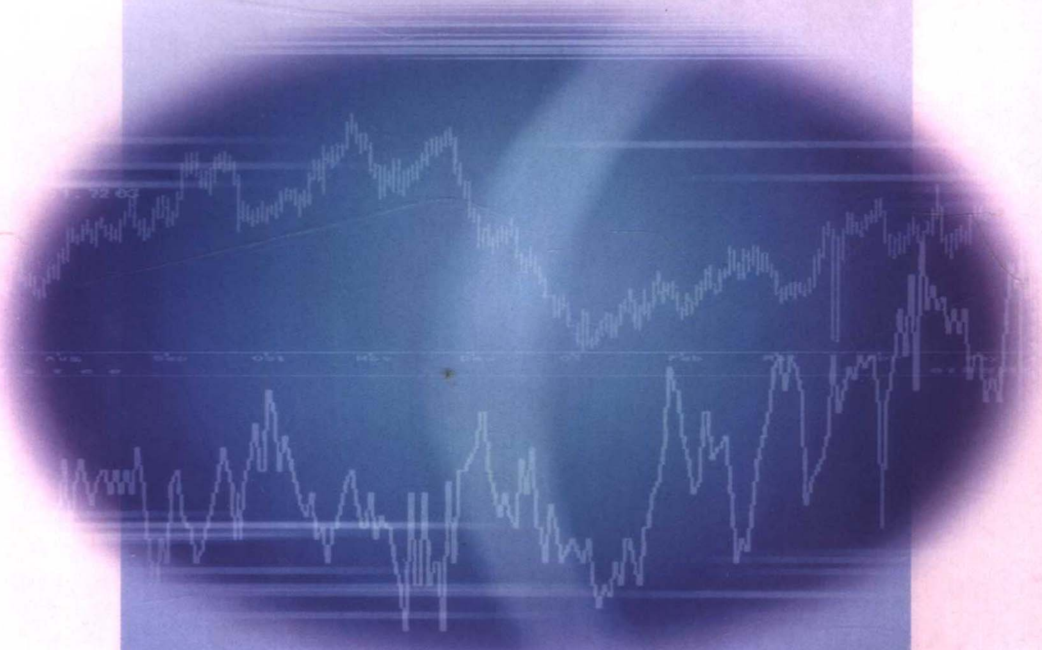
高等农林院校十五规划教材

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

概率论与数理统计

梁保松　主编



中国农业出版社

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

概率论与数理统计

梁保松　主编

中国农业出版社

数据

概率论与数理统计 / 梁保松主编. —北京：中国农业出版社，2004.1
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-08783-2

Ⅰ.概… Ⅱ.梁… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 113792 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑 龙永志

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×960mm 1/16 印张：15.25
字数：270 千字
定价：20.80 元

主　编　梁保松
副主编　林淑蓉　吴瑞武　刘秋香
　　　　　张青娥　赵翠萍
编　者　梁保松　林淑蓉　吴瑞武
　　　　　刘秋香　张青娥　赵翠萍
　　　　　陈　振　程　莉　郑大川
　　　　　郝新生
审　稿　石东洋

前　　言

本教材为全国高等农业院校“十五”规划教材。

数学是科学的基本语言,是研究和探索物质世界的重要手段。对于现代化的工农业技术和现代化工程而言,数学则是表达技术原理、进行复杂的工程设计和计算必不可少的工具。特别是随着计算机技术的快速发展,数学的社会化程度日益提高,现代化产业和经济的组织与管理,已完全离不开数学所提供的方法和技术。因此,数学在大学教育中占有举足轻重的地位。

数学给予人们的不仅是知识,最重要的是能力。这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断。所以,数学在素质教育中的作用是其他课程无法企及的。

概率论与数理统计是一门应用性极强的课程,内容博大精深。要使学生在有限的学时内深刻地掌握其思想和方法,首先需要有好的教材。对于高等农业院校来说,要培养学生应用于农林技术、农林工程、生物技术等领域的数学思想和方法,在教材内容和体系的安排上就必须体现高等农林教育的特色。

本书按照“十五”规划高等农林教育数学教材编写大纲的要求,结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想,注重体现素质教育和创新能力的培养,以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求。本书在具体内容的安排上具有以下特点:

一、保持体系完整。全书结构严谨,内容由浅入深,循序渐进,通俗易学,努力突出概率统计的基本思想和基本方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系,从总体上把握概率统计的思想方法;另一方面,培养学生严密的逻辑思维能力。

二、追求简明实用。删去了一些烦琐的理论证明,直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出概率统计的基本概念、法则和公式,

使表达更加简明;引导学生理解概念的内涵和背景,培养学生用概率统计的思想和方法分析与解决实际问题的能力,注重了数学建模思想,突出了数学的应用性。

三、体现农林特色。较多地设置了生物科学、生命科学、农林经济管理等方面的实例,突出了概率统计在农林科学中的应用,促进了概率统计与农林专业课程的结合,为学生学习专业,尤其是生物统计课提供了“接口”。

四、每章都设置了选读选讲内容,保持了内容的连续性和完整性,供教师根据教学要求取舍和报考研究生者选学。

参加本书编写的有:梁保松、林淑蓉、吴瑞武、刘秋香、张青娥、赵翠萍、陈振、程莉、郑大川、郝新生,最后由梁保松同志统一定稿。

郑州大学石东洋教授仔细审阅了全书,并提出了宝贵建议,在此表示衷心的感谢。

最后,对中国农业出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持表示衷心的谢意。

错漏之处,敬请得到专家、同行和读者的批评指正。

编　者

2003年11月18日

目　　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件及其运算

一、必然现象与随机现象

概率论是研究随机现象统计规律的科学.在自然界和人类社会中,人们观察到的现象大体可分为两类.一类是事前可预言的,即一旦某条件实现,某现象必然发生,我们称这类现象为**必然现象**.例如,向上抛一物体必然要落到地面;在101 325 Pa大气压下,水加热到100 ℃时必然沸腾;水稻的生长从播种到收获必然经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段等等.另一类现象是事前无法预言的,即在一定条件实现后,可能发生也可能不发生的现象,我们称这种现象为**随机现象**.例如,掷一枚质地均匀的硬币,结果可能出现正面,也可能出现反面,掷前无法确定会出现哪个面;从一袋小麦种子中任取10粒做发芽试验,试验的结果可能有10,9,8,…,1粒种子发芽或全部不发芽,在试验前无法确定有几粒种子会发芽;在射击方面,同一个炮手利用同一门炮向同一目标射击,无论怎样控制射击条件不变,各次弹着点总不尽相同.在经济学方面,未来市场的股票价格也是不确定的.在生物学方面,某种生物群体的增长、扩散、迁变也具有不确定性.总之随机现象俯拾皆是,它充满于我们的现实生活、经济生活、科学研究和工程技术活动中.

随机现象孤立地、少量地看似乎是不可捉摸、无规律的,纯粹由偶然性起支配作用,但实际上并非如此.人们通过长期的观察和实践发现,在大量重复试验下,随机现象会呈现出一种固有的规律,通常称之为随机现象的**统计规律**.正是由于这种统计规律性,才使得人们能对随机现象发生的可能性给出度量方式及其算法.

二、随机试验

我们把对自然现象、社会现象所进行的一次观察或进行的一次科学试验统称为一个**试验**.

如果一个试验具有如下特征:

(1) 在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验可出现不同的结果,究竟出现哪种结果,试验之前无法确定;

(3) 事先知道试验可能出现的全部结果.

则称该试验为**随机试验**,记作 E.下面给出一些随机试验的例子:

E_1: 掷一枚质地均匀的硬币,观察其落地后出现哪个面;

E_2: 掷一颗均匀对称的骰子,观察其出现的点数;

E_3: 记录一段时间内,某城市 110 报警次数;

E_4: 用 100 粒种子做发芽试验,观察其发芽的粒数;

E_5: 从一批电视机中,任取一台观察无故障运行时间;

E_6: 向坐标平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant16\}$ 内随机投一点(假设点必落在 D 上),观察落点 M 的坐标.

由上述例子可知,随机试验是产生随机现象的过程,随机试验和随机现象是并存的.

三、随机事件

随机试验 E 的每一个可能结果称为随机事件,简称事件.通常用 A,B,C 等表示.例如 E_2 的可能结果为{出现 1 点},{出现 2 点},…,{出现 6 点},这些都是随机事件.再如对 E_4,{有一粒发芽},{有两粒发芽},…,{有三十粒发芽}…也是随机事件.事件是概率论中最基本的概念,能将所讨论的事件正确地表示出来是学习概率论的最基本要求.

事件可分为基本事件和复合事件.

我们把**不能再分解的事件称为基本事件**.例如,对 10 环靶进行一次射击,{脱靶},{射中 1 环},{射中 2 环},…,{射中 9 环},{射中 10 环};掷一枚硬币,{出现正面},{出现反面}都是基本事件.**由若干事件组成的事件称为复合事件**.例如 E_2 中,{出现奇数点},{出现偶数点};E_4 中,{发芽粒数不超过 85},{发芽粒数大于 90}都是复合事件.但应注意,把事件划分为基本事件与复合事件是相对试验的目的而言的,不是绝对的.两个人掷一颗骰子,在以出现奇数点或偶数点论输赢的场合下,{出现奇数点}及{出现偶数点}都是基本事件.

随机事件中有两个极端的情况,一个是**每次试验都必然发生的事件,称为必然事件,记为 Ω**.另一个是**每次试验中都不可能发生的事件,称为不可能事件,记为 Φ**.

四、样本空间

为了用数学方法描述随机现象,下面引入样本空间的概念.

随机试验 E 产生的所有基本事件构成的集合称为随机试验 E 的样本空间,记为 Ω. 其中每个元素(基本事件)称为一个样本点,记为 ω,$\Omega=\{\omega\}$.

例 1 给出随机试验 $E_1 - E_6$ 的样本空间.

解 E_1 有两个基本事件,即{出现正面},{出现反面},若用 ω_1 表示{出现正面},ω_2 表示{出现反面},则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

E_2 有 6 个基本事件,用 ω_i 表示{出现 i 点}($i=1,2,3,4,5,6$),则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

E_3 的基本事件为{出现 0 次报警},{出现 1 次报警},{出现 2 次报警},…,用 ω_i 表示{出现 i 次报警}($i=0,1,2,3,\cdots$),则

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}.$$

E_4 的基本事件为{有 0 粒发芽},{有 1 粒发芽},{有 2 粒发芽},…,{有 100 粒发芽},用 ω_i 表示{有 i 粒发芽}($i=0,1,2,3,\cdots,99,100$),则

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{99}, \omega_{100}\}.$$

E_5 的样本空间为 $\Omega=\{x \mid x\geqslant 0, x$ 为无故障运行的时间$\}$.

E_6 的样本空间为 $\Omega=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 16$,其中$(x,y)$为点 M 的坐标$\}$.

由于任何一个随机事件或是基本事件,或是复合事件.因此,随机试验 E 的任何一个事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集.若 A 是基本事件,则 A 对应 Ω 中的一个单点集;若 A 是复合事件,则 A 对应 Ω 中由几个样本点组成的集合.必然事件与样本空间 Ω 相对应,不可能事件与空集 Φ 相对应,从而由样本空间的子集可描述随机试验中所对应的一切随机事件.这样,就建立了事件与集合之间的联系,我们可以用集合论的方法来研究事件及其关系.

五、随机事件的关系及其运算

进行随机试验,有多种事件出现,这些事件往往是相互联系的.为了研究复杂事件是由哪些基本事件构成的,以便计算它们的概率,就需要引入事件的关系及其运算.

设 A、B、C 为同一样本空间 Ω 的事件,它们之间有下列关系及运算:

(1) 包含与相等

若事件 A 的出现(发生)必然导致事件 B 的出现(发生),则称 B 包含 A 或称 A 被 B 包含,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

当 $A \subset B$ 时,A 中的样本点一定是 B 中样本点,又称 A 是 B 的子事件.如 E_4 中,设 $A=\{$多于 60 粒发芽$\}$,$B=\{$多于 80 粒发芽$\}$,$C=\{$少于 50 粒发芽$\}$.若事件 B 出现,则事件 A 出现,事件 C 不出现,即 $B \subset A$,$B \not\subset C$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等或等价.记作 $A=B$.当 $A=B$ 时,A 中的样本点与 B 中的样本点相同.

对于任意事件 A,有 $A \subset \Omega$.作为特殊情形,规定 $\Phi \subset A$.

(2) 事件的并(或和)

事件 A 与事件 B 至少一个出现(发生)所构成的事件称为 A 与 B 的并(或和),记作 $A \cup B$.如在 E_2 中,$A=\{$掷出偶数点$\}$,$B=\{$掷出点数大于 3$\}$,则 $A \cup B=\{$掷出的点数或者是偶数或者是大于 3$\}=\{$掷出点数为 2,4,5,6 中之一$\}$.显然,$A \cup \Omega=\Omega$,$A \cup A=A$,$A \subset B$ 时,$A \cup B=B$.

(3) 事件的交(或积)

事件 A 与事件 B 同时出现(发生)所构成的事件称为 A 与 B 的交(或积),记作 $A \cap B$ 或 AB.如 E_2 中,$A=\{$掷出偶数点$\}$,$B=\{$掷出点数大于 3$\}$,则 $A \cap B=\{$掷出的点数为 4 或 6$\}$.显然有 $AB \subset A \subset A \cup B$,$AB \subset B \subset A \cup B$.

对于任一事件 A,有 $A \cap \Omega=A$,$A \cap \Phi=\Phi$.

(4) 事件的差

事件 A 出现(发生),而事件 B 不出现(不发生)所构成的事件称为 A 与 B 的差,记作 $A-B$.如 E_2 中,$A=\{$掷出偶数点$\}$,$B=\{$掷出点数大于 3$\}$,则 $A-B=\{$掷出的点数为 2$\}$.

$A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点所组成的集合.显然有 $A-B=A-AB$.

对于任一事件 A,$A-A=\Phi$,$A-\Phi=A$,$A-\Omega=\Phi$.

(5) 互不相容(互斥)事件

如事件 A 与事件 B 不能同时出现(发生),即 $A \cap B=\Phi$,则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件(或互斥事件).事件 A 与事件 B 互不相容表示 A 与 B 没有公共的样本点.

例如,对十环靶进行一次射击,A_i 表示击中 i 环($i=0,1,2,3,\cdots 8,9,10$),则 A_6 与 A_9 是互不相容事件.

对于互不相容事件的和 $A \cup B$,记作 $A+B$.

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意不同两个均互不相容(互斥)，即 $A_i \cap A_j = \Phi(i \neq j)$，则称此**事件组两两互不相容(或两两互斥)**.

对于互不相容的事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

如果 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组.

在随机试验的样本空间中，所有基本事件构成互不相容的完备事件组.

(6) 对立(互逆)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时出现(发生)，但又必定有一个出现(发生)，即 $A \cap B = \Phi, A + B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B 为对立(或互逆)事件. 通常把 A 的对立事件记作 $\overline{A}$. 这时 $A \cap \overline{A} = \Phi, A + \overline{A} = \Omega$，$A$ 与 $\overline{A}$ 构成一个互不相容的完备事件组. 显然

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \Omega - A = \overline{A}, \quad A - B = A\overline{B}.$$

需要注意的是：**对立(互逆)事件一定互不相容(互斥)，反之不一定成立**.

事件的并与事件的交可以推广到有限多个及可列无限多个事件，即

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生.

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 表示可列多个事件 A_i 中至少有一个发生.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$ 表示可列多个事件 A_i 同时发生.

为了帮助大家理解上述概念，现把集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列表给出(表 1-1).

表 1-1

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	全集	样本空间；必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	Ω 中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 包含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等(或等价)

（续）

符　号	集　合　论	概　　率　　论
$A\cup B$	集合 A 与 B 之并	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件 A 与 B 之和(并))
$A\cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生(事件 A 与 B 之积(交))
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)
$A\cap B=\Phi$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容(互斥)

若用平面上一矩形区域表示样本空间 Ω,矩形区域内的点表示样本点,则事件间的关系和运算可以用平面上的几何图形(图 1-1)直观地表示出来.在图 1-1中,两个小圆分别表示事件 A 和 B,阴影部分表示事件 A 和 B 的各种关系和运算结果.

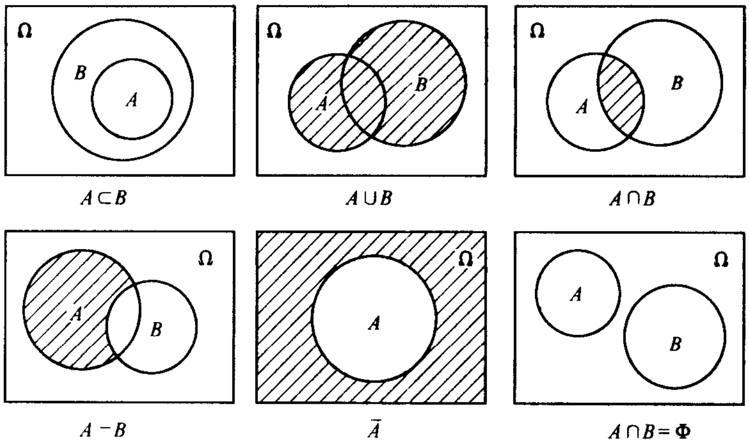


图 1-1

可以验证事件的运算满足如下定律

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A.$$

(2) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$