于 1952 年. 太阳在水中的倒影,树木在水面上的反射. 图中的点 $C$ 是线段 $AB$ 的黄金分割点,点 $C$ 垂直向上正对着粗壮有力的树干. 画面上留下的脚印和车轮印具有浓厚的生活气息

B C A

图 1.7

M. C. Escher 于 1931 年的石板画作品,意大利南部卡拉布里亚《罗马帝国》. 画面上粗壮雄伟树干所在处的点 $C$ 恰好是线段 $AB$ 的黄金分割点

2011 年 4 月 29 日,英国威廉王子和平民女子凯特在英国伦敦威斯敏斯特大教堂举行盛大婚礼,成为英国王室瑰丽的花朵. 美国艺术家乔治·维尔希耗时 80

小时制作一幅威廉-凯特蚀刻素描肖像,如图 1.8 所示.


图 1.8

在这幅肖像图中,$AB=73.5$ cm,$AC=48$ cm,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{73.5}{48}\approx1.53,$$

比较接近黄金数 $\Phi\approx1.618$. 点 $C$ 对上去的位置正好是凯特笔直高挺的鼻尖之处,不管这是否是艺术家刻意安排的黄金分割点,还是偶然的巧合,现实的效果赋予人们的是如此美妙和绚丽.

## 1.2 《维纳斯》、《蒙娜丽莎》与黄金分割

维纳斯(Venus)女神是美的象征,原件是石雕,收藏在法国巴黎卢浮宫,如图 1.9 所示.

图 1.9

在美术文献中，维纳斯的正式名称是“米洛斯的阿佛洛狄忒”(Aphrodite of Melos). 有时，也把她叫做“米洛斯的维纳斯”.

阿佛洛狄忒是古代希腊神话中的女神，最初被人们尊为丰收女神、海的女神和航海保护者，后来变成爱和美的女神. 她曾与特洛伊战役中的一位英雄结合，生下了罗马人的祖先埃涅阿斯.

维纳斯原是古代罗马神话中的丰收女神和园艺女神. 随着希腊神话融入罗马神话，维纳斯与阿佛洛狄忒合二为一. 罗马帝国的凯撒大帝自称是埃涅阿斯的后代，尊奉维纳斯为罗马人的祖先.

在后人眼里，维纳斯就是阿佛洛狄忒，所以同一座雕像，可以叫做“米洛斯的阿佛洛狄忒”，也可以叫做“米洛斯的维纳斯”.

古代希腊和古代罗马认为维纳斯貌美无比，在美术作品中多次出现维纳斯的形象，其中最著名的一件是在希腊米洛斯岛发现的. 为了区别起见，称之为“米洛斯的阿佛洛狄忒”，即“米洛斯的维纳斯”.

米洛斯岛是希腊南部爱琴海里的一个小岛. 1820 年，人们在米洛斯岛的山洞里发现了这座维纳斯雕像. 它是大理石圆雕，高 2.04 米，是公元前 2 世纪的作品，发现时雕像双臂已经残缺. 从底座铭文知道，雕像的作者是阿历山德罗斯.

这座雕像虽然不见双臂，但仍然显得美丽动人，姿态万千，充满青春活力. 美术家们曾经多次试图加接双臂，但是添加结果总不能与原来的姿势协调一致，于是不如不加，任其自然.

米洛斯的维纳斯雕像为何具有如此迷人的魅力?

其优美的姿态和高雅的气质通过形体表现出来. 古代希腊人认为，如果形体符合数学上的黄金比，就会显得特别美丽.

在图 1.10 中对米洛斯的维纳斯雕像进行了几何尺寸分析. 从图中可以看出，这座雕像的尺寸比例有多处符合黄金比.

如图 1.10 所示，

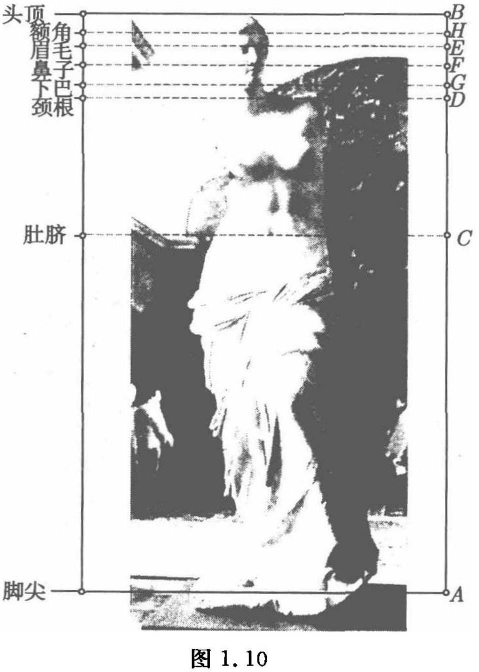



图 1.10

$$\frac{AC}{AB}=\varphi, \quad \frac{CB}{AC}=\varphi,$$

$$\frac{CD}{CB}=\varphi,\quad \frac{DB}{CD}=\varphi,$$

$$\frac{DE}{DB}=\varphi,\quad \frac{EB}{DE}=\varphi,$$

$$\frac{DF}{DE}=\varphi,\quad \frac{FE}{DF}=\varphi,$$

$$\frac{FG}{FD}=\varphi,\quad \frac{BH}{BE}=\varphi,$$

其中各条线段端点与维纳斯身体部位的对应关系是 $A$(脚尖),$B$(头顶),$C$(肚脐),$D$(颈根),$E$(眉毛),$F$(鼻子),$G$(下巴),$H$(额角).

维纳斯的美是一种理想的美,维纳斯雕像中的黄金比是理想的身体比例.

同样,达·芬奇的《蒙娜丽莎》名画中也有多处符合几何中的黄金比(图 1.11).

在图 1.11 中,

$$AB=\varphi AD,$$

其中黄金比 $\varphi\approx0.618$.

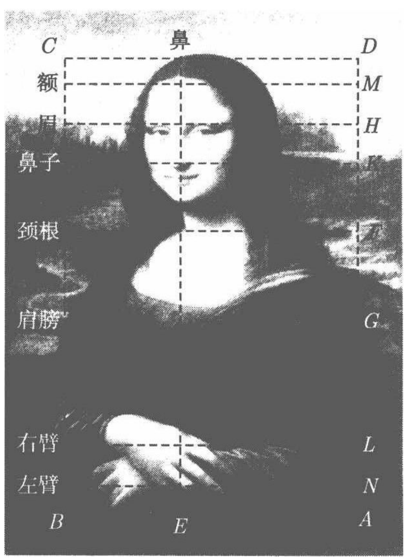



图 1.11

图 1.11 中的各条水平虚线也都是根据黄金比画出的.从上到下,这些虚线的右端点与人体部位的对应关系顺次是 $M$(额角),$H$(眉毛),$K$(鼻子),$F$(颈根),$G$(肩膀),$L$(右臂),$N$(左臂).

各个关键点按照以下长度关系确定:

$$AF=\varphi AD,\quad AG=\varphi AF,\quad FH=\varphi FD,\quad FK=\varphi FH,$$

$$GL=\varphi GA,\quad HM=\varphi HD,\quad LN=\varphi LA.$$

美是一种感觉，因人而异，因时而异.黄金比是一种数量关系，放之四海而皆准.中世纪德国数学家、天文学家开普勒曾指出:“在几何学中有两件瑰宝:‘一件是毕达哥拉斯定理，另一件是黄金分割律，并宣称黄金分割是造物主赐予自然界传宗接代的美妙之意’.”16世纪威尼斯数学家帕乔里称黄金分割为“神赐的比例”.希腊古城雅典有一座用大理石砌成的神庙，在大殿中央有一尊雅典娜女神像，是用象牙黄金雕成的，姿态比传说中的仙女还要美.经专家研究发现，她从脚跟到肚脐间的距离与身高的比值正好是黄金数 $\varphi$.

英国大画家斐拉克曼的名著《希腊的神话和传说》一书中，共绘有96幅美人图，每一幅画上的美人都可谓是妩媚无比、婀娜多姿.经仔细一量，身材的比例也符合黄金比 $\varphi$. 可见，维纳斯女神、蒙娜丽莎的身材与黄金数 $\varphi$ 都有不解之缘，这就是数学的和谐美.

一些美学家和哲学家把美妙的黄金比 $\varphi$ 加以绝对化，这是不太恰当的.因为形式的美的比例并非仅仅是黄金比. 从本质上来说，艺术行为不是一定要服从科学道理的.正如符合黄金分割原理的绘画是艺术，反其道而行之的绘画也是艺术.英国哲学家哈奇生(1694—1749)曾指出:“在对象中的美，用数学的方式来说，仿佛在于一致与变化的复比例;如果诸物体在一致上是相等的，美就随变化而异;如果在变化上是相等的，美就随一致而异.”这种“异”就是数学的奇异美.

## 1.3 斐波那契数的闪光点

斐波那契(Leonardo Fibonacci)是中世纪的一名数学家，斐波那契数列通常指的是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots.$$

该数列中的每一项称为斐波那契数.

这个数列的特点是从第3个数开始，每个数都是前面两个数之和.例如，$2=1+1,3=1+2,5=2+3,8=3+5,13=5+8,21=8+13,\cdots$.

在园林艺术中，花瓣(或叶子)的数目经常是斐波那契数. 例如，延龄草、百合和蝴蝶花的花瓣是3瓣;野玫瑰、樱桃、蓝花楼菜、金凤花和飞燕草是5瓣;血根草、大波斯菊、翠雀花是8瓣;金盏草是13瓣;紫菀是21瓣;雏菊是34瓣;……(图1.12)有趣的是，曾经有过一位学者耐心地数过一朵重瓣芍药花的花瓣，惊奇地发现它有233个花瓣.正好与 $F_{13}=233$ 这个数一致.另一位学者也数过一个花朵，刚好是157瓣.但他又发现，其中有13瓣与其他144瓣有显著差异，它们是特别长并卷曲向内.这种情况表明这朵花的花瓣数目是由 $F_7=13$ 和 $F_{12}=144$ 合成的.