經濟學名著翻譯叢書第八十一種

數理經濟學

（下冊）

R. G. D. Allen 著

毛育剛譯

臺灣銀行經濟研究室編印

數理經濟學

Mathematical Economics

（下　册）

R. G. D. Allen 著
毛育剛譯

經濟學名著翻譯叢書第八十一種

數理經濟學（下册）

中華民國六十二年十月出版

原著者 R. G. D. Allen

翻譯者 毛 育 剛

編印者 臺灣銀行經濟研究室
臺北市重慶南路

發行者 臺 灣 銀 行
臺北市重慶南路

經售者 中 華 書 局
臺北市重慶南路

中央文物供應社
臺北市仁愛路

印刷者 臺灣銀行印刷所
臺北市青島東路

經濟學名著翻譯叢書（一）

*第一種　就業、利息與貨幣的一般理論
　　（J. M. Keynes 著、李蘭甫譯）
*第二種　國富論（二冊）
　　（A. Smith 著、周憲文、張漢裕譯）
*第三種　經濟學原理（二冊）
　　（A. Marshall 著、王作榮譯）
*第四種　經濟學原理
　　（T. R. Malthus 著、魯傳鼎譯）
*第五種　壟斷性競爭的理論
　　（E. H. Chamberlin 著、郭婉容譯）
第六種　經濟學原理（二冊）
　　（J. S. Mill 著、周憲文譯）
第七種　經濟學及賦稅原理
　　（D. Ricardo 著、潘志奇譯）
第八種　不完全競爭經濟學
　　（J. Robinson 著、孫　震譯）
第九種　理論經濟學要義（二冊）
　　（L. Walras 著、王作榮譯）
第十種　價格與生產
　　（F. A. von Hayek 著、許大川譯）
第十一種　人口論（二冊）
　　（T. R. Malthus 著、周憲文譯）
第十二種　凱恩斯革命
　　（L. R. Klein 著、李蘭甫譯）
第十三種　線型計劃與經濟分析（二册）
　　（R. Dorfman 等著、余國燾譯）
第十四種　價值與資本
　　（J. R. Hicks 著、邢慕寰譯）
第十五種　利息學說史評述（二册）
　　（E. von Böhm-Bawerk 著、趙秋巖譯）
第十六種　貨幣與信用原理
　　（L. von Mises 著、楊承厚譯）

*表示已缺

臺灣銀行經濟研究室編印

經濟學名著翻譯叢書(二)

第十七種　需求理論之修正
(J. R. Hicks 著、邢慕寰譯)
第十八種　落後國家的資本形成
(R. Nurkse 著、鄔志陶譯)
第十九種　經濟學綱要
(J. Mill 著、周憲文譯)
第二十種　經濟學汎論
(J. B. Say 著、錢公博譯)
第二十一種　經濟成長論文集
(E. D. Domar 著、張溫波、施敏雄譯)
第二十二種　經濟學理論
(W. S. Jevons 著、瞿荊洲譯)
第二十三種　財政政策與景氣循環
(A. H. Hansen 著、譚振民譯)
第二十四種　資本積極理論（二册）
(E. von Böhm-Bawerk 著、趙秋巖譯)
*第二十五種　計量經濟學方法
(J. Johnston 著、王友釗譯)
第二十六種　經濟理論與經營分析（二册）
(W. J. Baumol 著、李蘭甫譯)
第二十七種　資本與利息論文集
(E. von Böhm-Bawerk 著、趙秋巖譯)
第二十八種　財富分配論
(J. B. Clark 著、陸年青、許冀湯譯)
第二十九種　交易論
(N. Barbon、S. D. North 著、周憲文譯)
第三十種　富裕國家與貧窮國家
(Gunnar Myrdal 著、許大川譯)
第三十一種　經濟科學的最後基礎
(L. von Mises著、夏道平譯)
第三十二種　所得、儲蓄與消費者行爲之理論
(J. S. Duesenberry 著、侯家駒譯)

臺灣銀行經濟研究室編印

經濟學名著翻譯叢書(三)

第三十三種　分配經濟學
(J. A. Hobson 著、夏道平譯)
第三十四種　有閑階級論
(Thorstein B. Veblen 著、趙秋巖譯)
第三十五種　經濟動態學
(W. J. Baumol 著、趙鳳培、袁穎生譯)
第三十六種　貨幣理論與財政政策
(A. H. Hansen 著、施敏雄、張溫波譯)
第三十七種　資本積蓄論
(Joan Robinson 著、楊志希譯)
第三十八種　產業關聯經濟學
(H. B. Chenery 等著、張溫波、施敏雄譯)
第三十九種　社會新論
(Robert Owen 著、周憲文譯)
第 四 十 種　黃金與美元危機
(Robert Triffin 著、楊承厚譯)
第四十一種　貨幣安定計劃
(Milton Friedman 著、鄧宗培譯)
第四十二種　控制經濟學
(Abba P. Lerner 著、鄭東榮譯)
第四十三種　經濟科學之性質與意義
(Lionel Robbins 著、閻子桂譯)
第四十四種　經濟科學綱要
(Nassau W. Senior 著、周憲文譯)
*第四十五種　總體經濟學
(Thomas F. Dernburg、D. M. McDougall 著、王友釗譯)
第四十六種　價格原論（二冊）
(H. H. Liebhafsky 著、毛育剛譯)
第四十七種　價格理論
(Milton Friedman 著、侯家駒譯)
*第四十八種　富裕的社會
(J. K. Galbraith 著、吳幹、鄧東濱譯)

臺灣銀行經濟研究室編印

經濟學名著翻譯叢書(四)

第四十九種　十八世紀產業革命史
(A. Toynbee 著、周憲文譯)
第 五 十 種　經濟落後與經濟成長
(Harvey Leibenstein 著、趙鳳培譯)
第五十一種　倫敦貨幣市場
(Walter Bagehot 著、楊承厚譯)
第五十二種　國民經濟學體系
(Friedrich List 著、程光蘅譯)
第五十三種　經濟學方法論
(J. N. Keynes 著、余國燾譯)
*第五十四種　個體經濟理論
(C. E. Ferguson 著、張溫波譯)
第五十五種　貨幣、利息與價格(二册)
(Don Patinkin 著、柳復起譯)
第五十六種　政治算術
(W. Petty 著、周憲文譯)
第五十七種　資本與成長
(J. R. Hicks 著、鄭東榮譯)
第五十八種　個人主義與經濟秩序
(Friedrich A. Hayek 著、夏道平譯)
第五十九種　國際收支論(二册)
(J. E. Meade 著、李蘭甫譯)
第 六 十 種　福利經濟學(二册)
(A. C. Pigou 著、陸民仁譯)
第六十一種　十九世紀產業革命史
(L. C. A. Knowles 著、周憲文譯)
第六十二種　福利與競爭(二册)
(T. Scitovsky 著、侯家駒譯)
第六十三種　新經濟學(二册)
(S. E. Harris 著、趙鳳培譯)
第六十四種　集體行動經濟學
(J. R. Commons 著、周憲文譯)

臺灣銀行經濟研究室編印

經濟學名著翻譯叢書（五）

第六十五種　制度經濟學（二冊）
(J. R. Commons 著、趙秋巖譯)
第六十六種　重商主義論
(Thomas Mun 著、周憲文譯)
第六十七種　計量經濟學
(Dr. Jan Tinbergen 著、林聰標譯)
第六十八種　總體經濟學與政府政策
(B. N. Siegel 著、許文富譯)
第六十九種　經濟學說與方法
(Joseph A. Schumpeter 著、閻子桂譯)
第 七 十 種　經濟分析基礎
(Paul Anthony Samuelson 著、湯愼之譯)
第七十一種　繁榮與蕭條
(G. Haberler 著、許大川譯)
第七十二種　經濟數學（二冊）
(R. G. D. Allen 著、余國燾譯)
第七十三種　工資理論（二冊）
(Paul H. Douglas 著、侯家駒譯)
第七十四種　重農學派
(Henry Higgs著、陳新友譯)
第七十五種　國際貿易與經濟成長
(Harry G. Johnson著、白俊男譯)
第七十六種　經濟學原理（二冊）
(Edwin R. A. Seligman 著(周憲文譯)
第七十七種　資本主義與自由
(Milton Friedman 著、趙秋巖譯)
第七十八種　政治經濟國防講義
(Adam Smith 著、周憲文譯)
第七十九種　開發設計
(Jan Tinbergen 著、李洪鰲譯)
第 八 十 種　貿易與福利（二冊）
(J. E. Meade) 著、李蘭甫譯
第八十一種　數理經濟學（二冊）
(R. G. D. Allen 著、毛育剛譯)

臺灣銀行經濟研究室編印

銀行研究叢刊

*第一種　現代中央銀行發展論
　　　　(R. S. Sayers 著、楊承厚譯)
*第二種　國外滙兌概論（二册）
　　　　(N. Crump 著、何伊仁譯)
*第三種　中央銀行論（二册）
　　　　(M. H. De Kock 著、譚振民譯)
*第四種　現代銀行論（二册）
　　　　(R. S. Sayers 著、楊承厚譯)
*第五種　貨　幣
　　　　(D. H. Robertson 著、楊索仁譯)
*第六種　農業金融（二册）
　　　　(W. G. Murray、A. G. Nelson 著、陸年青、許冀湯譯)
*第七種　銀行公共關係論
　　　　(R. Lindquist 著、趙秋巖譯)
*第八種　銀行管理與經營
　　　　(美國銀行學會編、俞蔚伯譯)
*第九種　日本金融制度（二册）
　　　　(日本銀行編、查復生譯)
第十種　銀行會計
　　　　(美國銀行稽核及會計人員協會編、張炳澂譯)
第十一種　美國外滙實務（二册）
　　　　(W. S. Shaterian 著、嵇惠民譯)
第十二種　英國金融制度（二册）
　　　　(日本金融制度研究會編、查復生譯)
第十三種　美國中小企業金融業（二册）
　　　　(日本生產性本部編、查復生譯)
第十四種　銀行制度（三册）
　　　　(B. H. Beckhart 編、查復生、陸康德譯)

* 表示已缺

臺灣銀行經濟研究室編印

第十三章　數學分析之五：矩陣代數

13.1　引論；代數之基本規則

矩陣代數尙有待於從頭介紹起，因爲學校教室所學到而爲吾人熟悉之算術及代數規則，都不能移用於矩陣，所以要從頭認識。從何處始能得到構成新代數之指引呢？行列式無所助益，因爲行例式是實數而且遵從着熟知之規則。複素數(參看4.5節)可能較好——利用適當規定，能依照熟知之代數程序處理。問題在於此種運算技巧是否能同樣應用在矩陣代數上？答案很明顯：不管如何定義矩陣運算，使矩陣代數儘可能與基本代數相似，兩者仍然有很大之不同。

因此必須避免將基本代數規則直接用於矩陣代數，而不加任何修正。以乘法運算而言，兩矩陣相乘不同於兩個數或兩行列式之相乘，甚至無相似之處，兩矩陣之積仍然有待界定其定義，須要加以選擇。在選擇一合適之定義時，吾人希望能符合熟知之規則，但無須視之爲當然。事實上，熟知之規則用於矩陣乘積上並非完全適合，例如，**a'Aa** 爲向量 **a** 與矩陣 **A** 再與向量 **a'** 之乘積，數之相乘有互換之性質，卽其相乘順序可以互換，而乘積不變，但矩陣則不能如此，將 **a'Aa** 之相乘次序顚倒得到者爲另一不同結果 **aAa'**，卽矩陣相乘時其順序不能互換。

在此吾人有一矛盾之處，設將「乘積」與乘法等名詞用於新界定之矩陣運算上，則很容易造成乘積交換性之錯誤，若此種運算不稱爲「乘法」而稱爲「可相乘」(Conformation)可能較好。不過由於矩陣乘法爲一已經慣用之名詞，另立名目很不實際；但沿用此一慣用之名詞亦無便利之處。要之，記住一些不爲矩陣乘積所服從之規則，可能較應用一新標記略爲容易。

甚麽是基本代數規則呢？這確有値得吾人將之列出之價値，並

分析其習慣用法，然後寫出更一般化之形式。代數所討論者爲元素之集合，此元素可能爲基本代數中之數，但亦可以定義爲任何抽象或具體之個體，例如：多項式，矩陣，轉換式等。因此代數與元素集合 $S=\{a, b, c\cdots\cdots\}$ 有關；代數所討論者爲 S 內之元素 $a, b, c\cdots\cdots$之如何運算。

其中有些運算爲一元形式 (unary type)，即 s 內任一元素變爲 s 內另一元素時，有一定之變換規則，例如：求實數之平方根及矩陣之轉置是。不過二元運算 (binary operations) 更爲重要，每一次都是界定由 s 內任意二元素求得 s 內另一元素之結合律 (rule of combination)，如加法與乘法運算卽是；設 a 與 b 屬於 s，則其和 $a+b$ 亦屬於 s，同理乘積 $a\times b$ 亦然。事實上，由複素數可知，大部份二元運算都爲加法與乘法，二元運算之定義可先以一熟知之例子來說明。設有一正數集合 $N=1, 2, 3, \cdots\cdots$，其和與積之定義可用加法表與乘法表表示如下：

+	1	2	3……
1	2	3	4……
2	3	4	5……
3	4	5	6……
…	………	………	………

×	1	2	3……
1	1	2	3……
2	2	4	6……
3	3	6	9……
…	………	………	………

就集合而言，二元運算可以將不同情形逐一列示，或以適當之加法表與乘法表表示之，此等表列可能有不同的形式。或者二元運算可先用其他運算表示一特定之運算，而最後成爲其他之加法表與乘法表，以三個整數集合 $s\{0, 1, 2\}$ 爲例來討論，設加與乘爲普通之和與積，但再以 3 相除，而將餘數寫於表內，則形成之列精簡如下：

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

在上表中，1+2=3 寫爲 0 ； 2×2=4 寫爲 1。

表 1A 爲數之加法與乘法之運算規則，但爲分類與表示之更精確起見，這些數可以爲任意集合 $s=\{a, b, c \cdots\cdots\}$，此種規則體系能完全應用於有理數之集合上（整數比例）；而繼續推廣到實數與複素數之集合上，有理數集合（與實數或複素亦然）在加法，乘法與逆數運算下皆爲閉合。由逆算規則（$A5$ 和 $M5$）吾人知，$a-b=a+(-b)$ 與 $a/b=a\times b^{-1}$ $(b\neq a)$ 可稱減法與除法，此四種運算之任一種應用在有理數上，所求得者仍爲理數；而不致超出集合以外。

這些規則對於元素之其他集合並非完全滿足，玆以二種情形來

表 1　代數之運算規則

A. 在 $s=\{a, b, c,\cdots\cdots\}$ 內加與乘之運算

規則	加（+）		乘（×）	
閉合	(A1)	$a+b$ 屬於 s	(M1)	$a\times b$ 屬於 s
結合	(A2)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	(M2)	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
交換	(A3)	$a+b=b+a$	(M3)	$a\times b=b\times a$
恒等	(A4)	s 包含 0，則 $a+0=0+a=a$	(M4)	s 包含 1，則 $a\times 1=1\times a=a$
逆	(A5)	s 包含負數 $(-a)$，則 $a+(-a)=(-a+a)=0$	(M5)	s 包含 a 之倒數a^{-1} 則 $a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1$
相消	(A5')	若 $a+b=a+c$ 則 $b=c$	(M5')	若 $a\times b=a\times c$ $(a\neq 0)$ 則 $b=c$
分配	(D)	$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 及 $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$		

B. 純量相乘，$s=\{a, b, c,\cdots\cdots\}$ 內之純量以

$F=\{\lambda, u, v,\cdots\cdots\}$ 純量相乘

閉合	($S1$)	$\lambda\cdot a$　屬於S_1	($S2$)	$o\cdot a=0$ 與 $1\cdot a=a$
結合	($S3$)	$\lambda\cdot(u\cdot a)=(\lambda u)\cdot a$		
分配	($S4$)	$\lambda\cdot(a+b)=\lambda\cdot a+\lambda\cdot b$	($S5$)	$(\lambda+u)a=\lambda a+ua$

說明。正整數集合不包含零與負數在內；雖然有1，但1之倒數爲1，奇整數集合更不服從這些規則，表內加法中第一個規則（閉合律）對於奇整數集合卽不能成立；兩奇整數相加，所得到者非爲另一奇整數，而是偶整數。至於其他實體之集合（如矩陣）其總和與乘積亦在集合內，但吾人只能說運算規則（$A1-5$），（$M1-5$）及 D 爲所希望者，然而並不是非有不可，吾人希望這些規則都能成立；若有不成立時，則將運算方法指出。

有二規則（$M3$）與（$M5$），卽乘法之交換與逆規則，在實際應用時常不成立，尤其是矩陣之相乘。並非所有的矩陣都能相乘；只有在倒數存在之特殊情形下，或在極少見之乘數可以互換之情形下，乘法之互換性在吾人經驗上印象很深刻，以致處理矩陣問題時，若將等號劃一斜線寫爲 $A\times B\neq B\times A$ 很難令人置信。

特別要注意者爲逆規則（$A5$）與（$M5$）。表內亦有相消規則以（$A5'$）及（MS'）表示之，實則爲逆規則之另一種表示方法。在此關係中，乘法是較爲重要之運算，設（$M5$）成立，則一非零元素 a 有倒數 a^{-1}，而除以 a 是可能的（卽與倒數相乘），則（$M5'$）亦成立，爲兩端除以 a 而得，但相反情形非爲眞，相消規則（$M5'$）可能成立，而無倒數或除法（卽 $M5$ 非眞）。在正整數之集合上卽如此。因此有下列之結果：

取（$M5$）並有除數且能相消；

或取（$M5'$）能相消而不能相除。

表2　主要之代數體系

體系	運算	有效規則	例子
群	積	M1，2，4，5	非異線型轉換 非異矩陣
積分變域	和與積	A1−5, D, M1−4, M5'	積分，多項式，積分係數
領域	和與積	A1−5, D, M1−5	有理數、實數、複素數

向量空間	和與純量乘積	A1－5 S1－5	m 度空間向量，$m\times n$ 階矩陣
線型代數	和、積及純量乘積	A1－5, D, S1－5 M1, 2, 及其他	有理分數（多項式比例）$n\times n$ 階矩陣

※代表一環結構，即規則（$A1-5$），D 與（$M1-5$）爲最小。規則（$M5'$）爲（$M5$）之軟弱代替，有理數或實數可滿足（$M5$）；而較弱之（$M5'$）只在整數時成立。矩陣既不滿足（$M5$）亦不滿足（$M5'$）。

其他較數之性質爲複雜的元素集合之運算方法可另定之。最有用者爲純量相乘之運算，在12.4節討論向量時曾經說過。$s=\{a, b, c\cdots\cdots\}$ 爲任意元素集合，而另一集合 $F\{=\lambda, u, v,\cdots\cdots\}$ 爲純量元素集合（通常爲實數）。由 F 中取一純量設爲 λ，作爲乘數與 s 中之元素 a 相乘求得純量積 $\lambda.a$，成爲 s 內之另一元素，可以滿足之規則有五，如表 1B 中（$S1-5$）所示。

現代代數之發展乃欲解決所有各種體系之代代數運算者。有各種實體之集合，各體系有其特定之運算，使之或多或少滿足表 1 中所列之運算規則。代數體系之範圍是極濶而多變者。由表 2 得知其所包括之領域，此表只簡略將較爲重要的代數體系型態列出，而每一種都舉了一些例子。

表 2 內有二體系曾經應用過。在12.3與12.6節界定矩陣與向量時，曾介紹實數領域 F，既可爲矩陣及向量成分，亦可作爲純量來用。有理數領域或複素數領域亦有同樣之功用。向量代數是如此發展，使向量空間所需之規則可以滿足（參閱12.4節習題第四與第五題）。此處之向量體系是向量空間之一例。

習　題 13.1

1. 有理數集合包含所有之 p/q，其中 p 與 q 爲整數（正、負及零），試證：

此集合在加、減、乘、除之運算下，爲自我包容者（self-contained）。

2. 試證前題集合之性質在下列集合內不能成立：(a) 所有整數；(b) 偶整數；(c) 奇整數。在每種情形下，何種運算超出集合外。
3. 只要交換律成立，則分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 等於 $(b+c)a=ab+ac$，設交換律不成立，則上式是否成立？
4. $x+y\sqrt{2}$（x 與 y 爲有理數）之集合較有理數領域更廣，而較實數領域爲小。試證：此集合亦爲一領域。

13.2 矩陣運算示例

下面之說明可指出矩陣之一個應用範圍，而顯示矩陣之加法與乘法所用之方法絕不相同。此處之說明限於簡單之情形，即向量爲二階而矩陣爲 2×2 之形式，在此種情形下，才能將全部運算過程寫出。

二個變數之線型變換式爲：

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式（1）包含一正方矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 以及代表原變數（x_1, x_2）之向量與新變數（y_1, y_2）之向量。式（1）之簡明記號可由矩陣記號與內積概念（12.8節）而來。取矩陣 $\mathbf{A}$ 與變數 $x's$ 所排成之列向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 相連而形成二個內積（$a_{11}x+a_{12}x_2$）及（$a_{21}x_1+a_{22}x_2$）。由式（1）知，此二者爲列向量 $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 之元素，其演算過程可視爲矩陣與向量相乘之定義，如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

或簡明式爲：

$$\mathbf{AX}=\mathbf{y}$$

此種定義一旦建立後，線型變換（1）變爲：

$$\mathbf{y}=\mathbf{AX} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

其次，以二個線型變換式來考慮，一爲由原變數（$x's$）變換爲新變數（$y's$），另一則爲原變數變換爲另一新變數（$z's$）之集合。因此式（1）之全式爲：

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad 與 \quad z_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \qquad z_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2$$

取變數 $u's$ 爲相應之 $y's$ 與 $z's$ 之總和，即：

$$u_1=y_1+z_1 \quad , \quad u_2=y_2+z_2$$

此時之問題在如何以 $x's$ 來表示 $u's$，即如何由 $x's$ 求得「相加」變換式 $u's$，其解答很簡單：

$$u_1=(a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2$$
$$u_2=(a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2$$

上式之矩陣爲由 2×2 個元素組成，每一元素均爲矩陣 $a's$ 內與矩陣 $b's$ 內相應之一元素之和可定義爲：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

即　　$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$　此處 $c_{rs}=a_{rs}+b_{rs} \quad (r,s=1,2)$ ……………(3)

此種「加法」變換之過程，用矩陣記號如式（3），可簡寫爲：

已知二線型變換式 $\mathbf{y}=\mathbf{AX}$ 與 $\mathbf{z}=\mathbf{BX}$，則 $\mathbf{u}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$ 之線型變換式爲 $\mathbf{u}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{X}$。

進而再討論二線型變換式，先由變數 $x's$ 變換爲變數 $y's$，而再變換爲變數 $z's$，則式（1）之全式爲：

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad 與 \quad z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \qquad z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2$$

問題仍爲如何以 $x's$ 來表示 $z's$，$x's$ 變換爲 $z's$ 可被視爲二個原變數變換式之「乘法」。由簡單替代法可求得其解答爲：

$$z_1=b_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2)$$

$$z_2=b_{21}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{22}(a_{21}x_1+a_{22}x_2)$$

亦卽 $z_1=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})x_1+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})x_2$

$$z_2=(b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})x_1+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})x_2$$

此處之矩陣爲由矩陣 $a's$ 及 $b's$ 元素之內積所組成。由此可表示二矩陣相乘之結果：

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}) \\ (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

卽 $\mathbf{BA}=\mathbf{C}$，式中 $c_{rs}=\sum_{p=1}^{2} b_{rp}a_{ps} \quad (r,s=1,2)$ ……………… (4)

此種連續應用變換式之過程，或彼此相乘，若應用矩陣記號來表示更簡單：

已知線型變換 $\mathbf{y}=\mathbf{AX}$ 與 $\mathbf{z}=\mathbf{By}$，則由 $\mathbf{X}$ 變換爲 $\mathbf{z}$ 之變換式 $\mathbf{z}=(\mathbf{BA})\mathbf{X}$

最後，再討論相同形式之連續變換，但變換之方向不同，並非由 $x's$ 變換爲 $y's$ 再變換爲 $z's$，而是以 $x's$ 來示 $y's$ 然後再以 $z's$ 來表示 $x's$。全部寫出爲：

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad 與 \quad x_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2$$

$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \qquad x_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2$$

由上式可得 $y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2$

$$y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2$$

因此，第二個乘積定義爲：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

卽 $\mathbf{AB}=\mathbf{D}$，此處 $d_{rs}=\sum_{p=1}^{2} a_{rp}b_{ps} \ (r,s=1,2)$ ………………… (5)

此連續變換以矩陣記號表示爲：

已知線型變換 $\mathbf{y}=\mathbf{AX}$ 與 $\mathbf{X}=\mathbf{Bz}$，則由 $\mathbf{z}$ 變換爲 $\mathbf{y}$ 之變換爲 $\mathbf{y}=(\mathbf{AB})\mathbf{z}$。