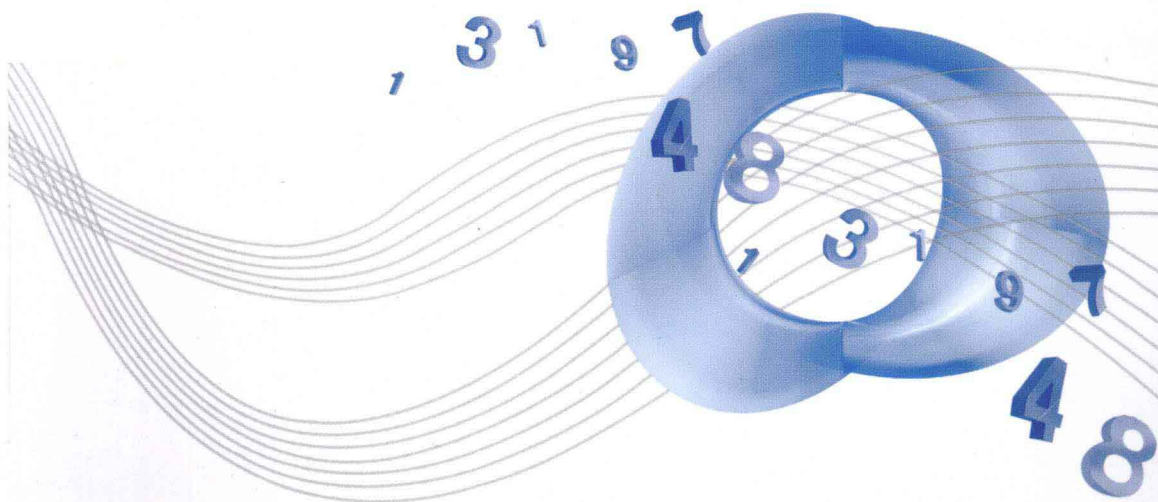


Questions & Solutions of
2010 – 2011 S. T. Yau
College Student Mathematics Contests

2010 – 2011 丘成桐大学生数学竞赛 试题及解答

丘成桐 / 主编

湖南科学技术出版社
波士顿国际出版社



Questions & Solutions of
2010–2011 S. T. Yau
College Student Mathematics Contests

2010 – 2011

丘成桐大学生数学竞赛 试题及解答

主编：丘成桐

编委：(按姓氏拼音为序)

胡 森 李 骏 林长寿 刘 军 刘克峰
舒其望 王跃飞 席南华 徐 浩 许洪伟
严加安 杨 乐 张寿武 郑方阳

CMS
PUBLISHING & MEDIA
中 国 科 学 出 版 社

湖南科学技术出版社
波士顿国际出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

2010 - 2011 丘成桐大学生数学竞赛试题及解答 / 丘成桐主编.
— 长沙 : 湖南科学技术出版社, 2012. 9
ISBN 978-7-5357-7206-0
I. ①2… II. ①丘… III. ①高等数学—题解 IV.
①013-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 206087 号

2010-2011 丘成桐大学生数学竞赛试题及解答

主 编: 丘成桐
责任编辑: 孙桂均 吴 炜
文字编辑: 刘 竟
出版发行: 湖南科学技术出版社
社 址: 长沙市湘雅路 276 号
<http://www.hnstp.com>
邮购联系: 本社直销科 0731-84375808
印 刷: 长沙市富洲印务有限责任公司
(印装质量问题请直接与本厂联系)
厂 址: 岳麓区银太俱乐部内
邮 编: 410013
出版日期: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次
开 本: 710mm×1000mm 1/16
印 张: 10.5
字 数: 150000
书 号: ISBN 978-7-5357-7206-0
定 价: 45.00 元
(版权所有·翻印必究)



丘成桐先生致辞



高等教育学会会长、原教育部副部长周远清教授与第一届获奖学生合影



丘成桐先生为第一届获奖学生颁奖



英国皇家学会会员 John Coates 教授致词



第一届团体赛答辩现场



丘成桐先生、中国科学院副院长李静海与第二届金奖获得者合影



国际评委向参赛学生提问



国际评委讨论学生答辩情况



部分评委与参赛学生合影



参赛选手答辩现场



丘成桐先生为第二届团体赛金奖获得者颁奖



丘成桐先生、Schmid 教授为第二届团体赛银奖获得者颁奖



第二届获奖学生代表发言



丘成桐先生、中国科学院副院长李静海与第二届团体赛金奖获得者合影

目 录

出版前言	1
鸣谢	3
丘成桐大学生数学竞赛手册	5
2010 年第一届丘成桐大学生数学竞赛通告	5
2011 年第二届丘成桐大学生数学竞赛通告	7
2012 年第三届丘成桐大学生数学竞赛通告	8
丘成桐大学数学竞赛组织委员会	9
丘成桐大学数学竞赛学术与命题委员会	10
丘成桐大学数学竞赛学习大纲代数、数论与组合	12
丘成桐大学数学竞赛学习大纲分析与微分方程	15
丘成桐大学数学竞赛学习大纲应用数学、计算数学、概率与统计	18
丘成桐大学数学竞赛学习大纲几何与拓扑	22
2010 年丘成桐大学生数学竞赛优胜者名单	24
2011 年丘成桐大学生数学竞赛优胜者名单	27
S. T. Yau College Student Mathematics Contests 2010	30
S. T. Yau College Student Mathematics Contests 2011	44
Solutions of the S. T. Yau College Student Mathematics Contests 2010	59
Solutions of the S. T. Yau College Student Mathematics Contests 2011	109

出版前言

为促进我国数学教育的发展，提高数学本科生的专业水平，我们从2010年开始举办大学生数学竞赛。这项竞赛的目的主要是为了使我们的本科生的数学知识面更广，基础打得更牢，进一步缩小其与国外一流院校优秀本科生之间的差距。与此同时，通过竞赛的科目大纲及参考书建议，使有志者可以通过自学习好数学基础课，以弥补学校里开不出来的一些基础课。这对普通院校的学生来说尤其重要，它可以帮助缩小普通院校学生与传统强校学生之间的差距，从而使大家共同提高，也使竞争平台更宽广、更公平。

竞赛每年夏天举行一次。所有中国大陆、澳门、台湾和香港的在读本科生都可以报名参加。竞赛分4个科目：代数、数论与组合；分析与微分方程；应用、计算与概率统计；几何与拓扑。每个科目有个人赛和团体赛两套试题。具体安排和规则可见竞赛网页：

<http://www.cms.zju.edu.cn//conference/YCMC/rules-c.html>

为方便读者，我们在本书中也列出了各科目的大纲和参考书目录，以及各竞赛委员会的成员。

竞赛的试题主要取材于美国各高校数学系的研究生资格考试，也结合一些竞赛委员会成员们收集或自编的题目。与中学数学奥林匹克竞赛或美国大学生的Putnam竞赛不同，我们这个竞赛主要是测试学生对本科数学基础知识的全面掌握程度，而不是在一些比较初等的内容上考拐弯抹角的小技巧。目前我国的数学研究生入学考试过分注重于大一的课程，如数学分析、线性代数之类，而一些有志于出国深造的学生则因忙于准备GRE、托福考试而忽略掉一些高年级数学课程的学习。这些都非常不利于对基础知识的学习和训练。我们创办这个竞赛的目的之一也是希望能对纠正这种片面现象起到一定的帮助作用，进一步提高本科数学教育的水平。

在这本书里，我们收集整理了2010年和2011年的试题和解答。我们希望读者从这些试题里能进一步了解本竞赛的范围和风格，也希望中国大陆、澳门、台湾、香港更多的大学数学本科生能踊跃参加今后的竞赛，并通过学习更好地掌握本科数学的基础知识。

数学，作为现代科学技术的基础，是评判一个国家综合实力的重要指标之一。我们生活在民族复兴的大时代，肩负着振兴我国数学的使命。希望我们年轻一代中的有志者能打好基础，奋发图强，使自己变成能为数学大树添枝加叶的来者，也为我国早日成为数学强国贡献力量。你们是中国数学的未来！

丘成桐

2012年2月于杭州

鸣 谢

我们首先要感谢丘成桐大学生数学竞赛的组织和学术委员会的成员们，正是他们的不懈努力使第一届和第二届丘成桐大学生数学竞赛得以顺利举行并取得了圆满成功。从竞赛的筹备、组织到命题、评审、提供解答，都离不开他们的辛勤劳动和无私奉献。竞赛组委会由加州大学洛杉矶分校的刘克峰教授担任主席，由清华大学的肖杰教授、中国科技大学的胡森教授、浙江大学的许洪伟教授、中国科学院的王跃飞教授共同担任副主席。组织委员会的成员名单请见本书的委员会名单部分。

学术委员会由丘成桐教授和中国科学院的杨乐院士担任主席。其4个分部中：代数组的主席为普林斯顿大学的张寿武教授、中国科学院的席南华院士、斯坦福大学的李骏教授；分析组由台湾大学的林长寿教授和中国科学院的王跃飞教授担任主席；应用组由布朗大学的舒其望教授担任应用数学和计算数学分委员会的主席，由中国科学院的严加安院士和哈佛大学的刘军教授共同担任概率与统计分委员会的主席；几何与拓扑组由加州大学洛杉矶分校的刘克峰教授担任主席。各学术委员会成员的名单也列在了本书中。

我们特别要感谢宾州大学的翟敬立教授和宾州州立大学的李文卿教授，他们在代数的命题工作上作出了大力贡献。哥伦比亚大学的应志良教授帮助建立了统计部分的学习大纲，加州大学尔湾分校的忻学教授和 Fredrick Wan 教授帮助建立了应用数学的学习大纲。

张寿武、李骏、舒其望、刘军等诸位教授在繁忙的科研教学中抽出了很多的时间和精力，投入到竞赛的组织工作中去，为了我们共同的目的，为振兴中华数学而贡献力量。我们还要特别感谢香港中文大学的辛周平教授、密西根大学的季理真教授和 Rutgers 大学的罗峰教授，他们也为竞赛作出了大量贡献。我们特别感谢清华大学数学科学中心的潘日新教授和张蕾、孙丽娟老师，晨兴数学所的李小凝、铁广强老师，香港中文大学的梁乃聪教授、陈汉夫教授和 Lily Chan 老师，以及台湾大学的林长寿教授、王振男教授和 An-Ching Hsu 老师。

竞赛的奖章和奖杯，第一届是在郭开朗副省长的直接领导下，由湖南省人民政府出资赞助的，第二届则是由贺正需教授个人出资赞助的。奖章和奖杯是袁蕾女士设计的。在此我们一并致以诚挚的谢意。

其次我们要感谢所有参加监考、阅卷的教授和后勤人员。他们在繁忙的教

学、科研中抽出时间来参加这些额外的工作，使竞赛的举行和评审能够得到及时、公正地完成。我们特别要感谢中国科学院的尚在久教授，复旦大学的吴泉水教授和王永珍、柯静老师，清华大学的叶俊教授，厦门大学的谭绍斌教授和戴莉华老师，中国科学院武汉数学物理所的杨小舟教授，南京大学的秦厚荣教授，西北大学的曲安京教授和邵勇老师，湖南师范大学的张卫教授，西南大学的周家足教授，中山大学的朱熹平教授和姚正安教授，浙江大学的张立新教授，中国科技大学的许小卫博士和黄稚新老师，南方科技大学的蓝海老师，哈尔滨工业大学的李莉博士，山东大学的黄华林教授和纪广华教授，河南大学的王治国教授和林加林、邵景辉老师，华南理工大学的吴敏教授等，正是在他们的辛勤付出和杰出领导下，各考点的竞赛工作得以顺利举行和圆满完成。

我们也要感谢参加竞赛的来自两岸三地的众多学生，正是他们的踊跃参与和良好表现，使竞赛得到成功。我们还要感谢所有参与竞赛的大学和研究所，它们为考试提供了场地和后勤支持，使竞赛和阅卷得以顺利进行。我们也要感谢阿里巴巴，他们在 2010 年对首届竞赛提供了资助，使这项有益于国家、有益于社会的创举得以实现。

在本书的编写过程中，我们得到了多位教授的大力帮助。我们这里要特别感谢中国科学院数学所的方明教授，他帮助给出了 2011 年代数试题的解答。我们也感谢肖青、沈可美、楼筱静、孙庆有、吴柳峰诸位老师的协助，使本书的编写工作得以顺利完成。最后，我们要特别感谢 International Press 的秦立新先生，他为本书的编辑出版付出了大量的时间和精力，使本书得以面世。

本书编委

2012 年 2 月于杭州

丘成桐大学生数学竞赛手册

2010 年第一届丘成桐大学生数学竞赛通告

就举办大学生数学竞赛致数学同仁的一封信

尊敬的同仁：

我们最近倡议举办大学生数学竞赛，特写此信向您说明为何要举办这样的竞赛。我们希望竞赛能够达到如下的目标：

1. 培养一位好的数学家，一个重要的步骤是在他们开展研究工作时具备数学的基础知识和技能。为此，世界主要的数学机构都为研究生设置资格考试。中国好的学生应该能通过世界上主要数学机构的资格考试，例如哈佛、斯坦福、伯克利、普林斯顿、哥伦比亚等。可是近年来，这些学校来自中国的学生常常有通不过资格考试的情况，而来自东欧的好学生则无问题。中国大学数学竞赛的竞赛内容将足够广泛与基本。这样将有助于为中国和世界的数学机构提供良好的数学生源，为中国和世界的数学发展培植深厚的土壤。

2. 应当为没能进入到中国顶尖大学的学生提供公平的竞争机会这一点很重要。一个高中生可能有很多原因使得他（她）没能进入到顶尖大学，例如运气不好、身体不适、贫穷或者不成熟等。可是这些情况可能会发生变化，而这些学生突然决定要好好干。可在目前中国的情况下他们到世界和中国一流机构深造的机会较少。我们应当给他们机会。我本人在香港就有类似的经历。我曾经很难进入到一流大学，经过艰苦的努力与奋斗才得到承认。

3. 要让在顶尖学校学习的学生感到在数学上经常有压力和挑战，使得他们刻苦工作，保持一个良好的工作状态。现在经常有来自中国大陆的学生大谈数学的哲学，而不能坐下来做扎实的计算。这个竞赛的内容就是数学的基本知识与基本功，通过这个竞赛将能够非常有效地改变这种状况。

4. 我们将邀请世界著名的数学家口试我们竞赛优秀的学生（暂定前 15 名）。我相信许多一流数学家将会乐意面试我们的优秀学生。这些数学家将亲