《信息、控制与系统》系列教材

随机控制

郭尚来 编著

清华大学出版社

《信息、控制与系统》系列教材

随 机 控 制

郭尚来 编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

随机控制理论是控制理论的一个重要分支，已渗透到各个领域。本书着重介绍随机控制理论的基础知识，包括随机过程、随机系统模型、最小方差控制、最优状态估计和最优随机控制等内容。选材注意基础性和实用性，基本内容论述严谨，理论表述由浅入深，由简到繁，符合工科学生的认识规律。每章都配有例题和习题。

本书适合作为工科大学本科生和研究生教材，也可供科技工作者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机控制/郭尚来编著. —北京：清华大学出版社，1999

信息、控制与系统系列教材

ISBN 7-302-03555-5

Ⅰ. 随… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 随机控制-教材 Ⅳ. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14324 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者：北京国马印刷厂印刷

发行者：新华书店总店北京发行所

开　本：787×1092 1/16　印张：16.5　字数：386 千字

版　次：1999 年 11 月第 1 版　　1999 年 11 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-03555-5/TP・1954

印　数：0001～3000

定　价：18.00 元

出 版 说 明

《信息、控制与系统》系列教材是一套关于信息、控制和系统学科的基本理论和应用技术的高等学校教材。选题范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、自动化技术、传感技术、自动化仪表、系统理论、系统工程、机器人控制、智能控制、计算机应用和控制等方面。主要读者对象为自动控制、计算机、过程自动化、无线电等系科的高年级大学生和研究生,以及在这些领域和部门工作的科学工作者和工程技术人员。

信息、控制与系统科学是在20世纪上半叶形成和发展起来的新兴学科。它们的应用和影响已经遍及众多的部门和领域,贯穿其中的许多思想和方法已用于经济和社会现象的研究,而以这些学科为理论基础的自动化技术的广泛应用更是实现现代化的重要标志之一。这套系列教材,正是在这样的客观要求下,为适应教学和科研工作的需要而编写和出版的。它以清华大学自动化系近年来经过教学实践的新编教材为主,力求反映这些学科的基本理论和最新进展,并且反映清华大学在这些学科中科学研究和教学研究的成果。我们希望这套系列教材,既是在校大学生和研究生的教科书,也能为广大科技人员提供有价值的参考。

组编和出版这套教材是一次尝试。我们热忱欢迎选用本系列教材的老师、学生和科技工作者提出批评、建议。

《信息、控制与系统》系列教材编委会

《信息、控制与系统》系列教材编委会

前　言

在自然界以及人类的生产、生活中，“随机”问题到处可见。例如，天气预报就是随机问题的一个例子，一个地区的天气状况是个随机量，受到本地区和邻边地区各种因素，包括各种随机因素的影响，只有全面综合这些因素的作用，才能准确地做出天气预报。又如，股民“炒股”是人们经济生活中的一个随机问题，只有全面分析政治、经济和市场等各种随机因素的影响，掌握股票走势，做出正确预测的股民才有可能获得较好的经济收益。这些都属于随机控制中的预报、预测问题。

随着社会经济活动的更加丰富，生产和科学技术的深入发展，随机控制理论已渗透到各个领域。因此，掌握随机控制理论的基础知识，学会用“随机”的观点分析问题和解决问题，正在逐渐成为众多科技工作者必备的知识素质。

目前，随机控制理论已成为自动控制理论的一个重要分支。数字计算机的出现使得大量的计算变得简捷、快速和可能，同时也使随机控制理论的研究和应用得到了长足的进步。随机控制理论专门研究具有噪声（随机过程）扰动的动力学系统，包括随机过程、系统辨识、状态估计、随机控制和自适应控制等内容。

本书作为本科生或研究生的基础教材，仅着意于介绍随机控制理论的基础知识，包括随机过程、随机系统模型、最小方差控制、最优状态估计和最优随机控制等内容。其他如系统辨识和参数估计、自适应控制等内容，已有很多书籍论述，在本书中不再介绍。

人们往往容易对随机控制理论产生误解，以为用“均值”代替对应的随机变量，就可用确定性控制代替随机控制。实际上，完全用确定性控制系统的方法来研究随机控制系统是不够的，而且，对某些用确定性控制观点难于处理的问题，却能从随机控制的观点加以分析。目前，随机控制理论远没有像确定性控制理论那样成熟，在深度和广度上都有待进一步研究和发展。

在笔者多年教学工作中，感到对工科学生来说，除了授予基础的知识外，还要从工程角度出发，引导学生对该课程中的基本内容进行比较严格的证明，这样才能深入理解本学科内容，以便能在实际工作中灵活运用。本书在编写中注意编入一些较新的内容，例如采用随机微分方程方法处理连续时间最优估计问题，采用连续时间贝尔曼方程直接求解连续时间最优随机控制问题，而不是采用惯用的离散时间极限化间接方法。

随机控制的初学者可能会感到随机控制“定义多、理论多、公式多”，不易掌握。为此，本书在理论表述上注意了由浅入深、由简到繁的原则，如开始只介绍不带控制项的简单模型的解，然后再讨论带有控制项和带有量测方程的情况；先介绍简单的最小方差预测和控制问题，再考虑状态方程的状态估计和随机控制问题。另外，书中还举了一些例题，并有习题供读者选做，有条件的读者可在计算机上安排一些试验，这将有助于掌握和加深理解本书的内容。

一般地说，学习随机控制，读者需具备概率论、线性代数和控制原理的基本知识。本书编写中尽量在不多的概率论知识基础上介绍随机过程的基本知识，并展开其他方面的讨论。阅读本书不需确定性最优控制的基础，没有学习过最优控制的读者，会通过阅读本书，掌握随机控制的基本内容；对于已经掌握最优控制知识的读者，定会对本书内容有更深的理解，实际应用也会更加灵活。

在本书编写和教学过程中，得到同事和同学们的热情支持和帮助，在此表示谢意。由于作者水平有限，不足与疏漏之处，请读者指正。

郭尚来

1997 年 12 月于清华园

第1章 绪　　论

1.1 随机控制的研究对象

考虑确定性、线性、离散时间控制系统，可用差分方程表示为

$$
\begin{aligned}
&y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)\\
&=b_0u(k-d)+b_1u(k-1-d)+\cdots+b_mu(k-m-d)
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

式中：$y(k)$是系统输出；$u(k)$是系统输入；k是时间步数；输入到输出有d-步延迟；n和m分别为$y(k)$和$u(k)$的阶数；$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_0,b_1,\cdots,b_m$是系数。这样的控制系统也可用状态空间方程表示为

$$x(k+1)=\Phi x(k)+\Gamma u(k) \tag{1.1.2}$$

$$y(k)=\Theta x(k) \tag{1.1.3}$$

式(1.1.2)称为对象模型，式(1.1.3)称为量测(输出)模型。式中：$x(k)$是$n\times1$状态向量；$y(k)$是$m\times1$量测向量；$u(k)$是$l\times1$控制向量；Φ是$n\times n$状态转移阵；Θ是$m\times n$量测阵；Γ是$n\times l$控制阵。它们可以是时不变的，也可以是时变的。

如果控制系统所处的环境存在噪声(随机扰动)，也就是控制系统受到噪声的作用，或者说控制系统受到噪声的污染，那么在式(1.1.1)，(1.1.2)和(1.1.3)中应加入相应的项，分别得到

$$
\begin{aligned}
&y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)\\
&=b_0u(k-d)+b_1u(k-1-d)+\cdots+b_mu(k-m-d)+e(k)
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

$$x(k+1)=\Phi x(k)+\Gamma u(k)+\xi(k) \tag{1.1.5}$$

$$y(k)=\Theta x(k)+\eta(k) \tag{1.1.6}$$

式中：$e(k)$是噪声，可以是单项式，也可以是多项式；$\xi(k)$是$n\times1$模型噪声向量；$\eta(k)$是$m\times1$量测(输出)噪声向量。式(1.1.4)，(1.1.5)和(1.1.6)称为随机控制系统。

用上述同样方法可描述连续时间控制系统。考虑确定性、线性、连续时间控制系统，可用状态空间方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+Bu(t) \tag{1.1.7}$$

$$y(t)=Hx(t) \tag{1.1.8}$$

式(1.1.7)称为对象模型，式(1.1.8)称为量测(输出)模型。式中：$x(t)$是$n\times1$状态向量；$y(t)$是$m\times1$量测向量；$u(t)$是$l\times1$控制向量；t是连续时间；A，B和H分别是$n\times n$，$n\times l$和$m\times n$系数阵，它们可以是时不变的，也可以是时变的。如果控制系统中存在噪声，则在式(1.1.7)和(1.1.8)中应加入相应的项，得到

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+Bu(t)+\xi(t) \tag{1.1.9}$$

$$y(t) = Hx(t) + \eta(t) \tag{1.1.10}$$

式中：$\xi(t)$是 $n\times 1$ 模型噪声向量；$\eta(t)$是 $m\times 1$ 量测噪声向量。式(1.1.9)和(1.1.10)称为连续时间随机控制系统。

综上所述，随机控制系统就是其扰动可以用随机过程明确表示的受控动力学系统。随机控制(理论)研究的就是这种系统。它分析动力学系统和系统变量的统计特性，研究如何实现参数最优化，并对随机控制系统给定一个性能指标，寻求使性能指标最小的最优控制律。

1.2 随机控制的研究内容

以状态空间模型为例，完整的随机控制系统如图1.2.1所示。图中各部分及有关问题都是随机控制(理论)的研究内容，具体包括下列各部分：

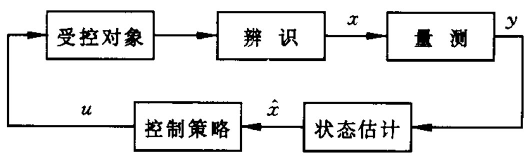

图 1.2.1 随机控制系统

(1) 分析动力学系统和系统变量的统计特性

随机动力学系统中存在噪声，噪声是一种随机过程，这就使状态向量和量测(输出)向量在噪声作用(污染)下，也变成了随机过程。随机过程不同于确定性过程，要用统计特性描述。无疑，为分析和研究随机动力学系统，了解随机动力学系统和系统变量的统计特性是必要的，这是分析和研究随机动力学系统的数学理论基础。

(2) 系统辨识和参数估计

为研究和设计随机控制系统，首先要列写出受控对象的数学表达式，如式(1.1.4)～(1.1.6)，(1.1.9)，(1.1.10)所示，确定系统结构和参数，这就是本部分内容。在某些场合，系统模型和参数可通过理论计算得到，而在另外一些场合，如对复杂的生产过程，则必须通过试验辨识方法得到。对时变系统，则要求通过在线辨识求得。辨识方法很多，用途很广，这里主要研究能够用于随机控制系统的各种在线、递推辨识方法。

(3) 状态变量的估计(滤波)

像确定性控制系统一样，对随机控制系统，人们感兴趣的是受控对象的状态向量 x，但不同的是，随机控制系统的状态向量变成了随机过程，得到的量测向量 y 也是随机过程。状态估计(滤波)方法就是由量测向量 y 求出状态向量 x，计算过程中滤掉噪声信号，得到有用的最优状态向量估计 $\hat{x}$。

状态估计与系统辨识相比较，简单地说，两者方程形式相同，不同的是，前者把参数作为已知量求出状态，后者相反，把状态作为已知量求出参数，所以它们的很多算法是相通的。

(4) 最优随机控制

最优随机控制就是利用最优状态估计 $\hat{x}$，求出一个状态反馈，实现使给定性能指标为最小的目标。这个状态反馈称为最优控制策略(律)。

完整的随机控制系统包括上述各个部分，但具体的随机控制系统不一定都包括每一

部分，某些部分可能变得简单一些。如有的系统可通过理论计算，而不需用复杂的试验辨识方法来得到系统模型。又如，有的系统的状态向量 x 可直接量测，而不需要量测方程，从而也就不需要状态估计这一部分。

系统辨识和状态估计方法除用于随机控制外，在预报预测、故障诊断、参数监视等方面也得到了广泛的应用，已有大量专著出版。

1.3 本书内容

全书共包括 6 章。

第 1 章绪论，介绍本书的概况。

第 2 章随机过程，介绍随机过程的基本知识，包括随机过程基本概念、工程中常用的随机过程、协方差函数、谱密度和随机分析等内容，这些内容是后续章节要用到的。随机过程作为数学的一个分支，内容很丰富，用途很广泛。本章围绕全书内容介绍了一些随机过程的基本知识，从事其他科技工作的初学者也可阅读。

第 3 章随机系统的数学模型，介绍随机控制常用的三种数学模型，即受控自回归平移平均模型、离散时间随机状态模型和连续时间随机状态模型，着重描述随机状态向量的统计特性。这一章还包括输入量是随机过程的系统分析。

第 4 章最小方差控制，介绍受控自回归平移平均模型的预测、最小方差控制策略和次最优控制策略等内容。

第 5 章最优状态估计，介绍卡尔曼滤波方法，它是一种在线、递推估计方法，适合在随机控制系统中应用。在这一章中，对离散时间随机状态模型，比较严格地证明和推导了卡尔曼滤波方法，并介绍了滤波、预测和平滑等各种不同情况。本章主要讨论模型噪声与量测噪声不相关情况，但也介绍了两者相关的情况。对连续时间随机状态模型，主要介绍用随机微分方程直接推导卡尔曼滤波方程的方法。

第 6 章最优随机控制，介绍用贝尔曼动态规划方法推导出最优随机控制策略(律)的方法。对离散时间随机状态模型，讨论了完全状态信息情况和不完全状态信息情况，并利用一个恒等式讨论了无噪声、存在模型噪声和存在量测噪声等不同情况。对连续时间随机状态模型，主要介绍用随机微分方程直接导出连续时间贝尔曼动态规划方程，进而再求出最优随机控制律的方法。

本书不包括系统辨识和参数估计的内容，也不包括除卡尔曼滤波之外的其他估计方法，需要学习这些内容的读者，请参阅有关书籍和文献。

1.4 随机控制理论的发展概况

随机控制系统的量测量和被控量都是随机过程，因此，随机控制理论的发展是与随机过程理论的发展密切相关的。随机过程理论产生于 20 世纪初期，是为适应物理学、生物学、通信与控制、管理科学等方面的需要而逐步发展起来的。最初在布朗运动、电话信息量和电子管的散粒效应噪声等问题的研究中取得了成果。1931 年，科尔莫戈罗夫(A. N.

Kolmogorov)奠定了随机过程的数学理论基础。1953 年，杜布(J. L. Doob)的著作论述了随机过程的数学理论。以后，有关随机过程理论和应用的著作大批出现，并取得丰硕成果。1951 年，伊藤(K. Ito)发表了《论随机微分方程》一文。随后，对随机微分方程的研究受到了广泛重视，并渗透到很多领域。随机过程的研究和发展，为随机控制的发展提供了理论基础。

自动控制理论是由于军用和民用工业的需要而提出和发展起来的。1927 年已有布莱克(Black)负反馈放大器，1932 年奈魁斯特(H. Nyquist)提出的稳定判据是采用频率法的标志，1945 年伯德(H. W. Bode)提出的反馈放大器理论奠定了自动控制理论的基础，1948 年出现根轨迹法，至此，形成了经典控制理论。在此期间，作为自动控制理论一个分支的随机控制理论也得到了发展。

维纳(N. Wiener)和科尔莫戈罗夫发展起来的滤波和预测理论，使从信号加噪声的观测中抽取有用信号成为可能，这是随机控制理论的一个重要基础，有重大理论价值。但由于维纳-科尔莫戈罗夫理论需要求解一种难于求解的积分方程(维纳-霍甫夫方程)，所以未能得到广泛应用。

1956 年庞特里亚金(Л. С. Понтрягин)提出的极大值原理，1957 年贝尔曼(R. Bellman)提出的动态规划法，以及 1960 年卡尔曼(R. E. Kalman)提出的滤波和预测理论使自动控制理论有了重大突破。1960 年在美国自动控制第一届联合会上，首次提出了“现代控制理论”这一名称，标志着现代控制理论的正式产生。而这些理论与随机控制直接有关。

数字计算机的广泛应用大大加速了随机控制理论的发展。卡尔曼和布西(R. S. Bucy) 1960 年提出了求解滤波和预测问题的递推算法，对滤波和预测理论做出了特殊贡献。求解随机控制问题紧密地依赖于动态规划的概念和方法。1961 年约瑟夫(P. D. Joseph)和陶(J. T. Tou)提出了分离定理，根据分离定理可把线性随机控制问题分为两部分分别求解，一部分是状态估计器，另一部分是求解最优控制策略。另外，还可以证明，随机最优控制策略与确定性最优控制策略是相同的，这就是确定性等价原理。

自校正自适应控制和模型参考自适应控制的发展，丰富了随机控制内容，使之得到更广泛的应用。

随机控制理论对于具有集中控制器和状态完全能观测的系统已经具有相当完善的理论。几十年来，随机控制理论在很多领域已有广泛和成功的应用。例如，在某些工业批量加工过程中，在阿波罗飞船导航及控制系统中使用了最小方差控制。又如，随机控制理论已用于排队(及流量控制)网络最优控制的模型和分析，水电站的水库管理就是一例。再如，随机控制已用于某些经济问题的模型和分析方法，如非风险性投资和保险有价证券管理的决策方法等。还有，当把先进的随机控制概念与物理仿真模型结合起来，把排队网络理论与扰动分析结合起来，这些用于算法设计的新工具就使得通信及制造网络的优化研究发生了革命。

随机控制理论既有广阔的应用前景，也有很多富有挑战性的研究课题。自动控制理论的传统模型已不能满足要求，应向非线性、随机、分布参数模型等更广的范围扩展。实际系统很少是线性的，高度非线性对象更是如此。因此，这种系统的非线性滤波器和非线性信

号处理器的数字实现，可同时辨识未知参数和系统的自适应随机控制就成为重要而困难的研究课题。在许多实际随机控制问题中，传感器和控制器都受所处位置噪声的干扰，在处理这类多因素或分散式随机控制问题时，还缺少模型、概念体系和分析方法，这也是重要的具有挑战性的研究课题。到目前为止，尚未解决兼顾优化和状态估计的集成控制律问题，从而影响了随机控制的进一步发展，这是又一个重要的研究课题。

习　题

1.1　考虑系统

$$x'(t) = u(t)$$

它的初始条件为

$$x(0) = 1$$

控制的目的是使性能指标

$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

达到极小，试证明控制信号

$$u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \qquad (\text{开环程序控制})$$

和控制律

$$u(t) = -x(t) \qquad (\text{闭环反馈控制})$$

是最优的。

1.2　考虑实际系统

$$x'_s(t) = u_s(t)$$
$$x_s(0) = 1$$

假设控制是由模型

$$[x'_m(t)]^2 = au_m(t) \qquad (a \approx 1)$$
$$x_m(0) = 1$$

确定的，试相对于开环控制和闭环控制确定性能指标

$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

的值。

1.3　当实际系统和性能指标由方程

$$x'(t) = u(t) + v$$
$$x(0) = 1$$
$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

决定时，试比较开环控制

$$u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

和闭环控制

$$u(t) = -x(t)$$

的性能。其中 v 是一个未知扰动，特别设 v 是一个未知常数。

1.4 考虑由

$$x(t) = a\cos t$$

描述的系统，其中 a 是随机变量，试给出一个准确预测 x 未来值的计算方法。

1.5 考虑由

$$x(k+1) = ax(k) + e(k) \qquad (k = k_0, k_0+1, \cdots)$$

描述的系统，试证明预测值 $\hat{x}(k+1) = ax(k)$ 在如下意义上是最优的，即它使由 $\mathrm{E}\{x(k+1) - \hat{x}(k+1)\}^2$ 定义的最小二乘预测误差为极小。式中：$x(t)$ 是状态变量，给定初始条件 $x(k_0)=1$；$|a|<1$；$e(k)$ 是一个独立高斯 $N(0,\sigma^2)$ 随机变量序列；$e(k)$ 与 $x(t)$ 是互相独立的。

第2章 随机过程

2.1 引 言

随机控制系统是遭受噪声扰动的受控动力学系统，其噪声是一种随机过程，于是整个系统的量测量和被控量（状态向量）都变成了随机过程。因此，在研究随机控制系统之前，学习和了解一些随机过程知识是必不可少的。随机过程理论是研究随机控制系统的数学理论基础。随机过程是数学的一个分支，随机过程理论内容十分丰富，研究日益深人，应用也很广泛。这一章仅介绍一些与随机控制相关的随机过程的基本知识，这些基本知识对其它工程也是有用的。本章内容包括随机过程概念、工程中常用的随机过程、随机过程重要的数字特征协方差函数、用频率表示和分析随机过程的谱密度、作为随机控制系统扰动项的白噪声以及随机分析等。

2.2 随机过程概念

2.2.1 事物分类

自然界中，人们研究的事物按随时间变化的过程，可分为两大类。

一类是确定性（变化）过程。这类事物的变化过程具有必然的变化规律，可用确定性函数描述，即自变量时间与函数值是一一对应的，且保持不变。这是人们研究较多、比较熟悉的一类过程。

另一类是随机过程。这类事物的变化过程没有确定的变化形式，不能用确定性函数描述，即对每一个自变量时间可取不同的函数值。当然，我们所研究的随机过程是具有统计规律的，而不是任意的随机现象。

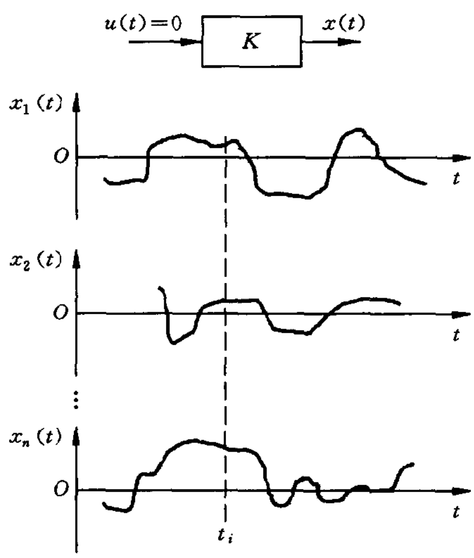

图 2.2.1 电子直流放大器的零点漂移

电子直流放大器输出的零点漂移就是这类随机过程的一个例子，如图 2.2.1 所示。当放大器没有输入，即 $u(t)=0$ 时，要求输出 $x(t)$（称为事件或试验结果）也为零。但是，由于放大器内部各种噪声的作用和外部电磁波等各种干扰的影响，使得输出 $x(t)$ 并不为零，造成零点漂移。放大器放大倍数 K 越大，零点漂移越严重。放大器的零点漂移必须限定在一定范围内，零点漂移过大，会使放大器严重失真，甚至不能正常

工作。

在相同工作条件下，重复量测出 n 条零点漂移曲线 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，如图 2.2.1 所示，每条曲线都称为样本函数，各条曲线是各不相同的，不能用统一的确定性函数表示出来，所以零点漂移是一个随时间变化的随机过程。由图 2.2.1 进一步看出，任取固定时刻 t_i 时，$x_1(t_i),x_2(t_i),\cdots,x_n(t_i)$ 的取值没有必然的规律，若把 $x_1(t_i),x_2(t_i),\cdots,x_n(t_i)$ 看做是 $x(t)$ 在时刻 t_i 的各种可能的取值，很明显，$x(t_i)$ 是一个随机变量。

这类的具体例子还很多，如在每一年的某月份的降雨量，某日期的湿度，人踏楼梯脚印的位置等都是随机过程。大量的工业对象以及经济、人口、生态学等领域中，都存在随机过程问题，应用随机过程理论加以阐述和研究。

2.2.2 随机过程定义

设 ω 是试验结果，$\Omega=\{\omega\}$ 是样本空间；时间 $t\in T$，T 是指标集。下面给出随机过程定义。

定义 2.2.1 随机过程 $x(\omega,t)$ 是一个随机变量族。

随机过程也可定义为：如果对每一个固定的 $\omega_1\in\Omega$，都能确定一个时间 t 的函数 $x(\omega_1,t)$，于是对所有 $\omega\in\Omega$，得到一族时间 t 的函数 $x(\omega,t)$，则称 $x(\omega,t)$ 为随机过程。随机过程还可定义为：如果对每一个固定的时间 $t_1\in T$，都能得到一个 ω 的随机变量 $x(\omega,t_1)$，则对所有时间 $t\in T$，得到一族随机变量 $x(\omega,t)$，则称 $x(\omega,t)$ 为随机过程。

由定义可知，一个随机过程 $\{x(\omega,t),\omega\in\Omega,t\in T\}$ 是两个自变量 ω 和 t 的函数。对固定的 $t_1\in T$，$x(\omega,t_1)=x(\omega)$ 实际上是一个随机变量，随机变量是一个特殊的随机过程，这是概率论研究的内容。对固定的 $\omega_1\in\Omega$，$x(\omega_1,t)=x(t)$ 是一个随机过程，本书中主要研究这种随机过程。

$x(t)$ 也称为样本函数空间，$x_i(t)$ 表示 $x(t)$ 的某个实现，也称为样本函数或过程的轨迹。样本函数 $x_i(t)$ 已经实现，是一个确定性函数。所有样本函数 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,i,\cdots)$ 组成样本函数空间

$$x(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_i(t),\cdots\} \tag{2.2.1}$$

可把某个样本函数 $x_i(t)$ 看做是样本函数空间 $x(t)$ 的一个元素。

一个随机过程 $x(t)$ 可是标量，也可以是向量。若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是随机过程，而 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，则

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t) \tag{2.2.2}$$

称为复随机过程。

2.2.3 随机过程分类

随机过程可按两种方法分类，下面分别介绍。

1. 按随机变量和指标集类型分类

(1) 连续型随机过程　考虑随机过程 $x(\omega,t)$，如果随机变量 $x(\omega)$ 是连续变化的，$t\in T$ 也是连续变化的(指标集为 $T=\{t,0\leqslant t<\infty\}$ 或 $T=\{t,-\infty<t<\infty\}$)，则称 $x(\omega,t)$ 为连续型随机过程。如正弦波随机过程就是这类过程。

(2) 离散型随机过程　考虑随机过程 $x(\omega,t)$，如果 $x(\omega)$是离散的，而 t 是连续的，则称 $x(\omega,t)$为离散型随机过程。如电报信号过程就是这类过程。

(3) 连续型随机序列　考虑随机过程 $x(\omega,t)$，如果 $x(\omega)$是连续的，而 $t\in T$ 是离散变化的($T=\{\cdots,-2k,-k,0,k,2k,\cdots\}$或 $T=\{0,k,2k,\cdots\}$，若 $k=1$，则 $T=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$或 $T=\{0,1,2,\cdots\}$)，则称 $x(\omega,t)$为连续型随机序列。对时间连续的随机变量进行采样就是这类过程。

(4) 离散型随机序列　考虑随机过程 $x(\omega,t)$，如果 $x(\omega)$是离散的，t 也是离散的，则称 $x(\omega,t)$为离散型随机序列。伯努利试验、随机游动等都是这类过程。

2. 按随机过程功能分类

可以分为平稳过程、高斯过程、马尔可夫过程(序列)、二阶过程、独立增量过程、维纳过程、白噪声等。这些过程在随机控制中应用较多，其他过程还很多，如泊松过程、分枝过程、更新过程、生灭过程等。

2.2.4 随机过程描述

随机过程是一个随机变量族，简单说，随机过程就是把随机变量看做是时间的函数。因此，只要注意到自变量时间，描述随机变量的方法可完全用来描述随机过程。

像对待随机变量一样，要全面了解一个随机过程 $x(\omega,t)$，最根本的是要知道它的概率分布函数 $F(\omega,t)$或概率密度函数 $f(\omega,t)$，它们是 ω 和 t 的函数。但为了方便，在多数场合，只要知道它的有关数字特征，如均值函数 $m_x(t)$(数学期望 $\mathrm{E}\{x(t)\}$)、方差函数 $r_x(t)$、自协方差函数 $r_x(s,t)$等一、二阶矩就够了，它们都是时间 t 的函数。

考虑随机过程 $x(\omega,t)$，它的均值为

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \mathrm{E}\{x(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi \mathrm{d}F(\xi,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi,t)\mathrm{d}\xi \qquad (\text{连续情况}) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

$$m_x(k) = \sum_{i=1}^{N} x_i(k)P(x_i,k) \qquad (\text{离散情况}) \tag{2.2.4}$$

式中：$P(x_i,k)$是概率函数。它的方差为

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \mathrm{var}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - m_x(t)]^2 f(\xi,t)\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{E}\{[x(t) - m_x(t)]^2\} \\ &= \mathrm{E}\{x(t)^2\} - m_x(t)^2 \qquad (\text{连续情况}) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned} r_x(k) &= \mathrm{var}(x(k)) = \sum_{i=1}^{N} [x_i(k) - m_x(k)]^2 P(x_i,k) \\ &= \mathrm{E}\{[x(k) - m_x(k)]^2\} \\ &= \mathrm{E}\{x(k)^2\} - m_x(k)^2 \qquad (\text{离散情况}) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

式中：$\mathrm{E}\{x(t)^2\}$和 $\mathrm{E}\{x(k)^2\}$称为均方值函数。它的自协方差为

$$r_x(s,t) = \mathrm{cov}[x(s),x(t)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - m_x(s)][\xi_2 - m_x(t)]\, \mathrm{d}^2 F(\xi_1,\xi_2,s,t) \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - m_x(s)][\xi_2 - m_x(t)]\, f(\xi_1,\xi_2,s,t)\, \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \\
&= \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)][x(t) - m_x(t)]\} \\
&= \mathrm{E}\{x(s)x(t)\} - m_x(s)m_x(t) \qquad \text{（连续情况）} \qquad (2.2.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_x(k,l) &= \mathrm{cov}[x(k),x(l)] \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}[x_n(k) - m_x(k)][x_m(l) - m_x(l)]P(x_n,x_m,k,l) \\
&= \mathrm{E}\{[x(k) - m_x(k)][x(l) - m_x(l)]\} \\
&= \mathrm{E}\{x(k)x(l)\} - m_x(k)m_x(l) \qquad \text{（离散情况）} \qquad (2.2.8)
\end{aligned}
$$

式中：$F(\xi_1,\xi_2,s,t)$，$f(\xi_1,\xi_2,s,t)$和 $P(x_n,x_m,k,l)$分别为联合分布函数、联合密度函数和联合概率函数。$\mathrm{E}\{x(s)x(t)\}$和 $\mathrm{E}\{x(k)x(l)\}$称为自相关函数，表示为

$$C_x(s,t) = \mathrm{E}\{x(s)x(t)\} \qquad (2.2.9)$$

$$C_x(k,l) = \mathrm{E}\{x(k)x(l)\} \qquad (2.2.10)$$

由式(2.2.7)和(2.2.5)，式(2.2.8)和(2.2.6)可知，当 $s=t,k=l$ 时，自协方差函数就退化为方差函数。

考虑两个随机过程 $x(s)$和 $y(t)$，它们的互协方差函数 $r_{xy}(s,t)$表示为

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(s,t) &= \mathrm{cov}[x(s),y(t)] \\
&= \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)][y(t) - m_y(t)]\} \\
&= \mathrm{E}\{x(s)y(t)\} - m_x(s)m_y(t) \qquad (2.2.11)
\end{aligned}
$$

式中：$\mathrm{E}\{x(s)y(t)\}$称为 $x(s)$和 $y(t)$的互相关函数，表示为

$$C_{xy}(s,t) = \mathrm{E}\{x(s)y(t)\} \qquad (2.2.12)$$

若随机过程 $x(s)$和 $y(t)$分别为 $n\times1$ 和 $m\times1$ 列向量，用 T 表示转置，则有

$$
\begin{aligned}
r_x(s,t) &= \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)][x(t) - m_x(t)]^{\mathrm{T}}\} \\
&= \mathrm{E}\{x(s)x(t)^{\mathrm{T}}\} - m_x(s)m_x(t)^{\mathrm{T}} \qquad (2.2.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(s,t) &= \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)][y(t) - m_y(t)]^{\mathrm{T}}\} \\
&= \mathrm{E}\{x(s)y(t)^{\mathrm{T}}\} - m_x(s)m_y(t)^{\mathrm{T}} \\
&= r_{yx}(t,s)^{\mathrm{T}} \qquad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

式中：$r_x(s,t)$为 $n\times n$ 矩阵；$r_{xy}(s,t)$为 $n\times m$ 矩阵。

若 $x(s)$和 $y(t)$是两个复随机过程，则它们均值函数的定义与一般随机过程相同，但协方差函数定义为

$$r_x(s,t) = \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)]\,\overline{[x(t) - m_x(t)]}^{\mathrm{T}}\} \qquad (2.2.15)$$

$$r_{xy}(s,t) = \mathrm{E}\{[x(s) - m_x(s)]\,\overline{[y(t) - m_y(t)]}^{\mathrm{T}}\} \qquad (2.2.16)$$

考虑两个随机过程 $x(s)$和 $y(t)$，则条件均值为

$$
\begin{aligned}
m_{x|y}(s,t) &= \mathrm{E}\{x(s)\,|\,y(t)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi\,|\,y,s,t)\mathrm{d}\xi \qquad \text{（连续情况）} \qquad (2.2.17)
\end{aligned}
$$