

21

世纪  
高等医学院校教材

龚尔璋 主编  
甘平

# 医用物理学



科学出版社

R312  
5

21世纪高等医学院校教材

# 医用物理学

龚尔璋 甘平 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本教材是在参照卫生部颁发的高等医学院校医用物理学教学大纲的基础上,总结我们多年教学改革的经验,吸取国内外有关教材的优点来编写的。本教材既重视物理学知识的系统性,又避免与中学物理不必要的重复,编写了较多的医学物理学专题,着重培养学生分析问题和解决问题的能力以及科学的创新思维方式。

本书主要用于五年制和七年制临床医学、儿科、预防医学、口腔、影像医学、麻醉、卫生、卫管、卫生检验、妇幼保健、药学等专业教学。本书后部的医学物理专题可供教师选讲,也可供学生自学。

### 图书在版编目(CIP)数据

医用物理学/龚尔璋,甘平主编.-北京:科学出版社,2001.8

21世纪高等医学院校教材

ISBN 7-03-009609-6

I. 医… II. ①龚… ②甘… III. 医用物理学-医学院校-教材

IV. R312

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第045996号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2001年8月第一版 开本:850×1168 1/16

2004年6月第二次印刷 印张:27

印数:4 001—6 000 字数:557 000

定价:36.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

# 前 言

---

物理学是研究物质世界最普遍、最基本的运动规律的科学。物理学研究的内容包括机械运动、分子热运动、电磁运动、场和微观粒子的运动等基本运动形态。这些运动形态广泛存在于生物学和生命科学的运动形态之中，因此物理学是学习医学基础课和医学专业课的必要的基础，现代物理学的研究方法和技术成就在现代医学和生命科学的研究中得到越来越广泛的应用。

力学是物理学最古老的领域之一，它不但在人体组织结构(例如骨骼和肌肉)中起着重要作用，在体育运动和航空、航天技术中更是不可缺少的研究内容。流体力学研究液体和气体的运动规律，人体血液在循环系统中的运动与流体运动规律有着必然的联系。法国医学家泊肃叶研究了血液在血管中的运动而建立了泊肃叶定律，对血液的运动规律的研究做出了重大贡献。当然，血液是非牛顿流体，血管也不是刚性流管，血液的流动还有其生理的独特性质，还需要进一步的研究和探索。电磁运动是物理学的基本运动形态，人体在正常生理状态下，存在着大量的电学和磁学现象，如心电、肌电、脑电和胃电，心磁、脑磁和肺磁等现象，可以说，人体组织许多部分的生理运动中，都产生着电的或磁的信息。心电图、脑电图、心磁图、肺磁图等技术成就，已经成为医学临床诊断和医学研究的有效手段。几何光学的原理在研究眼的成像系统中获得成功，光学显微镜、电子显微镜和光谱分析技术是医学临床诊断和医学研究的有力助手。X线、放射性核素一经发现，首先就在医学中得到应用。基于物理学、电子学和计算机技术而创立的超声成像技术、X-CT技术、磁共振成像技术和核医学成像技术，已经成为医学临床诊断和医学研究的先进技术。放射性核素治疗机和电子加速器等已是治疗肿瘤的常规设备。在已经从分子水平和电子水平研究生命科学和医学的今天，生物物理学、量子生物学、量子遗传学等，为生命科学和医学的研究开辟了光明的前景。

综上所述，物理学和医学有着千丝万缕的联系。医用物理学作为医学院校的必修课程，它将为学生学习医学基础课和医学专业课打下坚实的基础。学生通过医用物理学的学习，不仅能掌握必要的物理学基本知识，而且能培养分析问题和解决问题的能力，培养科学的创新思维的方法，使学生具备高级医学人才所必需的理科素质。

本教材是在卫生部颁发的高等医学院校医用物理学教学大纲的基础上，总结我们多年教学改革的经验，吸取国内外有关教材的优点编写的。本教材既重视物理学知识的系统性，又避免了与中学物理不必要的重复，而且编写了较多的医

学物理学专题。本书主要用于五年制和七年制临床医学、儿科、预防医学、口腔、影像医学、麻醉、卫生、卫管、卫生检验、妇幼保健、药学等专业教学,本书后部的医学物理专题可供教师选讲,也可供学生自学。

本书由龚尔璋、甘平担任主编,窦晓明、高斌、陈龙聪任副主编,主编统一整理定稿。参加本书编写的有(以姓氏笔画为序)甘平(第5、6、13、16章)、陈龙聪(第2、3、8章)、高斌(第4、7、11章)、龚尔璋(第1、10、14、15、17、18章)、窦晓明(第9、12章)等同志。

编 者  
2001年3月

# 目 录

## 第一章 力学基本定律

第一节 刚体的转动 .....	(1)	第二节 物体的弹性 .....	(12)
一、刚体定轴转动的运动学 .....	(1)	一、应变和应力 .....	(12)
二、转动动能、转动惯量 .....	(3)	二、弹性模量 .....	(14)
三、刚体定轴转动定律 .....	(5)	三、弹性势能 .....	(16)
四、刚体定轴转动的功和能 .....	(7)	第三节 肌肉和骨骼的弹性 .....	(16)
五、角动量、角动量守恒定律 .....	(9)	第四节 经典力学的适用范围 .....	(18)
六、进动 .....	(11)		

## 第二章 流体的运动

第一节 理想流体 定常流动 .....	(21)	二、柏努利方程的应用 .....	(28)
一、理想流体 .....	(21)	第四节 黏性流体的流动 .....	(32)
二、定常流动 .....	(22)	一、层流、湍流 .....	(32)
第二节 连续性方程 .....	(23)	二、牛顿黏滞定律 .....	(33)
第三节 柏努利方程 .....	(25)	三、雷诺数 .....	(34)
一、柏努利方程 .....	(25)	四、黏性流体的流动规律 .....	(35)

## 第三章 振动、波动和声波

第一节 简谐振动 .....	(43)	四、两个同频率、互相垂直的简谐振动的合	
一、简谐振动方程 .....	(43)	成 .....	(59)
二、简谐振动的特征量 .....	(45)	五、相互垂直不同频率的简谐振动的合成	
三、简谐振动的矢量表示法 .....	(47)	.....	(61)
四、简谐振动的能量 .....	(48)	第四节 简谐波 .....	(62)
第二节 阻尼振动、受迫振动和共振 ..	(50)	一、机械波的产生 .....	(62)
一、阻尼振动 .....	(50)	二、波的几何描述 .....	(63)
二、受迫振动和共振 .....	(52)	三、波的频率、波长和波速 .....	(63)
第三节 简谐振动的合成 .....	(52)	四、简谐波的波动方程 .....	(64)
一、两个同方向、同频率的简谐振动的合成		五、简谐波的能量与强度 .....	(68)
.....	(52)	第五节 惠更斯原理及其应用 .....	(72)
二、同方向不同频率的简谐振动的合成 ..	(54)	一、惠更斯原理 .....	(72)
三、频谱分析 .....	(57)	二、解释波的衍射现象 .....	(73)
		三、波的折射的解释 .....	(74)

第六节 波的干涉..... (75)	第八节 多普勒效应..... (88)
一、波的叠加原理 ..... (75)	一、波源和观察者在其连线上运动 ..... (88)
二、波的干涉 ..... (75)	二、波源和观察者的运动不在其连线上 ... (89)
三、驻波 ..... (77)	三、多普勒效应的应用 ..... (90)
四、声源物体的固有频率 ..... (79)	第九节 超声波及其医学应用..... (91)
第七节 声波和超声波..... (81)	一、超声波的产生和探测 ..... (91)
一、声速、声压和声阻 ..... (81)	二、超声波的特性及其对物质的作用 ..... (91)
二、声强、声强级和响度级 ..... (83)	三、超声波在医学中的应用 ..... (93)
三、声波的反射和折射 ..... (86)	

#### 第四章 液体的表面现象

第一节 液体的表面张力与表面能..... (98)	二、球形液面的附加压强 ..... (104)
一、液体的表面层 ..... (98)	三、肺泡的附加压强与表面活性物质..... (105)
二、液体的表面张力和表面能 ..... (99)	第三节 毛细现象 气体栓塞 ..... (106)
三、表面活性物质与表面吸附 ..... (101)	一、润湿现象 ..... (106)
第二节 弯曲液面的附加压强 ..... (102)	二、毛细现象 ..... (107)
一、任意弯曲液面内外压强差的计算 ... (103)	三、气体栓塞 ..... (109)

#### 第五章 生物热力学基础

第一节 热力学的基本概念 ..... (112)	二、等压过程 ..... (117)
一、热力学系统 ..... (112)	三、等温过程 ..... (119)
二、状态与过程 ..... (113)	四、绝热过程 ..... (119)
三、功和热量 ..... (114)	第四节 热力学第二定律 ..... (121)
第二节 热力学第一定律 ..... (115)	一、热力学第二定律的表述 ..... (121)
一、热力学第一定律的表达式 ..... (115)	二、第二定律的统计意义和适用范围 ... (123)
二、第一类永动机 ..... (116)	第五节 生物热力学 ..... (124)
第三节 热力学第一定律的应用 ..... (116)	一、人体代谢过程中的能量转换 ..... (124)
一、等容过程 ..... (117)	二、生物系统与热力学 ..... (125)

#### 第六章 静电场

第一节 电场与电场强度 ..... (127)	三、高斯定理的应用 ..... (135)
一、电荷以及电荷守恒定律 ..... (127)	第三节 电场力作功与电势 ..... (137)
二、库仑定律 ..... (128)	一、静电场力作功 ..... (137)
三、电场与电场强度 ..... (128)	二、静电场中的电势能 ..... (139)
四、场强的叠加原理 ..... (129)	三、电势和电势差 ..... (139)
五、点电荷及点电荷系的场强 ..... (129)	四、点电荷及点电荷系电场电势的计算... (140)
六、电场的几何描述 ..... (131)	五、等势面和电势梯度 ..... (142)
第二节 高斯定理 ..... (133)	第四节 电偶极子电场 ..... (143)
一、高斯定理 ..... (133)	一、电偶极子 ..... (143)
二、高斯定理的小结 ..... (134)	二、电偶极子电场的电势 ..... (144)





一、光学仪器的放大率 .....	(228)	四、几种特殊的显微镜 .....	(232)
二、放大镜 .....	(228)	五、检眼镜 纤镜 .....	(233)
三、显微镜 .....	(229)		

## 第十章 量子物理基础

第一节 热辐射 .....	(236)	第五节 微观粒子的波动性 .....	(252)
一、基尔霍夫辐射定律 .....	(236)	一、德布洛意波 .....	(252)
二、黑体辐射定律 .....	(238)	二、物质波的统计解释 .....	(253)
三、普朗克的量子假设 .....	(239)	第六节 测不准关系 .....	(254)
四、热辐射在医学中的应用 .....	(240)	第七节 波函数 薛定谔方程 .....	(255)
第二节 非温度辐射 .....	(241)	一、波函数 .....	(256)
一、荧光、磷光和荧光分析 .....	(242)	二、薛定谔方程的建立 .....	(257)
二、荧光灯 .....	(243)	三、一维势阱中的粒子 .....	(258)
三、紫外线灯 .....	(243)	第八节 类氢原子的能级 .....	(259)
第三节 光度学基础 眼的视觉 .....	(244)	一、能量量子化——主量子数 $n$ .....	(260)
一、辐射通量、视见度函数 .....	(244)	二、角动量量子化——角量子数 $l$ .....	(260)
二、光通量、发光强度与照度 .....	(245)	三、空间量子化——磁量子数 $m$ .....	(260)
三、眼的视觉 .....	(246)	四、电子的自旋 .....	(261)
第四节 光的量子性 .....	(247)	第九节 原子光谱和分子光谱 .....	(262)
一、光电效应 .....	(247)	一、原子光谱 .....	(262)
二、爱因斯坦光电效应方程式 .....	(249)	二、分子光谱 .....	(264)
三、光子的质量与动量 .....	(250)	三、光谱分析原理 .....	(264)
四、康普顿效应 .....	(251)		

## 第十一章 原子核和放射性

第一节 原子核的基本性质 .....	(268)	第四节 射线与物质的相互作用 .....	(282)
一、原子核的组成 .....	(268)	一、带电粒子与物质的相互作用 .....	(282)
二、原子核的质量 .....	(269)	二、光子与物质的相互作用 .....	(286)
三、原子核的大小 .....	(270)	三、中子与物质的相互作用 .....	(288)
四、原子核的角动量和磁矩 .....	(270)	第五节 辐射剂量 .....	(289)
五、原子核的稳定性 .....	(271)	一、X射线和 $\gamma$ 射线的照射量 .....	(289)
第二节 原子核的衰变 .....	(273)	二、吸收剂量 .....	(289)
一、 $\alpha$ 衰变 .....	(273)	三、相对生物效应系数和剂量当量 .....	(290)
二、 $\beta$ 衰变 .....	(274)	第六节 射线探测器 .....	(291)
三、 $\gamma$ 衰变和内转换 .....	(277)	一、气体电离探测器 .....	(291)
四、衰变纲图 .....	(278)	二、闪烁探测器 .....	(292)
第三节 放射性核素的衰变规律 .....	(278)	三、半导体探测器 .....	(293)
一、衰变规律 .....	(278)	四、热释光剂量计 .....	(294)
二、半衰期和平均寿命 .....	(279)	第七节 原子核技术在医学上的应用 .....	(295)
三、放射性活度 .....	(279)	一、放射治疗 .....	(295)
四、两级串连衰变 .....	(281)		

二、射线成像 .....	(295)	三、射线分析 .....	(296)
<b>第十二章 光谱与激光</b>			
第一节 光谱 .....	(297)	一、激光产生的原理 .....	(307)
第二节 原子光谱 .....	(298)	二、氦氖激光器 .....	(308)
一、原子的光学光谱 .....	(299)	三、红宝石激光器 .....	(309)
二、标识伦琴射线谱 .....	(299)	四、几种常见的医用激光器 .....	(310)
第三节 分子光谱 .....	(300)	五、激光的特点 .....	(311)
一、分子光谱的特点与分子内部运动的关 系 .....	(300)	第六节 激光的生物作用 .....	(311)
二、分子的转动能级和转动光谱 .....	(302)	一、热效应 .....	(312)
三、分子的振动能级和振转光谱 .....	(303)	二、压强效应 .....	(312)
四、分子的电子振转光谱 .....	(304)	三、光化效应 .....	(313)
五、红外吸收光谱 .....	(305)	四、电磁效应 .....	(314)
第四节 红外线和紫外线 .....	(305)	五、弱激光的刺激作用 .....	(314)
一、红外线 .....	(306)	第七节 激光的医学应用 .....	(314)
二、紫外线 .....	(306)	一、激光诊断与检测 .....	(314)
第五节 激光 .....	(307)	二、激光治疗 .....	(316)
<b>第十三章 X 射线</b>			
第一节 X 射线的发现及其基本性质 .....	(319)	第三节 X 射线的吸收 .....	(329)
一、X 射线的发现 .....	(319)	一、单色 X 射线吸收的宏观规律 .....	(329)
二、基本性质 .....	(320)	二、连续 X 射线吸收的宏观规律 .....	(332)
三、X 射线的发生装置 .....	(320)	三、X 射线吸收的微观机理 .....	(333)
四、X 射线的强度和硬度 .....	(322)	第四节 X 射线在医学中的应用 .....	(335)
第二节 X 射线谱 .....	(323)	一、放射治疗 .....	(335)
一、X 射线谱的特性 .....	(324)	二、临床诊断 .....	(336)
二、连续 X 射线谱 .....	(325)	三、X 射线断层摄影术 .....	(338)
三、标识 X 射线谱 .....	(327)	四、计算机断层摄影术(X-CT) .....	(338)
四、X 射线结构分析 .....	(328)		
<b>第十四章 核磁共振的医学应用</b>			
第一节 核磁共振基本原理 .....	(341)	.....	(346)
一、在磁场中的原子核 .....	(341)	一、质子密度加权图像 .....	(347)
二、拉莫尔关系式 .....	(342)	二、 $T_1$ 加权图像 .....	(347)
三、核磁共振 .....	(343)	三、 $T_2$ 加权图像 .....	(347)
第二节 磁共振成像(MRI) .....	(343)	第四节 MRI 成像方法 .....	(348)
一、磁共振成像 .....	(343)	一、自旋回波成像法 .....	(348)
二、磁化和弛豫 .....	(344)	二、反转恢复成像法 .....	(349)
第三节 质子密度 $T_1$ 、 $T_2$ 加权图像 .....		三、快速成像法 .....	(349)

第五节 核磁共振成像的特点及医学应用 .....	(350)	一、MRI 的特点 .....	(350)
		二、MRI 的医学应用 .....	(350)

### 第十五章 核医学影像技术

第一节 $\gamma$ 照相机 .....	(352)	一、成像原理 .....	(354)
一、 $\gamma$ 相机平面投影成像的物理原理 .....	(352)	二、成像方法 .....	(355)
二、 $\gamma$ 照相机的基本组成 .....	(352)	三、系统分辨率 .....	(355)
三、图像的形成 .....	(353)	第三节 SPECT 成像 .....	(355)
四、医学应用举例 .....	(354)	一、纵断面成像法 .....	(355)
第二节 正电子发射断层成像 .....	(354)	二、横断面成像法 .....	(356)

### 第十六章 X 射线计算机断层摄影术(X-CT)

第一节 CT 的成像原理 .....	(358)	二、CT 装置的部件结构 .....	(366)
一、CT 的物理原理 .....	(358)	第四节 使用和分析 .....	(369)
二、CT 的数学原理 .....	(360)	一、CT 的使用 .....	(370)
第二节 图像重建方法 .....	(361)	二、诊断分析 .....	(371)
一、解析法 .....	(361)	第五节 CT 的分类及扫描方式 .....	(375)
二、其他图像重建方法 .....	(364)	一、CT 的分类 .....	(375)
第三节 CT 装置 .....	(366)	二、CT 的扫描方式 .....	(375)
一、CT 装置的组成 .....	(366)	三、CT 扫描系统的发展与演变 .....	(378)

### 第十七章 量子生物学简介

第一节 量子生物学的基本方法 .....	(382)	二、DNA 分子的二级结构和碱基配对 .....	(388)
一、简单分子轨道法 .....	(383)	三、核酸的功能 .....	(389)
二、半经验自洽场分子轨道法 .....	(386)	第四节 蛋白质的结构和性质 .....	(391)
三、从头计算法 .....	(386)	一、蛋白质的结构 .....	(391)
四、X <sub>a</sub> 方法 .....	(386)	二、蛋白质的有关性质 .....	(391)
五、分子静电势法 .....	(386)	第五节 量子生物学的其他研究实例 .....	(392)
第二节 能量指数和结构指数 .....	(386)	一、酶的催化作用机理 .....	(392)
一、能量指数 .....	(387)	二、遗传、突变的量子理论 .....	(393)
二、结构指数 .....	(387)	三、量子药理学 .....	(393)
第三节 核酸的结构与功能 .....	(388)	四、致癌物质的结构与活性研究 .....	(394)
一、核酸分子的一级结构 .....	(388)		

### 第十八章 生物医学信号及其测量

第一节 生物电信号和非电信号 .....	(395)	二、电极的极化电压 .....	(398)
一、生物电信号及其特征 .....	(395)	三、电极的电特性 .....	(399)
二、非电量生理信号 .....	(397)	第三节 医用传感器简介 .....	(400)
第二节 生物电信号的拾取 .....	(398)	一、传感器的基本特性 .....	(400)
一、生物电位电极 .....	(398)	二、变电阻式传感器 .....	(401)

---

三、可变电感传感器 .....	(402)	二、心电图波形的形成 .....	(405)
四、可变电容传感器 .....	(403)	三、中心电端 .....	(406)
五、光电式传感器 .....	(404)	四、单极胸导联 .....	(406)
第四节 心电知识 .....	(405)	五、单极加压肢体导联 .....	(407)
一、心电向量图 .....	(405)		
主要参考文献 .....	(408)		
习题答案 .....	(409)		
附录 .....	(415)		

# 第一章

---

## 力学基本定律

力学的基本概念和规律广泛应用于物理学各个领域及其他自然科学之中. 本章在中学力学的基础上, 重点讨论刚体的转动和物体的弹性及其医学应用.

### 第一节 刚体的转动

在外力作用下, 形状和大小都不变化的物体叫做刚体. 实际物体在外力作用下, 或多或少都会发生形变, 因而刚体是一种理想模型. 在许多情况下, 当研究的重点是物体的转动属性时, 其形状和大小的变化可以忽略, 这种物体可以视为刚体.

刚体的主要运动形态是平动和转动. 如果在任何给定的时间间隔内, 刚体上每一个质点都有相同的位移、速度和加速度, 这种运动称为平动. 刚体转动时, 刚体上每一个质点都绕着同一轴线作圆周运动. 一般的刚体运动中既有平动又有转动, 是平动和转动的迭加. 本节只讨论刚体的定轴转动.

#### 一、刚体定轴转动的运动学

刚体转动时, 其轴线保持固定不动, 这种转动称为定轴转动. 图 1-1 表示刚体绕固定轴线的转动, 在这种情况下,  $z$  轴就是参照系. 刚体作定轴转动时, 其运动状态用角位移、角速度和角加速度等角量来描述.

##### 1. 角位移

在图 1-1 中,  $p$  点是刚体上的一点, 过  $p$  点作一平面与  $z$  轴垂直, 与  $z$  轴相交于  $o$  点,  $p$  点在该平面内作圆周运动. 过  $o$  点在该平面内作参考线  $ox$ , 半径  $op$  与  $ox$  的夹角  $\theta$  称为刚体的角位置, 我们选取反时针方向为转动的正方向. 在任意时间间

隔  $\Delta t$  内角位置的增量  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , 称为刚体的角位移 (angular displacement). 刚体沿反时针方向转动时,  $\Delta\theta > 0$ , 刚体沿顺时针方向转动时,  $\Delta\theta < 0$ . 角位置与角位移的单位为弧度 (rad).

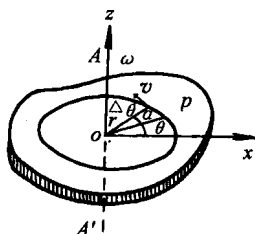


图 1-1 刚体的定轴转动

## 2. 角速度

角位移  $\Delta\theta$  与时间间隔  $\Delta t$  的比值  $\Delta\theta/\Delta t$  称为平均角速度, 用  $\bar{\omega}$  表示, 即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 平均角速度的极限称为  $t$  时刻的瞬时角速度 (angular velocity), 简称角速度, 用  $\omega$  表示, 即

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-1)$$

角速度的单位是弧度·秒<sup>-1</sup> (rad·s<sup>-1</sup>). 角速度的正负与角位移相同. 角速度的方向由右手螺旋法则确定.  $\omega$  不变的转动称为匀速转动. 如果  $\omega$  随时间变化, 则刚体作变速转动.

## 3. 角加速度

角速度的增量  $\Delta\omega$  与时间间隔  $\Delta t$  的比值  $\Delta\omega/\Delta t$  称为平均角加速度, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 取平均角加速度的极限就称为角加速度 (angular acceleration), 用  $\beta$  表示, 即

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-2)$$

角加速度的单位是弧度·秒<sup>-2</sup> (rad·s<sup>-2</sup>), 角加速度的正负与角速度的增量相同.

## 4. 角量与线量的关系

刚体转动中的角位移、角速度和角加速度统称为角量. 质点运动和刚体平动中的位移、速度和加速度统称为线量, 刚体中任意点  $p$  的角量与该点相应的线量之间有以下关系:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(r\omega)}{\Delta t} = r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1-3)$$

式中  $r$  是  $p$  点的转动半径,  $\Delta s$  是  $p$  点在  $\Delta t$  时间内的线位移,  $v$ 、 $a_t$ 、 $a_n$  和  $a$  分别表示  $p$  点的线速度、切向加速度、法向加速度和总加速度. 线量与角量都可以描述刚体上一点的运动.

### 5. 刚体匀变速转动公式

刚体转动时, 如果在任意相等的时间内角速度的增量都相等, 这种转动称为匀变速转动. 刚体作匀变速转动时, 角加速度  $\beta$  保持不变. 刚体作匀变速转动的运动规律与质点作匀变速直线运动的规律相类似, 角位移、角速度、角加速度之间有如下关系:

$$\omega = \omega_0 + \beta t \quad (1-4a)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (1-4b)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta \quad (1-4c)$$

## 二、转动动能、转动惯量

### 1. 转动动能

刚体转动时, 刚体的转动动能等于组成刚体的各个质点的动能的总和, 即

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (1-5)$$

### 2. 转动惯量

在(1-5)式中, 令

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (1-6)$$

称为刚体对给定转轴的转动惯量(moment of inertia), 转动惯量的单位是千克·米<sup>2</sup>. 转动动能与转动惯量的关系为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (1-7)$$

将转动动能公式(1-7)与平动动能公式相比较,可见转动惯量  $J$  与平动中的质量  $m$  的地位相当.转动惯量的大小决定于刚体质量的几何分布以及转轴的位置.表 1-1 给出了多种形状的刚体的转动惯量.如果刚体的质量为连续分布,则刚体的转动惯量可用积分法求得:

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (1-8)$$

式中  $dV$  表示与  $dm$  相应的体积元,  $\rho$  表示体积元的质量密度,  $r$  是体积元与转轴之间的距离.

**例题 1-1** 求质量为  $m$ 、长为  $L$  的均匀细棒对下列转轴的转动惯量(图 1-2):

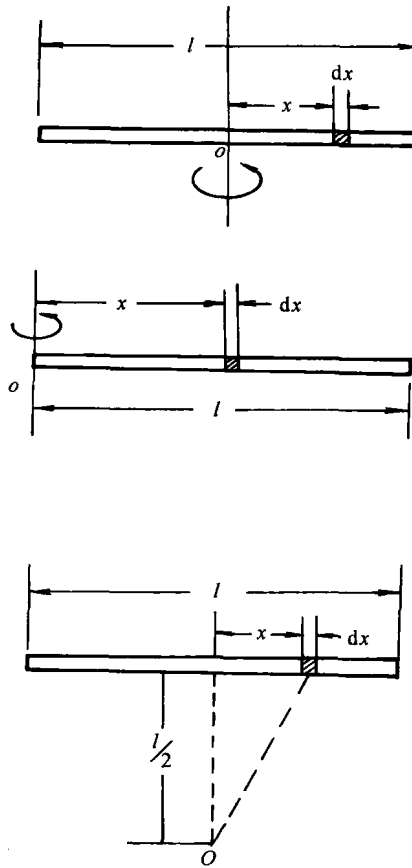


图 1-2 例题 1-1 的说明图

- (1) 转轴通过棒的中心并与棒垂直;
- (2) 转轴通过棒的一端并与棒垂直;
- (3) 转轴在棒外,与棒中心的垂直距离为  $L/2$ , 并与棒所在的平面垂直.

**解** 假设棒的质量线密度为  $\lambda$ , 如图 1-2 所示, 在与转轴  $o$  距离为  $x$  处取一长



度元  $dx$ , 其质量  $dm = \lambda dx$ . 根据转动惯量的积分公式分别求出三种情况的转动惯量.

(1) 当转轴通过棒的中心并与棒垂直时

$$J = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} x^3 \lambda \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{12} L^3 \lambda$$

将  $\lambda = m/L$  代入上式得

$$J = \frac{1}{12} L^3 \frac{m}{L} = \frac{1}{12} mL^2$$

(2) 当转轴通过棒的一端并与棒垂直时

$$J = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} mL^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2$$

(3) 当转轴在棒外, 与棒中心垂直距离为  $L/2$  且与棒所在平面垂直时

$$\begin{aligned} J &= \int \left( x^2 + \frac{L^2}{4} \right) dm = \int_{-L/2}^{+L/2} \left( x^2 + \frac{L^2}{4} \right) \lambda dx = \frac{m}{L} \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} L^2 x \right) \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{3} mL^2 \\ &= \frac{1}{12} mL^2 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

由以上结果可以看出, 对同一均匀细棒, 转轴位置不同, 转动惯量也不同. 细棒对任意转轴的转动惯量  $J$ , 等于通过质心的平行轴的转动惯量  $J_c (= mL^2/12)$  加上二轴垂直距离  $d (= L/2)$  的平方与刚体质量  $m$  的乘积, 即

$$J = J_c + md^2 \quad (1-9)$$

这一结论也称为平行轴定理, 可以证明, 它适用于任意形状的刚体. 一些物体的转动惯量公式见表 1-1.

表 1-1 一些物体的转动惯量公式

物体和转轴	转动惯量	物体和转轴	转动惯量
圆柱形细棒(质量 $m$ , 长 $l$ ) 转轴通过棒中心与长轴垂直	$J = ml^2/12$	细圆环(质量 $m$ , 半径 $R$ ) 转轴通过圆心与环面垂直	$J = mR^2$
薄圆盘(质量 $m$ , 半径 $R$ ) 转轴通过中心与盘面垂直	$J = mR^2/2$	球体(质量 $m$ , 半径 $R$ ) 转轴通过球心	$J = 2mR^2/5$

### 三、刚体定轴转动定律

定轴转动定律是刚体定轴转动的基本规律, 它描述刚体的转动惯量  $J$ 、角加速度  $\beta$  与作用力矩  $M$  的定量关系. 以下就力矩和定轴转动定律分别加以说明.