数理部

高等数学AI

2014/2015学年第一学期教案

专 业：计算机科学与技术

班 级：计算机嵌入式(卓越)141.142班

总学时： 88

周学时： 6

教 师：高艳艳

《高等数学》绪论

一. 为什么要学习高等数学?

高等数学是高等学校许多专业学生必修的重要基础理论课程。数学主要是研究现实世界的"数量关系"与"空间形式"。世界上任何客观存在都有其"数"与"形"的属性特征,并且一切事物都在变化,遵循量变到质变的规律.

凡是研究量的大小,量的变化,量与量之间关系以及这些关系的变化,就少不了数学.同此,客观世界存在着各种不同的空间形式.因此,宇宙之大,粒子之微,光速之快,世事之繁,……无处不用数学.

在今天的数学中,"数"和"形"的概念已发展到很高的境地.比如:非数之"数"的众多代数结构,像群.环.域等;无形之"形"的一些抽象空间,像欧氏里德空间.线性空间,拓扑空间,流形等.

恩格斯 —— 要辩证而又唯物地了解自然,就必须掌握数学.

英 培根 —— 数学是打开科学大门的钥匙.

德 高斯 —— 数学是科学的皇后,她常屈尊去为天文学和其它自然科学效劳,但在所有的关系中,她都堪称第一."

马克思 —— 一种科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步.

伦琴 —— 科学家需要什么样的修养?第一是数学,第二是数学,第三还是数学.

牛顿 —— 科学工作中的演绎数学部分所起的作用比实验部分所起的作用要大.

冯.诺伊曼 —— 数学处于人类智慧的中心领域.

数学史概况

第一阶段 数学萌芽时期(～一公元前5世纪):算术几何形成时期,但它们还未分开,彼此交织在一起,没有形成完整、严格的体系,缺乏逻辑性,基本上看不到命题证明、演绎、推理。

第二阶段 初等数学时期(公元前5世纪～17世纪中叶):数学逐步形成了一门独立的、演绎的学科。算术、初等几何、初等代数、三角学都已成为独立的分支。

第三阶段 高等数学时期(17世纪中叶～19世纪中叶):变量与函数的概念进入数学。解析几何、微积分、概率论、射影几何形成。

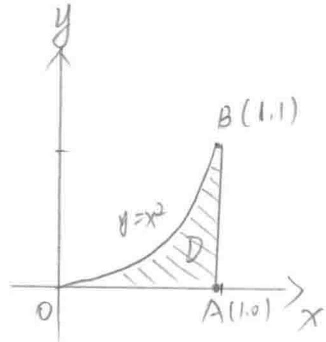
第四阶段 近代数学时期(19世纪中叶～20世纪初):非欧几里得几何、抽象代数、集合函数论、集合论、微分几何、微分方程论、积分方程论、点集拓扑、组合拓扑……

第五阶段 现代数学时期(20世纪40年代～　　)广义函数论,电子计算机的发明,整体微分几何,代数拓扑,代数几何,同调代数,模糊数学,计算数学,……

二. 高等数学主要学些什么?

1. 问题

① $y=x^2$ 的在点(1,1)处的切线方程 (极限、导数)



② 图中阴影部分的面积. (极限, 不定积分, 定积分)

③ OB弧的长度 (定积分的应用)

④ 图中阴影部分的图形绕 x轴(y轴)旋转一周的立体的体积. (定积分的应用, 二重积分)

⑤ 、、 的面积. (二重积分的应用)

⑥ 无穷多个数相加的和仍是一个数吗? (级数)

⑦ 两电线杆之间的电线的长度 (定积分的应用, 微分方程)

2. 通过高等数学的学习, 要获得以下方面的基本理论和基本运算技能, 为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础.

① 函数, 极限, 连续

② 一元函数微积分学

③ 向量代数与空间解析几何

④ 多元函数微积分学

⑤ 无穷级数

⑥ 常微分方程.

3. 与微积分创立密切相关的科学技术问题, 从数学角度归纳起来有四类:

① 已知变速运动的路程, 求瞬时速度和加速度

② 求已知曲线的切线.

③ 求给定函数的最大值与最小值

④ 求给定曲线长度；求平面曲线围成的面积；求空间曲面围成的体积；求物体的重心；空间变速运动物体的速度，加速度，求物体运动的路程与时间的关系等.

三、怎样才能学好高等数学？

与中学数学相比，三大差别：

1. 课堂大：80-120人合班上课

2. 时间长：连续讲授两节课

3. 进度快：学时有限，内容较为丰富，平均每次课要讲授教材8-10页.

预习

使听课时心中有底，不至于被动地只跟着教师的"脚后跟"走.

知道重点和自己的难点，听课时特别注意.

听课

精力充沛，兴趣，带着疑问，难点，专心致志听讲解思路，如何提出问题——分析问题——解决问题——积极思考.

复习

孔子说：学而时习之.

对于高等数学，复习时要想会做去就必须手边有纸、有笔，有课堂笔记.

做作业

检验自己对听课、复习收获大小的一个重要标志，也是强化听课、复习的继续.

<每周二收作业，每次作业都要认真完成，抄题目>

答疑

在学习上遇到疑问时及时去请教老师，答疑是向老师学习，请教的良好时机，请同学们利用好它.

§1.1 映射与函数

一、集合

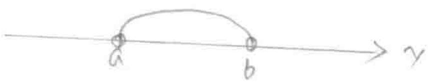
1.集合 $M=\{x \mid x$具有特定性质$\}$

有限集，无限集.

2.集合间的关系 (1)包含(子集) (2)相等 (3)空集 (4)集合运算

差集 $A-B=\{x \mid x\in A$ and $x\notin B\}$

3.区间 开区间 $(a,b)=\{a<x<b\}$



闭区间 $[a,b]=\{a\le x\le b\}$

4.邻域 设a与δ是两个实数，$\delta>0$

数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点a的邻域，记作 $U(a,\delta)$

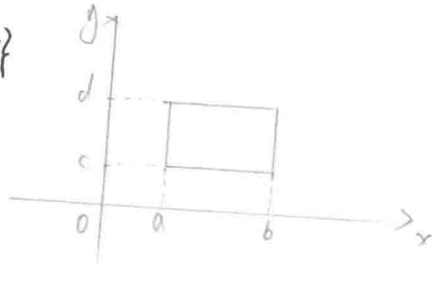
$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$

a的去心δ邻域

$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

5.直积

$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$



二、函数

定义：设x和y是两个变量，D是一个给定的数集，如果对于每个数$x \in D$，变量y按照

一定法则总有确定的数值和它对应，则称y是x的函数，记$y=f(x)$.

注：(1) 三要素：定义域，值域，对应法则

(2) 单值函数，多值函数，

(3) 会求函数的定义域及值域

几个特殊的函数

1、符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

2、取整函数 $y=[x]$ 不超过x的最大整数

3、分段函数 用几个式子表示的一个函数

三、函数的特性

1、有界性：若$X \subset D$，$\exists M>0$，$\forall x \in X$，有$|f(x)| \le M$成立，

则称函数$f(x)$在X上有界，否则称无界.

2、单调性 $\forall x_1, x_2 \in D$，$x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$ ↗

$f(x_1)>f(x_2)$ ↓

3、奇偶性 偶 $f(-x)=f(x)$

奇 $f(-x)=-f(x)$

4、周期性 $\forall x \in D$，$\exists l>0$，使$f(x \pm l)=f(x)$，称$f(x)$为周期函数

四. 反函数

定义：设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对 $\forall y\in M$，都可由 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，则 x 是 y 的函数，且称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，从而 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$.

说明：(1) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称

(2) 单值函数的反函数不一定是单值函数

(3) 若 $y=f(x)$ 单调增(减)，其反函数也单调增(减).

五. 复合函数, 初等函数

1. 复合函数

定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\emptyset$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

注：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数

$y=\arcsin u,\ u=2+x^2 \Rightarrow y\neq\arcsin(2+x^2)$

2. 初等函数

基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数

三角函数 反三角函数

定义：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

六、双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $D(-\infty, +\infty)$ 奇函数

双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $D(-\infty, +\infty)$ 偶函数

双曲正切 $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $D(-\infty, +\infty)$ 奇函数 有界函数

双曲函数常用公式

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

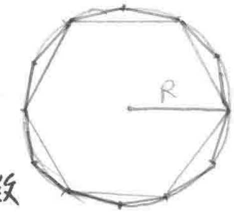
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

§1.2 数列的极限

一、概念的引入

1、割圆术

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"
——刘徽



正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

⋮

正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积 A_n

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S$

2、截丈问题

"一尺之棰，日截其半，万世不竭"

第一天截下的杖长为 $x_1 = \frac{1}{2}$；

第二天截下的杖长总和为 $x_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$；

⋮

第n天截下的杖长总和为 $x_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$；

$$x_n = 1-\frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

二、数列的定义：

定义：如果按照某个法则，可以得到一列有序数：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为无穷数列，简称数列。其中的每个数称为数列的项，x_n 称为通项。数列(1)记为 $\{x_n\}$

例如 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots \qquad \{2^n\}$

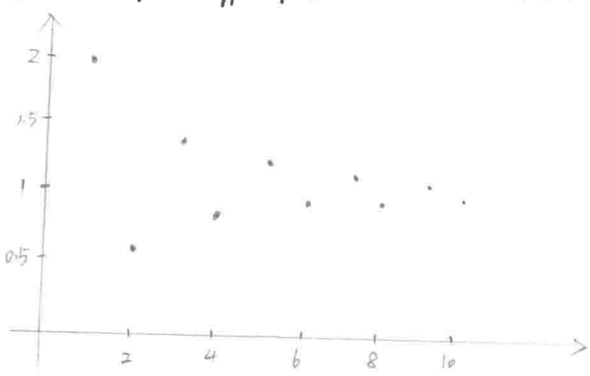
$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \qquad \{(-1)^{n-1}\}$

注：(1) 数列对应着数轴上一个点列。

(2) 数列是整标函数，$x_n = f(n)$.

三、数列的极限

观察数列 $\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



当n无限增大时，$x_n = 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于1.

Q："无限接近"意味着什么？如何用数学语言刻划？

$\because x_n = 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 1 \quad \therefore |x_n - 1| \to 0$

即当n充分大时，$|x_n-1|$ 充分小.

or说，给定 $\varepsilon>0$（无论多么小），要使

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

只要n充分大即可办到？[n多大才能办到？]

要使 $|x_n-1|<\varepsilon \quad \because |x_n-1| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$

$\therefore$ 当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-1|<\varepsilon$ 成立.

定义[ε—N语言]

对于$\{x_n\}$及常数a，$\forall\varepsilon>0$（无论多么小），

总存在正整数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，

则称a是$\{x_n\}$的极限，或称$\{x_n\}$收敛于a。

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

否则称数列$\{x_n\}$发散。

(4) 此定义只能用来判断a是否为x_n的极限：

例1：设$x_n=\frac{n+1}{n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

证：$\underline{\forall\varepsilon>0}$，要使$|x_n-1|<\varepsilon$

$\because |x_n-1|=|\frac{n+1}{n}-1|=\frac{1}{n}$

只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即$n>\frac{1}{\varepsilon}$ 取$\underline{N=[\frac{1}{\varepsilon}]}$

则当$n>N$时，恒有$|x_n-1|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

□

注：(1) 不等式$|x_n-a|<\varepsilon$刻划了x_n与a的无限接近。

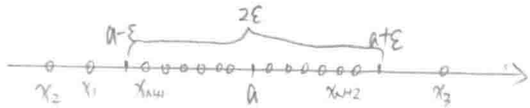
(2) N与任意给定的正数ε有关。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的几何意义

$\forall\varepsilon>0$ $|x_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

即$\forall\varepsilon>0$，可找到一个N，当$n>N$时，所有x_n都落在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，只有有限个(至多$N$项)在这区间之外

注："ε—N"语言描述



(5) 用定义证明数列存在，关键是任给$\varepsilon>0$，寻求N，但不必要求是最小的N。

例2：已知$x_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

证：$\underline{\forall\varepsilon>0}$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$

$\because |x_n-0|=|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即$n>\frac{1}{\varepsilon}$ 取$\underline{N=[\frac{1}{\varepsilon}]}$

则当$n>N$时，恒有$|x_n-0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

□

四、数列极限的性质

1. 有界性

定义：对数列x_n，若存在正数M，使得对一切自然数n，恒有$|x_n|\le M$成立，则称x_n有界；否则，称为无界。

eg. $x_n=\frac{n}{n+1}$ 有界；$x_n=3^n$ 无界

注：(1) M不是唯一的

(2) 若$|x_n|\le M$ 则在数轴上$\forall x_n\in[-M,M]$。

定理1：收敛的数列必有界。

关键找M。

证：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义，取$\varepsilon=1$

则$\exists N$，当$n>N$时 恒有$|x_n-a|<1$

即有 $a-1<x_n<a+1$

取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|a-1|,|a+1|\}$

则对一切自然数n，皆有$|x_n|\le M$ 故$\{x_n\}$有界。

□

注：(1) 数列有界不一定收敛

如：$x_n=(-1)^n$。

(2) 无界数列必定发散。

2. 唯一性

定理2：每个收敛的数列只有一个极限.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，若 $a\neq b$.

取 $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$

则 $\exists N_1, N_2$，使得当 $n>N_1$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$；

当 $n>N_2$ 时恒有 $|x_n-b|<\varepsilon$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时有

$|a-b| = |(x_n-b)-(x_n-a)|$

$\le |x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=|b-a|$ 矛盾

故收敛数列极限唯一. □

例3：设 x_n 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$.

证：∵ x_n 有界 ∴ $\exists M>0$ 使 $|x_n|\le M$；

$\forall\varepsilon>0$，要证 $\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_ny_n-0|<\varepsilon$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. 对于给定的 $\frac{\varepsilon}{M}$，$\exists N_1$，

当 $n>N_1$ 时，恒有 $|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

取 $N=N_1$ ∴当 $n>N$ 时，恒有

$|x_ny_n-0|=|x_ny_n|\le M|y_n|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$. □

3. 保号性

定理3：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 且 $a>0$ (or $a<0$)，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时都有 $x_n>0$ (or $x_n<0$).

证：只证 $a>0$ 的情形.

取 $\varepsilon=\frac{a}{2}$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时有

$|x_n-a|<\frac{a}{2}$

∴ $x_n > a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$. □

推论1：如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\ge0$ (or $x_n\le0$) 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $a\ge0$ (or $a\le0$).

证：设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起有 $x_n\ge0$ 用反证法

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a<0$，则由保号性知，$\exists N_2\in N^+$，当 $n>N_2$ 时都有 $x_n<0$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$

∴当 $n>N$ 时有 $x_n<0$. 但按假定有 $x_n\ge0$，矛盾

故必有 $a\ge0$. □

4. 子数列

定义：在 $\{x_n\}$ 中，第一次抽取 x_{n_1}，在 x_{n_1} 项后任取 x_{n_2}，在 x_{n_2} 后再任取 x_{n_3} …，这样得到 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 记作 $\{x_{n_k}\}$，称 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子数列.

定理4：[收敛数列与子列的关系]

若 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于 a.

证明：$\forall \varepsilon>0$，要证存在正整数 K，使当 $k>K$ 时，

恒有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对上面给 $\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时

恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$

取 $K=N$，则当 $k>K$ 时，$n_k>n_K=n_N\geq N$，

恒有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$. □

注：(1) 若 $\{x_n\}$ 存在两子列收敛于不同数，则 $\{x_n\}$ 发散.

如：$1,-1,1,-1,\cdots$

$\{x_{2k-1}\}\to 1$，$\{x_{2k}\}\to -1$ ∴ $\{x_n\}$ 发散.

(2) 对于 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a$，$x_{2k}\to a$，则 $x_n\to a$.

注：数列发散的判断方法

五. 小结

数列：研究其变化规律

数列极限：极限思想，精确定义，几何意义；

收敛数列的性质：有界性、唯一性.

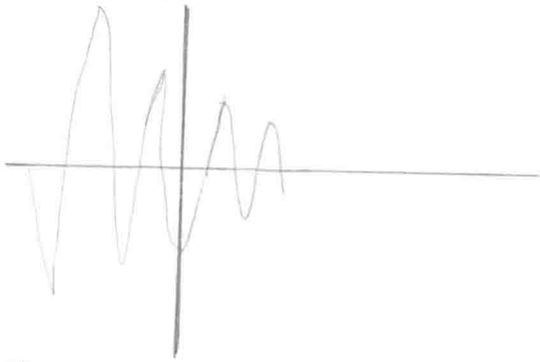
作业：

P23 — 习题 1.2 — 3(2,3)，4，5

§1.3 函数的极限

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $\to\infty$ 时的变化趋势



结论：

当 x 无限增大时，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

定义［$\varepsilon-X$ 语言］

设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有意义，A 为一常数.

$\forall\varepsilon>0$（无论多么小），总 $\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，

恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

记：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

另外，两种情形：

1° $x\to+\infty$：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

2° $x\to-\infty$：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

Q：如何用数学语言刻划函数"无限接近"？

$\because$ 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)=\frac{\sin x}{x}\to 0$

即：当 $|x|$ 充分大时，$|f(x)-0|$ 可任意小.

$\forall\varepsilon>0$（无论多么小）要使 $|f(x)-0|<\varepsilon$，那 $|x|$ 应多大呢？

$|x|$ 多大就能办到？

$\because |f(x)-0|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}$

只要 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可

$\therefore$ 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\frac{\sin x}{x}\to 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$

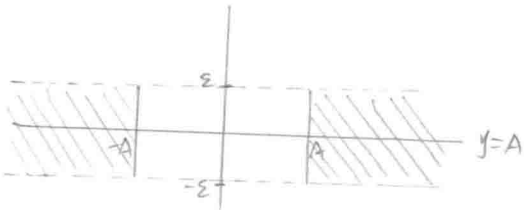
$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-0|<\varepsilon$.

几何意义：

$|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

$\therefore \forall\varepsilon>0$，可找到 $X=X(\varepsilon)>0$ 而使一，当 $|x|>X$ 时，

$f(x)$ 的就落在 $(A-\varepsilon;A+\varepsilon)$ 内



例1：证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+3x^3}{2x^3}=\frac{3}{2}$.

证. $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{5+3x^3}{2x^3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

$\because \left|\frac{5+3x^3}{2x^3}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2|x|^3}<\frac{3}{|x|^3}$

只需 $\frac{3}{|x|^3}<\varepsilon$ 即 $|x|>\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}$ 取 $X=\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}$

则当 $|x|>X$ 时，恒有 $\left|\frac{5+3x^3}{2x^3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+3x^3}{2x^3}=\frac{3}{2}$. □

二. 自变量趋向有限值时函数的极限

Q: 函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A，数学上如何描述？

例 $f(x)=5x+1$，当 $x\to 1$ 时，$f(x)\to 6$；

即 $|x-1|\to 0$ 时 $|f(x)-6|\to 0$

也就是：当 $|x-1|$ 任意小时，$|f(x)-6|$ 也任意小。

$\forall\varepsilon>0$（无论多么小），要使 $|f(x)-6|<\varepsilon$，只要 $|x-1|$ 够小

$\because |f(x)-6|=|5x+1-6|=5|x-1|$

要使 $|f(x)-6|<\varepsilon$ 只需 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$ 即可

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，$\therefore$ 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-6|<\varepsilon$.

由此可知

$f(x)=5x+1$ 当 $x\to 1$ 时，$f(x)\to 6$ $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-6|<\varepsilon$.

定义：[$\varepsilon-\delta$ 语言]

设 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有定义，A 为一常数，$\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

记：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注 (1) A 是唯一确定的常数

(2) 函数的极限与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义无关.

(3) δ 与 ε 有关

(4) ε 表示 $f(x)$ 和 A 接近的程度

δ 表示 x 与 x_0 的接近程度

(5) $x\to x_0$ 从 x_0 的左右两侧趋于 x_0.

例2：证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

证明：函数在点 $x=1$ 处无定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 只要取 $\delta=\varepsilon$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

□

例3：证明当 $x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证：$\forall\varepsilon>0$，要证 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$ 即使 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\because |f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$

只需 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$ 且 x 不取负值

取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

□

三、左右极限

左极限: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ or $f(x_0^-)=A$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ or $f(x_0^+)=A$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

注 (1) 如果 $f(x_0^+)$ 及 $f(x_0^-)$ 有一个不存在时, 或者即使存在但不相等, 则 $f(x)$ 在点 x_0 均无极限.

(2) 左右极限是判别极限是否存在的方法之一.

例14: 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$

讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 的存在性

解: $\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. □

例15: 讨论函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 当 $x\to 2$ 时的极限.

解: $\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 不存在

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在. □

四、函数极限的性质

定理 1 (唯一性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

定理 2 (局部有界性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|<M$.

证明: $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 所以不妨取 $\varepsilon=1$, 则存在 $\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 有 $|f(x)-A|<1$

$\therefore |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$

记 $M=1+|A|$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$|f(x)|<M$. □

定理3 (保号性)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$ (or $A<0$), 则 $\exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0$ (or $f(x)<0$).

证: $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

若 $A>0$, 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$f(x)>\frac{A}{2}>0$. □

推论1: 如果在 x_0 某邻域内 $f(x)\ge 0$ (or $f(x)\le 0$)

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $A\ge 0$ (or $A\le 0$).