三角级数论

（上 册）

陈 建 功 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是作者三十余年来为研究生讲授三角级数论所用讲义几经修改整理而成。上册除准备知识外，共四章。第一章富理埃级数的收敛，阐述富理埃级数及其共轭级数的收敛问题，包括各种收敛定理及判定方法。第二章富理埃级数的和，阐述各种求和方法及可求和条件。第三章富理埃级数的强性求和以及概收敛，阐述了强性可和及概收敛的有关理论，讨论了零系数特别多的级数。第四章富理埃级数的绝对收敛与绝对求和，阐述了几种绝对求和法，它的充要条件，绝对收敛等。书中包含了作者的一系列工作，同时系统地阐述了近代的重要结果。

本书可供高等学校数学系高年级学生、研究生、科研工作者阅读。

三 角 级 数 论

（上 册）

陈 建 功 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 11.5　字数 313,000

1964 年 12 月第 1 版　1984 年 6 月第 3 次印刷

印数51,001—53,300

书号：13119·586　　定价：1.30 元

序

著者于1929年，遵指导教师藤原松三郎先生的嘱咐，用日本文写成《三角級数論》，于1930年在东京岩波书店出版．从1939年起，在浙江大学（当时校址在貴州湄潭）指导研究生，就以上述三角級数論为基础，作成三角級数的讲义，历年都有修改．到了1960年，将讲义重新整理，添入挽近材料，以授杭州大学的研究生，仍称这部讲义为三角級数論．由于内容較之原来的日文书，丰富許多，难免有許多未妥之处，希望高明有以教我，不胜感盼．

陈建功

一九六三年十一月八日

目　录

序

三角級数・富理埃級数 ………… 1

1. 定义 ………… 1
2. 直交函数列 ………… 3
3. 三角函数系的完备性 ………… 6
4. 平方可积的函数 ………… 7

第一章　富理埃級数的收斂 ………… 11

1. 富理埃級数的运算 ………… 11
2. 黎曼和勒貝格的定理 ………… 18
3. 狄里克莱积分和收斂的局部性 ………… 20
4. 有界变差的函数 ………… 26
5. 有界变差的平均函数 ………… 29
6. 楊格的收斂定理 ………… 31
7. 勒貝格的收斂定理 ………… 35
8. 勒貝格定理的拓广 ………… 41
9. 累次平均函数 ………… 46
10. 連續和收斂 ………… 51
11. 混合判定法 ………… 55
12. 共軛級数的收斂問題 ………… 61

第二章　富理埃級数的和 ………… 67

1. 富理埃級数的和 ………… 67
2. 富理埃級数可用正則 T 求和法求和的情况 ………… 74
3. 阶 α 大于 -1 的 (C, α) 求和法 ………… 81
4. 对称点求和法 ………… 91
5. 求和过程中的吉勃斯現象 ………… 95
6. 共軛級数及一級数 ………… 105

7. 富理埃級数的导級数……111
8. 在勒貝格点．凸性数列……118
9. 从有界变差函数产生的三角級数……125
10. 脑兹揚求和定理中的連續性条件……128
11. 用蔡查罗求和法可以求和的条件……136
12. 蔡查罗的平均函数……146
13. 負数級的蔡查罗平均法……148
14. 共軛級数的和……154
第三章 富理埃級数的强性求和以及概收斂……173
1. 富理埃級数的强性求和……173
2. 几乎收斂的級数……186
3. 富理埃級数及其共軛級数的概收斂……198
4. 利用𠂆級数的性质来研究三角級数……209
5. 平均連續性与概收斂……213
6. 从 $\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)<\infty$ 决定概收斂的部分和叙列……222
7. 零系数特别多的級数……230
8. 再論零系数特别多的富理埃級数……245
9. 零系数特别多的𠂆級数……257
第四章 富理埃級数的絕对收斂与絕对求和……263
1. 著名的几种絕对求和法……263
2. 求和法 $|C, \alpha|$……268
3. 富理埃級数的 $|C, \alpha|$ 普遍求和……276
4. 三角級数的絕对收斂……282
5. Lip 1/2 中的函数以及其他边緣情况……289
6. 富理埃級数 $|C, \alpha|$ $(\alpha>0)$ 求和的充要条件……292
7. 有关 $|C, \alpha|$ 求和的一个等式……305
8. 加强絕对平均法 $l|C, \alpha|$……329
9. 富理埃級数在 $|C|$ 可求和的点……333
10. 負数級的求和法 $|C, -\alpha|$ $(0<\alpha<1)$……334
11. 富理埃系数与 $|C, \alpha|$ 求和．連續模数与 $|C,\alpha|$ 求和．$|C,\alpha|$ 求和因子……348
12. 絕对黎斯求和．絕对縟棱特求和……353
索引……357

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

三角級数·富理埃級数

1. 定　义

假如 $a_0, a_1, \cdots; b_1, b_2, \cdots$ 等数与变数 x 沒有关系，那末称

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是**一个三角級数**．(1) 的**系数** a_n, b_n 都是实数，第一项的 $\frac{1}{2}$ 是为方便(詳明于后)起見而引入的．写着 $z=e^{ix}$，那末 (1) 是一級数

$$(2)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$$

的实部；称 (2) 的虛部

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

为 (1) 的**共軛級数**．例如：当 $0\leqslant r<1$, $z=re^{ix}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，一級数 $\frac{1}{2}+z+z^2+\cdots=\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}$ 的实部

$$P_r(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

和虚部

$$Q_r(x)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx$$
$$=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

都是收斂的三角級数，$P_r(x)$ 和 $Q_r(x)$ 是互相共軛的．由于

$$\frac{1+z}{1-z}\,\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{1-r^2+2ir\sin x}{1-2r\cos x+r^2},$$

所以

$$P_r(x)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x+r^2)},$$

$$Q_r(x)=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

写着 $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$，$\bar{c}_k=c_{-k}$，$b_0=0$，那末 (1) 的最初 $n+1$ 项的和

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{(a_k-ib_k)e^{ikx}+(a_k+ib_k)e^{-ikx}\}$$

等于 $\sum\limits_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$．称 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ 为(1)的复数形式，或是罗朗(Laurent)級数的形式．当 $a\neq0$ 时，記

$$a=|a|\operatorname{sgn}a;$$

当 $a=0$ 时，規定 $\operatorname{sgn}a=0$．那末，(1)的共軛級数(3)可以写成罗朗級数的形式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-ic_k\operatorname{sgn}k\cdot e^{ikx}. \tag{4}$$

研討級数的性质，往往用到阿培耳(Abel)变换．設

$$U_k=u_0+u_1+\cdots+u_k,\quad U_{-1}=0,$$

則 $\sum\limits_{k=m}^{n}u_kv_k=\sum\limits_{k=m}^{n}(U_k-U_{k-1})v_k$．从而得到**阿培耳变换**：

$$\sum_{k=m}^{n}u_kv_k=\sum_{k=m}^{n-1}U_k(v_k-v_{k+1})-U_{m-1}v_m+U_nv_n. \tag{5}$$

当級数 $\sum|v_k-v_{k-1}|$ 收斂时，称 $\{v_k\}$ 是一个**有界变差的数列**．利用(5)，

我們就能証明下述

定理 假設 $v_0, v_1 \cdots$是一个有界变差的数列;在区間$[a, b]$上,級数 $\sum u_n(x)$是均匀有界,那末級数 $\sum v_n^* u_n(x)$ 在$[a, b]$上均匀收斂,这里 $v_n^* = v_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

事实上, $v_n = v_0 + (v_1 - v_0) + \cdots + (v_n - v_{n-1})$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是有极限的. 于(5), 設 $m=0$, $U_k = U_k(x)$, $U_{-1}(x)=0$, 則当$|U_k| \leqslant K$时,我們見到

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k^* = \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n^* .$$

右方的 $|U_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant K|v_k - v_{k+1}|$, 从而 $\sum U_k(v_k - v_{k+1})$ 絕对的匀斂*). 注意到 $U_n v_n^*$ 匀斂于0, 就知 $\sum u_k v_k^*$ 匀斂.

例 当 $a_n \to 0$ 时,在区間$[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$上两个級数 $\sum a_n \cos nx$ 和 $\sum a_n \sin nx$ 都匀斂.

事实上, $1 + \cos x + \cdots + \cos nx$ 和 $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ 分別是$(1 - z^{n+1})/(1-z)$ $(z = e^{ix})$的实部和虛部,它們在$[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$中是有界的.

2. 直交函数列

当函数 $\varphi(x)$在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 中是可測, 并且$[\varphi(x)]^2$在$[a, b]$上的积分存在时, 我們說 $\varphi(x)$ 在$[a, b]$中是一个平方可积函数, 記着 $f(x) \in L_2(a, b)$, 或是 $f \in L^2(a, b)$.

設 $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 假如

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \lambda_n > 0 & (m = n), \end{cases}$$

那末称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的**一列直交函数**. 当 λ_n 都等于1时, 称 $\{\varphi_n(x)\}$在$[a, b]$上是**就范的**.

設 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$在$[a, b]$上是一列就范的直交函数,当积分

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n=0, 1, \cdots)$$

*) 我們叫絕对收斂并且均匀收斂的級数为絕对的匀斂.

都存在时,称 $c_0, c_1, \cdots$ 为 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**富理埃**(Fourier)**系数**,称級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 为 $f(x)$ 的**富理埃級数**,我們記着

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x).$$

函数列 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在区間 $(-\pi, \pi)$ 上成直交系,其中任一函数平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都等于 π。当 $f(x)\in L(-\pi, \pi)$ 时,得到 $f(x)$ 的富理埃系数:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

我們称三角級数(1)为 $f(x)$ 的富理埃級数,写着

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{6}$$

本篇专論三角級数,有时記(6)的右方为 $\mathfrak{S}[f]$. 又記(6)的共軛級数为 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$.

下述定理是富理埃級数的初步性質:

定理 (i) 假如 a 和 b 都是常数,那末

$$\mathfrak{S}[af+bg]=a\mathfrak{S}[f]+b\mathfrak{S}[g].$$

(ii) 假如三角級数(1)匀斂于 $f(x)$, 那末,(1)就是 $\mathfrak{S}[f]$.

(iii) 偶函数的富理埃級数是余弦級数. 奇函数的富理埃級数是正弦級数.

【証明】 (i) 是明显的. (ii) (1)匀斂于 $f(x)$ 的話, $f(x)$ 是連續的,从而当 $n>0$ 时,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}nx\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}nx\cos kx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}nx\sin kx\,dx$$

$$=\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix};$$

此式当 $n=0$ 时也成立，但 $b_0=0$. 这就証明了(ii).

(iii) 当 $f(-x)=f(x)$ 时，$f(x)\sin kx$ 在$[-\pi,\pi]$上的积分是 0，所以 $b_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$. 若 $f(-x)=-f(x)$，則 $f(x)\cos kx$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的积分等于 0，从而 $a_k=0(k=0,1,\cdots)$.

对于取复数值的函数列 $\varphi_n(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b;\ n=0;\ 1,2,\cdots)$，假如

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx=\delta_{nm},$$

这里 $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nm}=0(n\neq m)$ 那末說：$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上成一个就范的直交函数列. 例如在$[-\pi,\pi]$上，函数列$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}(n=0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots)$是直交而就范的. 当实函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可以 L 积分时，它的 $\mathfrak{S}[f]$ 可以写成复数形式

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}, \tag{7}$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

写着 $2c_n=a_n-ib_n$，那末(7)就可以化成(6)的形式.

适合恒等式 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的 $f(x)$，称它做以 2π 为周期的周期函数. 当 $f(x)$ 在任何有限区間上可以积分时，如果 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ 的話，积分

$$\int_a^{2\pi+a}f(x)dx$$

的值无关于 a.

关联着(6)，我們有系数公式——欧拉(Euler)公式——

$$\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{8}$$

当这些积分都是在黎曼的意义下存在时，称(6)是一个黎曼-富理埃級数；假如 $f(x)\in L(-\pi,\pi)$，那末(6)是一个勒貝格-富理埃級数，簡称富理埃級数. 一般地說：当(8)都依某种意义存在时，称(6)为某种意义

的富理埃級数. 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 都是富理埃級数, 那末当 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$ 时, $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 是相同的. 在下面这一节里, 我們将証这个結果, 成立着逆定理.

3. 三角函数系的完备性

設 $\varphi_n(x)\ (n=0, 1, \cdots)$ 是 $[a, b]$ 上的一列直交函数. 假如等式

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=0 \quad (n=0, 1, \cdots)$$

常包含 $f(x)\doteq 0$ (几乎处处等于 0), 那末說 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区間 $[a, b]$ 上成**一完备系統**.

定理　三角函数 $1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成一完备系統.

【証明】　首先对于連續函数 $f(x)$, 从 $f(x+2\pi)=f(x)$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\, dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

导出 $f(x)=0$. 假如 $f(x)\neq 0$, 知道必有如下的正数 ε 和 $[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset[-\pi, \pi]$:

$$f(x)\geqslant\varepsilon \quad (x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta).$$

我們不妨假設 $x_0=0$. 函数 $T(x)=(1+\cos x-\cos\delta)^n$ 是一三角多項式, 从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)dx=0.$$

但是这个积分大于

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)T(x)dx-\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x)|dx$$

$$>\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} T(x)dx-\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)|dx-\int_{\delta}^{\pi}|f(x)|dx.$$

第一个积分大于

$$\int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta}\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n dx=\delta\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n,$$

当 $n\to\infty$ 时, 此式趋向于 ∞; 这是矛盾.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

其次，假如有可积函数 $f(x)$ 适合

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos}{\sin} nx\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

那末連續函数

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\,dx$$

的一切富理埃系数都等于 0. 事实上，

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\cos}{\sin} kx\, dx = \mp\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin}{\cos} kx\, dx$$

$$= 0 \quad (k > 0).$$

从而 $F(x) \equiv 0$, $f(x)$ 几乎处处等于 0. 証明完毕.

系 假如 $\mathfrak{S}[f] = \mathfrak{S}[g]$，那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$. 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $g(x)$，那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$.

4. 平方可积的函数

設 $\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\cdots$在$[a, b]$上是一列就范的直交函数，

$$f(x) \in L_2[a, b],$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

我們要求常数 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$，使积分

$$I_n(f) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)\right)^2 dx$$

取最小値. 由 $\{\varphi_k\}$ 的直交性，$I_n(f)$ 等于

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\sum_{k=0}^{n} c_k\gamma_k + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2$$

$$= \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (c_k - \gamma_k)^2.$$

由是可知：当 $\gamma_0 = c_0, \cdots, \gamma_n = c_n$ 时，$I_n[f]$ 取最小値，并且

$$c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

这个結果，是透普娄(A. Toepler)于1876年指出的. 上面的不等式，对于任一正整数 n 成立，因此得到貝塞耳(Bessel)的不等式：

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

特别当(6)中的 f 属于 $L_2(-\pi, \pi)$ 时，从(9)得到

$$(10)\qquad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx.$$

此式指出 $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 都是收斂級数，入后我們将証(10)中等号成立，称此等式为**派司伐耳**(Parseval)**等式**. 当 $\{\varphi_n\}$ 在 $[a, b]$ 上具有完备性时，(9)也成等式.

无論怎样，我們巳經証得如下的結果：当 $f\in L_2$ 时，(9)中的 $c_n\to 0$；(10)中的 a_n 和 b_n 都收斂于0. 这些結果可以簡写为

$$c_n=o(1),\quad a_n=o(1),\quad b_n=o(1).$$

一般地說：当 $g(x)>0$ 并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

时，我們簡写做 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$. 当 $x\to x_0$ 时，假如 $f(x)/g(x)$ 的絕对值小于一个常数，那末写着

$$f(x)=O(|g(x)|)\quad (x\to x_0).$$

这里 x_0 可以为 ∞，也可以是一个有限数. 这些写法，是藍道(E. Landau)首創的，現在广泛地被采用. 記号

$$f(x)\simeq g(x)\quad (x\to x_0)$$

表示 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. 假如，当 $x\to x_0$ 时，有两个正的常数 A 和 B 适合于 $A<\dfrac{f(x)}{g(x)}<B$，那末写着

$$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0).$$

例如：当 $x\to 0$ 时，$x^2=o(|x|)$，当 $x\to\infty$ 时，$x=o(x^2)$. 当 $x\to 1$ 时，$\log x=O(|1-x|)$，当 $x\to\infty$ 时，

$$e^x\sim e^{x+\sin x}.$$

为了练习这些 o, O, $\sim$, $\simeq$ 等記号，再举几个例子于下.

(i) 設 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区間 $[a, x]$ $(x<b)$ 上是可积的：

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,dt\to\infty$$

$$(x\to b).$$

假如 $g(t)>0$, $f(x)=o(g(x))$ $(x\to b)$, 那末 $F(x)=o(G(x))$. 事实上，对于 $\varepsilon>0$, 有如下的 $c=c(\varepsilon)$：当 $c\leqslant x<b$ 时，$|f(x)|<\varepsilon g(x)$. 从而

$$|F(x)|<\int_a^c |f(t)|dt+\varepsilon G(x),$$

$$\limsup_{x\to b}\frac{|F(x)|}{G(x)}\leqslant\varepsilon,$$

由是即得 $F(x)=o(G(x))$, 因为 ε 是任意的.

从这个結果，容易导出对于級数的类似定理：設

$$g_n>0,\quad g_1+g_2+\cdots+g_n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

则当 $f_n=o(g_n)$ 时，成立着

$$f_1+\cdots+f_n=o(g_1+\cdots+g_n).$$

(ii) 設 $f(x)$ 是一个正値单調函数，

$$F_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)-\int_0^n f(x)dx.$$

那末当 $f(x)$ 是一减小函数时，极限 $\lim F_n$ 存在；当 $f(x)$ 是一增加函数时，成立着 $f(0)\leqslant F_n\leqslant f(n)$.

事实上，当 $f(k-1)\geqslant f(k)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 时，

$$0\leqslant\int_{k-1}^k f(x)dx-f(k)\leqslant f(k-1)-f(k).$$

正項級数 $\sum(f(k-1)-f(k))$ 收斂于 $f(0)-\lim f(n)$. 从而当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^n\left\{\int_{k-1}^k f(x)dx-f(k)\right\}=f(0)-F_n$$

的极限存在. 假如 $f(x)$ 是一增加函数. 那末从

$$f(k-1)\leqslant\int_{k-1}^k f(x)dx\leqslant f(k)$$

得着 $\sum_{1}^{n} f(k-1) \leqslant \int_{0}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{1}^{n} f(k)$. 因此,

$$f(0) \leqslant F_n \leqslant f(n).$$

例如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的話,就知 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ 当 $n\to\infty$ 时,有极限存在,所謂欧拉的常数;实际上,此常数等于

$$0.5772156649015328606\cdots.$$

当 $\alpha>-1$ 时,成立着

$$1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha} \simeq \frac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}.$$

特别当 $-1<\alpha<0$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}-\dfrac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}\right)$ 存在.

第　一　章

富理埃級数的收斂

1. 富理埃級数的运算

I. 用$\mathfrak{S}[f(x)]$的系数来表示$\mathfrak{S}[f(x+a)]$的系数

設

(1) $$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

則 $f(x+a) \sim \frac{1}{2} a_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(a) \cos nx + b_n(a) \sin nx\}$, 这里

(2) $$a_n(a) = a_n \cos na + b_n \sin na, \quad b_n(a) = -a_n \sin na + b_n \cos na.$$

事实上，将(1)写成复数形 $\sum c_n e^{inx}$ 的話，$f(x+a)$的系数可从下式算出:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} e^{ina} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-in(x+a)} dx = e^{ina} c_n.$$

$\mathfrak{S}[f(x+a)]$的一般項 $a_n(a) \cos nx + b_n(a) \sin nx$ 必須等于

$$\begin{aligned} & c_n e^{ina} \cdot e^{inx} + c_{-n} e^{-ina} \cdot e^{-inx} \\ & = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in(x+a)} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in(x+a)} \\ & = a_n \cos n(x+a) + b_n \sin n(x+a). \end{aligned}$$

由是得到(2).

II. 两函数的周旋函数

当函数

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\,dt$$

存在时，称它做 f 和 g 的**周旋函数**. 对于可积函数 f 和 g 的周旋函数 h 的研討，我們需要下面的

引理 假如 $f(x)\in L(a,\ b)$，那末对于任意两正数 ε 和 δ，必有全連續函数 $\varphi(x)$，使不适合于 $|f(x)-\varphi(x)|<\delta$ 的一切 $x\,(a\leqslant x\leqslant b)$，成一个測度小于 ε 的集.

【証明】 当 $f(x)$ 是一个有界正值函数时，存在着如下的自然数 n: $f(x)<n\delta\,(a\leqslant x\leqslant b)$. 函数值 $f(x)$ 落在 $[\nu\delta,\ (\nu+1)\delta)$ 中的一切 x 成一点集 $E_\nu\,(\nu=0,\ \cdots,\ n-1)$. 作开集 O_ν 包含 E_ν 而使測度 $|O_\nu|<|E_\nu|+\varepsilon/3n$. 于 O_ν 中取有限个区間，使这些区間所成之点集 S_ν 适合

$$|S_\nu|>|O_\nu|-\frac{\varepsilon}{3n}.$$

固定 ν，作如下的函数

$$\psi_\nu(x)=\begin{cases}\nu\delta & (x\in S_\nu),\\ 0 & (x\overline{\in} S_\nu,\ \ a\leqslant x\leqslant b).\end{cases}$$

那末 $\psi_\nu(x)$ 的不連續点是 S_ν 中某一区間的左端或是右端，从而这些点的个数是有限的. 将 $\psi_\nu(x)$ 的任一不連續点的附近，改修 $\psi_\nu(x)$ 的值，使它变成一个全連續函数 $\varphi_\nu(x)\leqslant\psi_\nu(x)\,(x\in S_\nu)$，并且使 $\varphi_\nu(x)\neq\psi_\nu(x)$ 的一切 x 所成之集 e_ν，其測度小于 $\frac{\varepsilon}{3n}$.

在点集 $S_\nu E_\nu-e_\nu$ 上，成立着

$$0\leqslant f(x)-\varphi_\nu(x)\leqslant\delta,$$

由是，全連續函数 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\cdots+\varphi_{n-1}(x)$ 在点集 $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}(S_\nu E_\nu-e_\nu)$ 上，满足 $0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant\delta$. 但是，不满足这个关系的一切点所成之

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com