《工程数学方法》编写组

工程数学方法

GONGCHENGSHUXUE FANGFA

（第 3 分册）

东南大学出版社

工程数学方法

（第 3 分册）

《工程数学方法》编写组

东南大学出版社

工程数学方法
(第1,2,3分册)
《工程数学方法》编写组
*
东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编210018)
江苏省新华书店经销　河海大学印刷厂印刷
*
开本 850×1168毫米 1/32　印张 33.375　字数 867千
1996年9月第1版　1996年9月第1次印刷
印数:1～4500册
ISBN 7—81050—159—3/O·11
定价(含1,2,3分册):28.00元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

责任编辑　徐步政

目　录

第六篇　概率论

第七篇　数理统计

第六篇 概率论

1 随机事件及其概率

在自然界与人类社会中，人们观察到的现象是各种各样的，归纳起来，大体上可以分为两类。

1）**确定性现象** 在一定的条件下必然发生某一确定的结果，因而可以事先断言其结果的现象称为确定性现象。例如：在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 必然沸腾；向上抛一石子必然垂直下落；同性电荷必不相互吸引等，都是确定性现象。

2）**随机现象** 在一定的条件下可能发生这种结果，也可能发生那种结果，因而无法事先断言出现哪种结果的现象称为随机现象或偶然现象。例如：抛一枚硬币，落地后可能出现正面（国徽朝上），也可能出现反面（文字朝上）；从一批含一定数量次品的产品中任意抽取 3 件检验，所得次品数可能是 0，也可能是 1，2 或 3；某电话交换台在某一时间间隔内接到用户的呼唤次数可能是 0，1，2，3，…（一切非负整数）中的某一个；灯泡的使用寿命可能是任意非负实数 t（单位是小时）等等，这些都是随机现象。

随机现象就个别观察或实验看来，杂乱无章，似乎无规律可循。但人们在经过长期实践并深入研究后发现，在相同的条件下进行大量重复观察或实验时，随机现象的各种可能出现的结果会呈现出某种规律性来。例如，多次重复抛一枚质地均匀而对称的硬

币，正、反面朝上的次数大致各占一半；又如，从一批同一型号的灯泡中抽取一定数量的灯泡作寿命试验，可发现其寿命按一定的规律分布，等等。随机现象的这种在相同的条件下进行大量重复观察或实验时所呈现出来的固有的规律性，我们称之为**统计规律性**。

概率论是从数量侧面来揭示和研究随机现象统计规律性的数学学科，它是现代数学的重要分支之一。它不仅有丰富的理论，而且广泛地应用在工业、农业、军事、医学、公共事业、尖端科学等各个领域中，并起着越来越重要的作用。掌握这门学科，对每个科学工作者来说无疑具有重要的现实意义。

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

研究随机现象，首先必须进行大量的观察或实验，以便从中发现统计规律性。为了叙述方便，我们把观察或实验统称为试验。

一个试验如果具有以下特征，则称为**随机试验**，记为 E。

(1)　可以在相同的条件下重复进行。

(2)　每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果。

(3)　在一次试验中必出现且只会出现其中的一个结果，但究竟出现哪个结果，试验之前不能预言。

在概率论中，我们一般把随机试验简称为**试验**。很明显，随机试验观察的对象实际上就是某随机现象。

随机试验中，每一个可能结果称为该试验的一个**样本点**(或**基本事件**)，记为 ω。全体样本点组成的集合称为该试验的**样本空间**，记为 Ω。

在具体问题中，十分重要的是，必须弄清样本空间是由哪些样本点构成的。下面我们举一些例子。

例 1 E_1—— 掷一颗骰子，观察出现的点数。试验有 6 个可能结果：出现 1 点，出现 2 点，……，出现 6 点。显然样本空间有 6 个样本点。若把样本点 $\omega_i=$“出现 i 点”($i=1,2,\cdots,6$) 简记为“i”(例 3、例 4 中处理方法类似)，则样本空间为

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$$

例 2 E_2—— 把一枚硬币连掷两次，观察出现正反面的情况。试验的可能结果有 4 个：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)。这里记号，如(正，反)，表示“第一次出现正面，第二次出现反面”，其余类推。样本空间为

$$\Omega_2=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$$

例 3 E_3—— 记录某电话交换台在上午 8 ～ 9 时内接到用户的呼唤次数。这时，每一非负整数都是这一试验的一个可能结果，故样本空间为

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$$

例 4 E_4—— 在一批灯泡中任抽 1 只，测试其寿命。这时任一非负实数 t 都是该试验的一个可能结果，故样本空间为

$$\Omega_4=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$$

例 5 E_5—— 在一批灯泡中任抽 1 只，测试其寿命，若规定使用寿命超过 5 千小时为正品，反之为次品。观察该灯泡是正品还是次品，这时样本空间只有两个样本点，即

$$\Omega_5=\{正,次\}$$

由例 4、例 5 可以看出，一个试验的样本空间是由试验的 条件及观察的目的来决定的。一般，当试验的条件不同或观察的目的不同时，所构造的样本空间就不同。

1.1.2 随机事件

在随机试验中，通常把“在一定的条件下可能发生也可能不发生的事情”叫做**随机事件**，简称**事件**。事件通常用大写英文字母 A，B，C，… 表示。

例如在例1中，“出现1点”，“出现2点”，……，“出现6点”及“出现奇数点”，“出现的点数 $\leqslant 4$” 等都是随机事件。又如在例3中，“恰接到10次呼唤”，“接到呼唤次数在10至20次之间”等也是随机事件。

一个随机事件通常可看作是由样本空间中某些样本点组成的集合，它可能只含一个样本点(这种事件就是**基本事件**)，也可能含有多个样本点(这种事件称为**复合事件**)。由于样本空间 Ω 是由 E 中的所有样本点组成的集合，所以任一事件都可看作 Ω 的某个子集①。例如，在试验 E_1 中，$A=\{3\}$ 表示“出现3点”这个基本事件，$B=\{1,3,5\}$ 表示“出现奇数点”这个复合事件，它们都是 Ω_1 的子集。又如在试验 E_4 中，$C=\{t|t\geqslant 1500\}$ 表示“灯泡寿命不低于1500小时”事件，C 是 Ω_4 的子集。

由于一个事件是否发生要根据试验的结果来判断，例如，在试验 E_1 中，事件 $A=\{3\}$ 发生，当且仅当掷一颗骰子恰出现3点；事件 $B=\{1,3,5\}$ 发生，当且仅当掷一颗骰子出现的点数为“1点”，“3点”，“5点”之一。所以易见，一个事件发生，当且仅当它所包含的某一个样本点发生。

作为随机事件的两个极端情形，我们引进两个特殊的“随机事件”对今后分析和解决问题是有好处的，这就是把每次试验必然发生的事情叫做**必然事件**；不可能发生的事情叫做**不可能事件**。这两个事件都是可预言其结果的，因此从本质上来讲，它们都不是随机事件。但它们仍可用 Ω 的子集来描述：因为每次试验必出现 Ω 中的某个样本点，即 Ω 必然发生，所以 Ω 就是必然事件；又因为空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，所以每次试验 $\varnothing$ 都必然不发生，故 $\varnothing$ 是不可能事件。例如，在试验 E_4 中，“灯泡寿命非负”是必然事件 Ω，“灯

① 事件可看作样本空间的子集，但样本空间的任一子集一般并不能都看作是事件，否则将会带来实质性的困难。关于这一点，已超出本教材所涉及的知识范围，读者可看较详尽的参考书。

泡寿命为负值”是不可能事件 $\varnothing$。

1.1.3 事件之间的关系和运算

和现实世界中其它事物一样，同一试验的事件之间往往也是相互联系的，弄清事件之间的相互关系是十分重要的，这能使我们通过简单的事件去认识和分析比较复杂的事件。我们仍从集合的观点去理解事件，这将有助于我们应用熟知的集合论的知识去分析和研究事件之间的关系和运算。

1）事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A（或 A 为 B 的子事件），记作

$$B \supset A（或 A \subset B）$$

从集合论的角度讲，$B \supset A$ 时 A 的样本点都落在 B 内，如图 1.1 所示。

例如，在试验 E_2 中，以 A 表示事件：“两次都出现反面”；以 B 表示事件：“第二次出现反面”。则显然 A 发生必然导致 B 发生，所以 $B \supset A$。事实上，$A=\{$(反，反)$\}$，$B=\{$(正，反)，(反，反)$\}$，显然 A 是 B 的子集合。

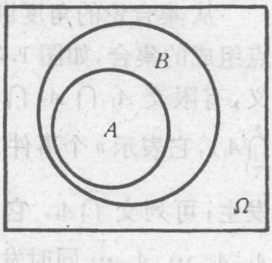

图 1.1

如果 $B \supset A$ 与 $A \supset B$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2）事件的并

“事件 A 与 B 至少有一个发生”这件事情也是一个随机事件，称它为事件 A 与 B 的**并**（或并事件），记作

$$A \cup B$$

从集合论的角度讲，并事件 $A \cup B$ 是把 A 与 B 的所有样本点合起来组成的一个集合（A，B 所共有的样本点只取一次），如图 1.2 所示。

类似地定义，有限并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$（简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$），它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生；可列并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生。

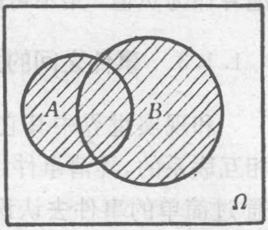

图 1.2

例 6 实弹演习时某高射炮对一架模型飞机射击三次，若用 A_1, A_2, A_3 分别表示"第一次击中飞机"、"第二次击中飞机"和"第三次击中飞机"事件，用 B 表示"飞机被击中"事件，则 $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

3) 事件的**交**

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为 A 与 B 的**交**（或交事件），记作

$$A \cap B (\text{简记为 } AB)$$

从集合论的角度讲，交事件 $A \cap B$ 是由 A, B 的所有公共样本点组成的集合，如图 1.3 所示。类似地定义，有限交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$），它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生；可列交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生。

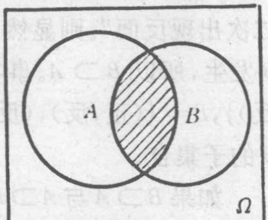

图 1.3

如在例 6 中，假定当且仅当三次都击中飞机时飞机才被击落，用 C 表示事件："飞机被击落"，则 $C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$。

4) 事件的**差**

"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为 A 与 B 的**差**（或差事件），记作 $A - B$。

从集合论的角度讲，差事件 $A - B$ 是在 A 中把 A, B 的公共样本点除去后，剩下的样本点组成的集合，如图 1.4 所示。

例如，检验圆柱形产品，用 A,B 分别表示“直径合格”和“长度合格”事件，则 $A-B$ 表示“直径合格而长度不合格”事件。

5) **互不相容事件(或互斥事件)**

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是**互不相容(或互斥)事件**。

从集合论的角度讲，A,B 互斥时，两事件不相交(即无公共样本点)，如图 1.5 所示。

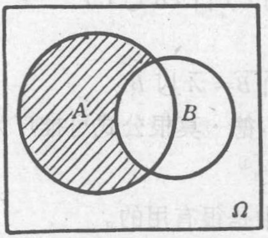

图 1.4

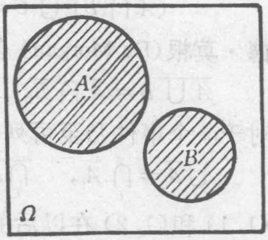

图 1.5

如果一组事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots)$，则称这一组事件互斥。对两两互斥事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，可记

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$$

显然，基本事件是两两互斥的。

6) **对立事件(互逆事件)**

若两事件 A 与 B 必然有一个发生，而又不可能同时发生，即 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是**对立事件或互逆事件**，亦称 B 是 A 的逆事件(或 A 是 B 的逆事件)。记一个事件 A 的逆事件为 $\overline{A}$。

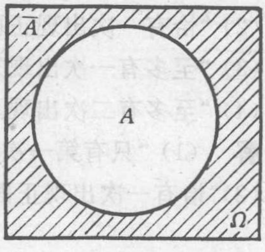

图 1.6

从集合论的角度讲，在样本空

间 Ω 中除去 A 的样本点后，剩下的样本点组成的集合即为 $\overline{A}$，亦即 $\overline{A}=\Omega-A$，如图 1.6 所示。

关于事件的运算性质，和集合的运算性质一样，有下列的基本关系式：

交换律：$A\cup B=B\cup A,\ AB=BA$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (AB)C=A(BC)$

分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

德·莫根(De Morgan) 公式：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\tag{1.1}$$

对于 n 个事件乃至可列个事件，德·莫根公式可推广为

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}\text{①}\tag{1.2}$$

公式(1.1) 和(1.2) 在以后的学习中是很有用的。

例如在例 6 中，"飞机被击中"这一事件的逆事件是"飞机没有被击中"，即"第 i 次没有击中飞机"($i=1,2,3$) 同时成立。所以有

$$\overline{B}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

这正是验证了德·莫根公式的正确性。

例 7 将一枚硬币连掷三次，设 A_i 表示"第 i 次出现正面"事件 ($i=1,2,3$)，试用它们表示出下列事件：

(1)"只有第一次出现正面"；

(2)"恰有一次出现正面"；

(3)"至多有一次出现正面"；

(4)"至多有二次出现正面"。

解 (1)"只有第一次出现正面"：$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(2)"恰有一次出现正面"：$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

---

① 这里记号：$\bigcup_i A_i=\begin{cases}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i, & \text{对 } n \text{ 个事件；}\\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i, & \text{对可列个事件。}\end{cases}$ 记号 $\bigcap_i A_i$ 的意义类似。

(3)“至多有一次出现正面”：$\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(4)“至多有二次出现正面”：$\overline{A_1A_2A_3}$或$\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ 或$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$。

读者可用作图的方法验证，上例中同一事件的不同表达式是相等的。

1.2 事件的频率与概率

1.2.1 频率

在一次试验中，我们虽然不能预言某一随机事件能否发生，但是通过大量重复试验能够大致看出它发生的可能性大小。在大量重复试验中，频繁发生的事件在一次试验中发生的可能性要大些，而不常发生的事件在一次试验中发生的可能性要小些。研究并度量随机事件发生的可能性大小具有很重要的现实意义。例如，研制一种新型客机，就需要知道这种客机在一次试验中出现故障的可能性有多大？“出现故障”是随机事件，当这一事件发生的可能性（通常称为故障率）降低到一定要求后，这种客机才能允许批量生产。

那么，怎样具体去度量一随机事件在一次试验中发生的可能性大小呢？为了说明这一点，我们先引进频率的概念。

定义 1.1 将一试验 E 在相同的条件下重复进行 n 次，如果事件 A 发生了 n_A 次，则比值$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 的**频率**，记作

$$F_n(A) = \frac{n_A}{n} \tag{1.3}$$

频率具有如下性质：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $0 \leqslant F_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $F_n(\Omega) = 1$；

(3) 可加性:对互不相容事件 A,B,有

$$F_n(A+B)=F_n(A)+F_n(B)$$

证 性质(1),(2)的成立是显然的,现证性质(3)如下。

设在 n 次试验中,事件 A,B 分别在发生 n_A,n_B 次,由于 A,B 互斥,即 A,B 不能同时发生,所以事件 $A+B$ 发生的次数为 $n_{A+B}=n_A+n_B$。于是有

$$F_n(A+B)=\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=F_n(A)+F_n(B)$$

性质(3)还可以推广:若事件 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 两两互斥,则

$$F_n(\sum_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}F_n(A_i)$$

从频率的定义可以看出,当试验次数较大时,频率的大小反映了事件发生的频繁与否,所以频率在一定程度上可以反映事件发生的可能性大小,但不足之处是频率会有随机波动,这从公式(1.3)即可看出。经验说明,频率的这种波动性在试验次数 n 逐渐增大时会逐渐消除。也就是说,随着 n 逐渐增大,事件 A 的频率总在某一定值 $P(A)$ 的附近摆动而逐渐稳定于这个定值。这个定值 $P(A)$ 通常称为**频率的稳定值**。

例 1 历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾分别掷一枚质地均匀而对称的硬币,其结果如下表:

实验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 n_A	频率 $F_n(A)=\frac{n_A}{n}$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表可看出,不管谁去掷硬币,随着掷币次数的增加,出现正面的频率总在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5。

频率的这种在 n 逐渐增大的过程中所具有的"逐渐稳定"的变化趋势,称为**频率的稳定性**(在 5.1 大数定律中将从理论上给出频率具有稳定性的说明),它是我们定义概率的客观基础。

1.2.2 概率的定义

频率的稳定性说明，频率的稳定值 $P(A)$ 是客观存在的一个与事件 A 对应的常数，它是由事件 A 的固有属性所确定的，它消除了频率的波动性，因而能客观地反映事件 A 发生的可能性大小。用频率的稳定值 $P(A)$ 来反映和度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小，并称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**，这就是概率的直观意义。通常称为**概率的统计定义**。

这个定义指出，当试验次数较大时，频率与概率一般相差不大，因此在概率不易求出时我们经常用频率来近似估计概率，这种估计在试验次数愈大时会愈精确。然而，在进行理论研究时，我们不可能对每一事件都做大量试验从中得到概率。这就促使我们去考虑这样的问题：概率能否像几何、代数那样，把其所应满足的最基本性质公理化，通过建立公理化系统，用概率所应满足的基本公理来给出概率的数学定义，而概率的其它性质都由其基本公理经过演绎导出。这样，概率的计算有可能将不通过试验而归结为数学运算。这个工作由原苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)于1933年完成。他在综合了前人研究成果的基础上，提出了关于概率的三条公理，从而给出了如下概率的公理化定义。

定义 1.2 设 Ω 为样本空间，$A(\subset\Omega)$ 为事件，对每一事件 A 赋予一实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足如下三条公理①：

(1) 非负性：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$； (1.4)

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$； (1.5)

(3) 对两两互斥事件 $A_i(i = 1,2,\cdots)$ 有：

有限可加性：$P(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ (1.6)

---

① 因为概率是频率的稳定值，所以自然想到频率的非负性、规范性、可加性对概率也应满足。进一步分析，我们发现这三条性质正是概率的最基本属性。