中学复习参考书

数学

ZHONGXUEFUXI CANKAOSHU

四川人民出版社

中学复习参考书

数　　学

四川人民出版社

一九八二年·成都

中学复习参考书　　数　学

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
重 庆 出 版 社 重 印　重庆印制一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米 1/32　印张16　字数350千
1982年1月第1版　1982年1月重庆第1次印刷
印数：1—60,300册

书号：7118·601　定价：1.10元

出版者的话

复习是教学过程中的重要阶段之一，它对巩固所学知识和加深理解有着重要的作用。教学大纲指出：要“加强复习巩固”。为了帮助高中程度的青年系统复习和掌握基础知识，作好升学或就业的准备，我们出版了这套“中学复习参考书”，首先是为了满足缺乏教师指导的社会青年的需要，也可供应届高中毕业生复习参考。

这套“中学复习参考书”包括《政治》《语文》《历史》《地理》《数学》《物理》《化学》《生物》《英语》，是在原中学各科“基础知识概要”基础上修订再版的。在修订中，根据读者的意见和要求，对原书内容有的作了抽换和调整，有的进行了删削和补充，同时还对原书中的疏漏错误一一作了订正。《数学》《英语》《语文》《政治》，由于内容改动较大，故重新排版。经过修订，这套书的内容更符合大纲的要求，同教材的结合更为紧密，对基础训练有所加强，突出了重点、难点，能适应读者复习参考。

这本《数学》在修订中，对读者要求习题的深度、广度和综合运用等方面应有所加强的建议，在每一部份之后适当配备了“复习题”，供选用。

参加这本《数学》编写和修订的有：刘明福、刘积全、罗介玲、刘志国、聂洪泽等。由于时间紧迫，书中仍可能有缺点错误，我们希望读者继续提出意见，以便改进。

一九八一年九月

目　　录

代　　数

三　　角

平 面 几 何

立体几何

平面解析几何

微积分初步

代　　数

代数学是用字母代表数来研究数的运算和规律的科学，在近代数学中，代数学研究已由数扩大到其它一些对象．本书的代数部分只讲在现行中学数学范围内的数、代数式、方程、函数等几个主要部分、逻辑代数虽然已纳入现行中学课本里，但在我省只有个别学校教了这一部分，所以暂缺．

第一章　数

数的系统表

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数（当$b=0$）
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
        - ——可化为
          - 有限小数
          - 无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - ——即无限不循环小数
  - 虚数（当$b\neq0$）
    - 纯虚数（当$a=0$）
    - 非纯虚数（当$a\neq0$）

一　实　　数

1．实数的有关概念

（1）实数与数轴　整数和分数统称有理数。任一个有理

数都可用$\frac{q}{p}$表示（p，q为互质整数，且$p\neq0$）．无限不循环小数叫无理数．有理数和无理数统称实数．

规定了原点、方向和长度单位的直线叫数轴．实数和数轴上的点是一一对应的．在数轴上表示的两个实数，右边的实数总比左边的实数大．

(2) 相反数与绝对值

若a是实数，$-a$与a互为相反数（0的相反数是0）；$|a|$叫a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant0 \text{ 时,} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时.} \end{cases}$

2． 实数的运算

(1) 四则运算法则

法则 / 原数 / 运算	同号两数		异号两数	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减（大-小）
减	减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法作．			
乘	+	相乘	−	相乘
除	+	相除	−	相除

(2) 乘方、开方运算法则

Ⅰ．乘方运算

$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}}$． 其中$a$叫底数，$n$叫指数，$a^n$叫幂．

当 $a=0$ 时，$a^n=0$；　　当 $a>0$ 时，$a^n>0$；

当 $a<0$ 时，n 为偶数，$a^n>0$；

n 为奇数，$a^n<0$.

Ⅱ. 开方运算

若 $x^n=a$，则 x 叫做 a 的 n 次方根（n 为正整数）. 求一个数的方根的运算，叫开方. a 叫被开方数，n 叫根指数.

在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数. 正数的偶次方根是互为相反数的两个数. 负数不能开偶次方.

正数的正的方根叫算术根，零的算术根是零.

在 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt[n]{a}$ 表示算术根.

当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

正数 a 的偶次方根的负值用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示.

3. 实数的运算定律

(1) 交换律　$a+b=b+a$；$ab=ba$.

(2) 结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(ab)c=a(bc)$.

(3) 分配律　$a(b+c)=ab+ac$.

4. 运算顺序

先算第三级运算（乘方、开方），再算第二级运算（乘、除），最后算第一级运算（加、减）. 如果有括号，就先算括号里面的. 同级运算从左至右，依次进行.

例1　设 x 是任意实数，化简 $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}+\dfrac{|x-1|}{x-1}$，

$(1<x<2)$.

解　$\because$　$1<x<2$，

$\therefore$　$x-2<0$　且　$x-1>0$.

$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2}=2-x$，$|x-1|=x-1$.

故 原式$=\dfrac{2-x}{x-2}+\dfrac{x-1}{x-1}=(-1)+1=0$.

例2 比较下列两数的大小：

(1) $\sqrt{5-a}$ 和 $\sqrt[3]{a-6}$； (2) 18^{16} 和 16^{18}；

(3) $\sqrt{5}+\sqrt{10}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt{12}$.

解 (1) 由 $\sqrt{5-a}$ 得 $a\leqslant 5$，

$\therefore\ a-6<0$，$\sqrt[3]{a-6}<0$.

而 $\sqrt{5-a}\geqslant 0$，

故 $\sqrt{5-a}>\sqrt[3]{a-6}$.

(2) $\because$

$$\frac{16^{18}}{18^{16}}=\left(\frac{16}{18}\right)^{16}\cdot 16^2=\left(\frac{64}{81}\right)^8\cdot 2^8$$

$$=\left(\frac{128}{81}\right)^8>1,$$

$\therefore\ 16^{18}>18^{16}$.

(3) $\because\ (\sqrt{5}+\sqrt{10})^2=15+10\sqrt{2}$，

$(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2=27$，

$\therefore\ (\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2$

$=10(\sqrt{2}-1\cdot 2)>0$.

因而 $(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2>(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2$，

$\therefore\ \sqrt{5}+\sqrt{10}>\sqrt{3}+\sqrt{12}$.

说明：a、b为正数，若$\dfrac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若$\dfrac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若 $\dfrac{a}{b}<1$，则 $a<b$.

例3 证明$\sqrt{2}$是无理数.

证明 假设$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可以表示成分数.

即 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中 m、n 是自然数，且 m、n 互质）。

$\therefore\quad 2=\frac{n^2}{m^2}$，$n^2=2m^2$，

n^2 是偶数，n 也是偶数。

设 $n=2p$，那么 $m^2=2p^2$，

$\therefore\quad m$ 也是偶数.

这样，m、n 都是偶数，与 m、n 互质的假设矛盾。

故 $\sqrt{2}$ 不是有理数，而是无理数.

习　题　一

1. 若 a 为实数，比较下列每对数的大小：

   (1) a 和 $-a$；　　(2) a 和 $|a|$；

   (3) a^{13} 和 a^{12}；　　(4) a 和 $\frac{1}{a}$；

   (5) $\frac{a}{a+1}$ 和 $\frac{a-1}{a}$；　　(6) $\sqrt{a}$ 和 a；

   (7) $\sqrt{2-a}$ 和 $\sqrt[3]{a-4}$.

2. 下列各题是否正确，举例说明.

   (1) 若 $a=b$，则 $|a|=|b|$；(2) 若 $|a|=|b|$，则 $a=b$；

   (3) 若 $a>b$，则 $|a|>|b|$；(4) 若 $|a|>|b|$，则 $a>b$.

3. 已知 $|a|=1$，$|b|=3$，求 $a+b$ 的值.

4. $a-|a|$ 一定不是正数，为什么？

5. 证明：

   (1) 相邻两个奇数的和能被 4 整除；

   (2) 相邻两个偶数的和能被 2 整除，但不能被 4 整除；

   (3) 奇数与偶数之和是奇数，两奇数之和是偶数；

   (4) 四个连续自然数的积与 1 的和必为某一数的平方. [提示：$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$]

6. 计算下列各题：

(1) $(-5)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+(-7)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+12\times\left(-3\frac{6}{7}\right)$；

(2) $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1$；

(3) $\left[2\frac{1}{3}\times\left(-1\frac{2}{7}\right)+\left(-5\frac{1}{3}\right)\div\left(-1\frac{7}{9}\right)\right]^2$；

(4) $\left\{\left[4\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+(-0.4)\times\left(-6\frac{1}{4}\right)\right]\div\left(-\frac{3}{5}\right)-20\right\}\times(-1)^{37}$；

(5) $\frac{1}{(-0.1)^3}+\frac{1}{(-0.1)^4}$；

(6) $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|-\sqrt{(-3)^2}$.

7. 计算下列各题：

(1) $\sqrt{81}-(-\sqrt{0.81}-\sqrt{0.081})$，(精确到0.01)；

(2) $\sqrt{2156}+\sqrt{0.3285}+\sqrt{5}-\sqrt{0.0826}$，(保留三位有效数字)。

8. 试在数轴上找出下列关系的a所对应的点的位置或范围：

(1) $|a-2|=4$；　(2) $|a-2|>4$；　(3) $|a-2|<4$.

9. 在实数集合内，当a取什么数值时，下列各式才有意义？

(1) $\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$；　(2) $\sqrt[3]{3a-1}+\sqrt[3]{1-2a}$；

(3) $\sqrt{\frac{2a-1}{2-a}}$；　(4) $\sqrt[5]{\frac{a}{a-1}}$.

10. 用几何方法，在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点的位置，并用代数方法证明$\sqrt{3}$是无理数。

11. 证明：(1) 两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)是有理数；(2) 两个无理数的和、差、积、商(除数不为零)是无理数吗？

二 复 数

1. 复数的有关概念和性质

(1) 虚数单位 i 的性质

Ⅰ. $i^2=-1$. i 能和实数一起，按照四则运算的法则进行计算.

Ⅱ. i 的乘方具有周期性.

$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$，(n 是整数).

(2) 复数的有关概念

Ⅰ. 实部与虚部　实数 a、b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部与虚部.

Ⅱ. 复数相等

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$，$b=d$.

特别地　$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$，$b=0$.

两个复数，如果都是实数，可以比较它们的大小；如果不全是实数，就不能比较它们的大小。

Ⅲ. 复数的绝对值（复数的模）

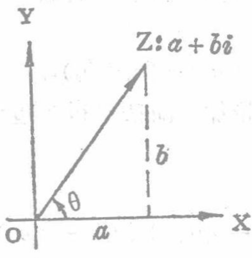

图 1—1

图1—1 中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 r 叫做复数 $a+bi$ 的模（或绝对值）. 记作 $|a+bi|$. 容易从图中看出 $|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ⅳ. 共轭复数　若两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数（当虚部不等于零时也叫共轭虚数）. 复数 Z 的共轭复数用 $\overline{Z}$ 表示.

共轭复数有以下性质：

若　$z=a+bi$，$\bar{z}=a-bi$，则

（i）z和 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点关于实轴对称；

（ii）$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$；

（iii）$z+\bar{z}=2a$；

（iv）$z-\bar{z}=2bi$；

（v）$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2$.

2．复数的表示形式

(1) 代数形式：$z=a+bi$;

(2) 几何形式：z：点$Z(a, b)$或向量$\overrightarrow{OZ}$；

复数集除与复平面内的点集一一对应外，它与复平面内所有从原点出发的向量所组成的集合之间也是一一对应的.

(3) 三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r$ 是模，θ 是幅角，其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角称为幅角的主值. 显然有：

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\qquad \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

*(4) 复数的指数式　$Z=re^{i\theta}$.

3．复数的运算

(1) 加、减运算一般用代数式运算（按多项式加、减法运算法则进行）.

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

复数加、减法的几何意义（向量加、减按平行四边形法则进行）.

(2) 乘法运算

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

注：有*符号的，表示选学或选做。下同。

（3）除法运算

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\quad（将分母实数化）$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

（4）乘方运算

用棣美弗定理：

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

（5）开方运算

复数的n次方根有n个值，它们的模都等于这个复数的模的n次算术根，它们的幅角分别等于这个复数的幅角与2π的0，1，2，…，$(n-1)$倍的和的n分之一.

实数的四则运算定律对复数的四则运算仍然适用. 复数的加、减、乘、除、乘方、开方的结果仍是复数，因此，加、减、乘、除、乘方、开方运算在复数集内是永远可以实施的. 而对于复数集的真子集实数集来说，加、减、乘、除、乘方在实数集内是永远可以实施的，但开方运算就只有在某种特殊情况下才可能进行.

例 1　实数m取什么值，复数$(3m-2)+(m-1)i$

（1）对应的点位于复平面的第四象限？

（2）为纯虚数？　　（3）等于其共轭复数？

（4）模为$\sqrt{17}$？

解　（1）复数$(3m-2)+(m-1)i$对应的点要在第四象限，

必须且只须$\begin{cases}3m-2>0,\\ m-1<0.\end{cases}$　解得$\frac{2}{3}<m<1$.

故　当$\frac{2}{3}<m<1$时，该复数对应的点位于复平面的第

四象限.

(2) 复数$(3m-2)+(m-1)i$要为纯虚数，必须且只须

$$\begin{cases}3m-2=0,\\ m-1\neq 0.\end{cases}\quad 即m=\frac{2}{3}.$$

故　当$m=\frac{2}{3}$时，该复数为纯虚数.

(3) 复数$(3m-2)+(m-1)i$的共轭复数为

$(3m-2)-(m-1)i$,

要　$(3m-2)+(m-1)i=(3m-2)-(m-1)i$,

必须且只须　$-(m-1)=m-1$，解得$m=1$.

故　当$m=1$时，复数$(3m-2)+(m-1)i$等于它的共轭复数.

(4) 要使复数　$(3m-2)+(m-1)i$的模为$\sqrt{17}$，必须且只须$\sqrt{(3m-2)^2+(m-1)^2}=\sqrt{17}$,

$(3m-2)^2+(m-1)^2=17$,

$5m^2-7m-6=0$,

$(5m+3)(m-2)=0$,

$\therefore\quad m_1=-\frac{3}{5}$, $m_2=2$.

故　当$m=-\frac{3}{5}$或$m=2$时，该复数的模为$\sqrt{17}$.

例 2　若复数$z\neq -1$，$|z|=1$，证明$\frac{z-1}{z+1}$是纯虚数.

证明　设$z=a+bi$,

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{a-1+bi}{a+1+bi}=\frac{(a^2+b^2-1)+2bi}{(a+1)^2+b^2},$$

$\because\quad |z|=1$，即$a^2+b^2=1$，又　$a+bi\neq -1$,

$\therefore \quad a \neq -1, \ b \neq 0,$

$$\therefore \quad \frac{z-1}{z+1}=\frac{2bi}{(a+1)^2+b^2}\text{为纯虚数.}$$

例 3　在复数集内解方程　$x^3-1=0$.

解　$\because \quad x^3=1$，而$1=\cos 0+i\sin 0$,

$$\therefore \quad x=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}$$

（k取0，1，2.）

$$\therefore \quad x_1=1, \quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

说明：形如 $a_0x^n+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$ 的方程叫做二项方程．任何二项方程都可以化成 $x^n=b$ 的形式，因此，都可以用复数开方的方法来解，且有 n 个解.

例 4　已知　$|x|-x=1-2i$，x为复数，求x.

解　设 $x=a+bi$，则 $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}-a-bi=1-2i.$

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1,\\ -b=-2.\end{cases}$$

$$\text{解得,}\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\ b=2.\end{cases}$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}+2i.$$